

Bent Elbek

ELEKTROMAGNETISME

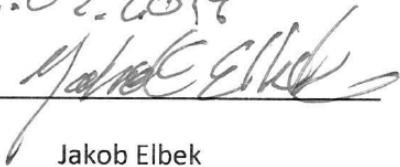
*Klassisk elektromagnetisk feltteori
med grundlag og anvendelser*

1. juli 2019

Undertegnede giver på vegne af arvingerne efter Bent Elbek, forfatter til bogen "Elektromagnetisme"

(IBSN: 87-87585-07-3) tilladelse til bogen må udgives i digital form på Niels Bohr Instituttets hjemmeside.

02.07.2019



Jakob Elbek

**HELSINGØR KOMMUNES
BIBLIOTEKER**

**Niels Bohr Institutet
1993**

ELEKTROMAGNETISME

Manuskriptet er skrevet i $\text{\LaTeX}$ og direkte reproduceret fra forfatterens originaler.

Trykt på Niels Bohr Institutet.

Udgivet af Niels Bohr Institutet, Blegdamsvej 15-17, 2100 København Ø

© 1993 Bent Elbek.

ISBN 87-87585-07-3

Denne bog / forelæsningsnote er blevet digitaliseret af Martin Skogstad-von Qualen, og er en del af et projekt der har til formål at gøre tekster, forfattet af danske fysikere, tilgængelige for offentligheden. Teksterne, der hovedsageligt skrevet i 90'erne, blev anskaffet i så fine udgaver som muligt, hvorefter de blev skannet på en fotokopimaskine i en opløsning på 600 dpi (S/H) i tiff format. De skannede billeder dannede så udgangspunkt for en pdf-fil, hvorpå der blev udført elektronisk tekstgenkendelse (OCR).

Bookmarks og links blev herefter tilføjet for at lette navigationen i dokumenterne. Andre af teksterne var tilgængelige i digital form, således at kun bookmarks er tilføjet.

Projektet blev startet i november 2018 og omkring juni 2019 var alle bøger / noter klar til at blive lagt op på www.nbi.ku.dk.

Skulle nogen have spørgsmål til projektet kan Martin kontaktes på martinskogstad@gmail.com

En stor tak til professor emeritus Henrik Smith som også er forfatter til flere af bøgerne, og til lektor i fysik ved NBI Jens Paaske for samarbejde, opmuntring, valg af materiale og lån af fine eksemplarer af værkerne.

Forord

Denne bog er andet bind af en tredelt lærebog, som behandler emnerne *Bølger, Elektromagnetisme og Optik*. Lærebogen er på indledende universitetsniveau og tilpasset de gode matematiske forudsætninger, som danske studerende traditionelt har. I omfang og emner svarer bogen nogenlunde til det kursus, jeg gennem en halv snes år har afholdt for fysikstuderende på Københavns Universitet på 2. studieår. Når jeg har besluttet at skrive en egentlig lærebog til kurset, skyldes det, at de forskellige udenlandske tekster, som har været benyttet, er udsolgt fra forlagene uden, at egentlig velegnede afløsere er kommet frem. Dette gælder således den ansete *Foundations of Electromagnetic Theory* af *Reitz, Milford og Christy*, som i mange år har været den grundlæggende tekst i København og som utvivlsomt har sat sit præg på denne bog.

Der er mange års tradition for, både i København og andre steder i verden, at andet studieår af fysikstudiet omfatter en grundig indføring i den klassiske elektromagnetisme. På dette tidspunkt har de studerende fået kendskab til en række grundlæggende fysiske begreber, især inden for mekanik, relativitetsteori og måske termodynamik, men de har endnu ikke mødt *feltbegrebet* i nogen væsentlig sammenhæng. De matematiske forudsætninger er blevet udbygget, her specielt inden for analyse af funktioner af flere variable, og kommer til bred anvendelse netop indenfor elektromagnetismen. På denne baggrund sigter bogen mod at præsentere den elektromagnetiske teori som en feltteori, men med en klar forbindelse til både historisk betydningsfulde eksperimenter og til praktiske anvendelser. Uden for denne hovedlinie, er der flere steder skitseret en sammenhæng mellem de elektromagnetiske materialeparametre og stoffernes mikroskopiske opbygning.

De første syv kapitler af *Elektromagnetisme* har i studieåret 1991-92 været tilgængelige for de studerende, fra hvem jeg har modtaget mange forslag til rettelser, som i vid udstrækning er indarbejdet her. Det er imidlertid først nu ved indgangen til studieåret 1992-93, at det skal vise sig, om bogen kan stå distancen.

I teksten anvendes symbolerne $\triangleright$ og $\triangleleft$ til at afgrænse stof, som har karakter af eksempler eller kommentarer. Symbolet $\square$ i forbindelse med personomtale er en henvisning til en (endnu ikke skrevet) samling af mini-biografier. Til den samlede lærebog findes der et separat hefte med opgaver og facitliste, som det er tanken senere at indarbejde i hovedteksten.

København den 12. august 1992.

Bent Elbek

Indhold

1	Den elektromagnetiske teori	1
2	Elektrostatik	5
2.1	Elektrisk ladning	5
2.2	Coulombs lov	7
2.3	Det elektriske felt	9
2.4	Elektrisk potential	13
2.5	Gauss' lov	16
2.6	Ledere	18
2.7	Elektriske felter bestemt ved Gauss' lov	21
2.8	Elektriske multipolfelter	25
2.8.1	Monopolfeltet	26
2.8.2	Dipolfeltet	26
2.8.3	Quadrupolfeltet	29
2.8.4	Aksialsymmetriske ladningsfordelinger	30
2.9	Laplaces ligning og dens løsninger	32
2.9.1	Entydigheden af elektrostatiske løsninger	32
2.9.2	Laplaceligningen i én variabel	34
2.9.3	Laplaceligningen i cylindriske koordinater	35
2.9.4	Laplaceligningen i sfæriske koordinater	37
2.9.5	Konform afbildning	40
2.9.6	Elektrostatiske billeder	42
2.10	Capacitans	45
2.10.1	Kondensatorer	45
2.10.2	Capacitanskoefficienter og potentialkoefficienter	47
3	Dielektrika	53
3.1	Polarisation	53
3.2	Makroskopisk teori for dielektrika	55
3.3	Gauss lov i et dielektrikum	58
3.4	Dielektriske materialer	60
3.5	Feltet i dielektrika	61
3.6	Grænsebetingelser for det elektriske felt	65
3.7	Laplaces ligning med dielektrika	68
3.8	Molekylær teori for dielektrika	71

4	Elektrostatisk energi	75
4.1	Energi af et system af punktladninger	75
4.2	Energi af en kontinuert ladningsfordeling	78
4.3	Energi af ladede ledere	79
4.3.1	Energi i en kondensator	79
4.3.2	Energi af et system af ladede ledere	80
4.4	Energi i det elektrostatiske felt	81
4.5	Kræfter og momenter i elektrostatiken	84
5	Elektrisk strøm	87
5.1	Elektrisk strøm og strømtæthed	88
5.2	Resistans	90
5.2.1	Ohms lov	90
5.2.2	Konduktivitet og resistivitet	91
5.2.3	Resistorer	92
5.3	Stationær strøm i et udstrakt medium	93
5.4	Effekt afsat i en leder	96
5.5	Hen mod elektrostatisk ligevægt	98
5.6	Elektromotorisk kraft	99
5.6.1	Eksempler på elektromotoriske kræfter	101
5.7	Elektriske kredsløb	103
6	Det magnetiske felt	109
6.1	Kræfter mellem strømme	109
6.2	Magnetfeltet fra en strøm	111
6.3	Kræfter mellem bevægede ladninger	113
6.4	Kraft og moment på strømkreds	115
6.5	Magnetfelter beregnet med Biot-Savarts lov	118
6.6	Gauss' lov for det magnetiske felt	121
6.7	Det magnetiske vektorpotential	123
6.8	Ampères lov	125
6.9	Magnetiske multipolfelter	127
7	Induktion	131
7.1	Induktionsloven	131
7.2	Induktans	136
7.2.1	Selvinduktans	136
7.2.2	Induktanskoefficienter	139
7.2.3	Neumanns formel	141
7.2.4	Induktorer	142
7.2.5	Beregning af induktans	143
8	Magnetika	147
8.1	Magnetisering	148
8.2	Makroskopisk teori for magnetika	150
8.3	Gauss' og Ampères love i magnetika	152
8.4	Magnetiske materialer	153
8.4.1	Ferromagnetika	155
8.4.2	Induktans med magnetikum	158

8.5	Mikroskopisk teori for magnetika	159
8.5.1	Diamagnetisme	159
8.5.2	Paramagnetisme	161
8.5.3	Ferromagnetisme	168
9	Magnetostatik	173
9.1	Det magnetostatiske felt	173
9.2	Grænsebetingelser for det magnetiske felt	174
9.3	Det magnetiske skalarpotential	176
9.4	Løsninger til magnetostatiske problemer	179
9.5	Magnetiske kredsløb	184
9.5.1	Kredsløb af lineære materialer	184
9.5.2	Kredse med permanente magneter	185
10	Magnetisk energi	189
10.1	Magnetisk energi af enkelt strømkreds	190
10.2	Magnetisk energi af koblede kredse	191
10.3	Energi af kontinuert strømfordeling	193
10.4	Energi i det magnetiske felt	194
10.5	Kræfter og momenter i magnetostatiken	197
10.6	Energi i ferromagnetika	199
11	Vekselstrøm	201
11.1	Komponenter og maskeligninger	202
11.2	Transienter	205
11.3	Sinusformet vekselstrøm	211
11.3.1	Impedans	212
11.3.2	Vekselstrøm og vekselspænding som vektorer	215
11.3.3	Effekt i vekselstrømskredse	218
11.3.4	Resonanskredse	219
12	Maxwells ligninger	221
12.1	Forskydningsstrømmen	221
12.2	Det færdige ligningssystem	223
12.3	Energi og energistrøm i feltet	224
12.4	Bølgeligningen for elektromagnetiske bølger	227
12.5	Løsning af bølgeligningen	229
12.6	Grænsebetingelser for felterne	231
13	Elektromagnetiske bølger	235
13.1	Plane monokromatiske bølger i dielektrika	235
13.2	Polarisation	238
13.3	Energi i en elektromagnetisk bølge	241
13.4	Plane bølger i ledende medier	242
14	Elektromagnetisk stråling	245
14.1	De elektromagnetiske potentialer	245
14.2	Bølgeligningen med kilder	246
14.3	Løsning af bølgeligningen med kilder	248

14.4	Udstråling fra en elektrisk dipol	250
14.5	Multipolstråling	255
15	Relativiteten af de elektromagnetiske felter	263
15.1	Magnetfeltet som relativistisk fænomen	263
15.2	Nyttige resultater fra relativitetsteorien	265
15.3	Lorentztransformation af et elektrisk felt	268
15.4	Lorentztransformation af Lorentzkraften	269
15.5	Transformation af det elektromagnetiske felt	270
15.6	Invarians af Maxwell ligningerne.	271
15.7	Eksempler	272
16	Anvendelser af den elektromagnetiske teori	275
16.1	Transmissionslinier	275
16.2	Bølgeledere	281
16.2.1	Pladeleder	281
16.2.2	Rektangulær bølgeleder	285
16.2.3	Generelt om bølgeledere	288
16.3	Hulrumsresonatorer	291
A	Vektoranalyse	297
A.1	Skalarer og vektorer	297
A.2	Skalarfelter og vektorfelter	298
A.2.1	Integration af feltstørrelser	299
A.2.2	Differentiation af feltstørrelser	300
A.2.3	Differentialoperatorer i forskellige koordinatsystemer	306
B	Enheder og relationer	309
C	Gaussiske enheder	313

Figurer

2.1	Typer af ladningsfordelinger.	6
2.2	Kraftpåvirkningen mellem to ladede partikler.	8
2.3	Elektrisk ringladning	11
2.4	Feltet om en punktladning.	12
2.5	Feltet om to punktladninger.	12
2.6	Udledning af Gauss' lov.	16
2.7	Ladningen sidder på en leders overflade	19
2.8	Felter omkring fladeladninger	20
2.9	Gauss' pilleåse	20
2.10	Feltstyrke om linieladning	22
2.11	Pladekondensator	23
2.12	Feltlinierør	24
2.13	Multipoludvikling af potentialet	25
2.14	Dipol i ydre felt	28
2.15	Simple multipolfelter	30
2.16	Potentialer som afhænger af én parameter	34
2.17	Elektrostatisk linse med aksialsymmetrisk felt	36
2.18	Ledende kugle i homogent felt.	39
2.19	Felt i pladekondensator ved konform afbildning.	41
2.20	Felt i elektrisk quadrupollinse	41
2.21	Punktladning over for ledende plan	42
2.22	Punktladning i ledende hjørner	43
2.23	Potentialet om to parallelle linieladninger	44
2.24	Tre kondensatortyper	45
2.25	Capacitanser i parallel og i serie.	47
2.26	Capacitans mellem n ledere	48
2.27	Delcapacitanser til jord	50
3.1	Dielektrisk polarisation	54
3.2	Feltet om et dielektrikum	55
3.3	Elektrisk feltstyrke i dielektrikum	57
3.4	Gauss' lov i et dielektrikum	58
3.5	Kondensator med dielektrikum.	62
3.6	Cylindriske hulrum i dielektrika	64
3.7	Beregning af feltet i et sfærisk hulrum.	64
3.8	Grænsebetingelser mellem to dielektrika	65
3.9	Elektrisk fluxlinierør	67
3.10	E -linier og D -linier ved grænseflader.	67

3.11	Felter om dielektrisk kugle	69
3.12	Det mikroskopiske felt i et dielektrikum	71
3.13	Permittivitetsens frekvensafhængighed	74
4.1	Vekselvirkning mellem n punktladninger.	76
4.2	Feltenergi af ladningsfordeling	82
4.3	Virtuel forskydning af et element af en leders overflade. . .	83
4.4	Kraft i system med faste potentialer	85
4.5	Kraft på dielektrisk klods i pladekondensator	86
5.1	Forbindelsen mellem strøm og strømtæthed.	88
5.2	Ohms lov for et lederstykke.	90
5.3	Resistanser i serie og parallel.	92
5.4	Strømbilledet omkring en elektrode med tilledning.	94
5.5	Analogi mellem elektrisk felt og strømfelt	95
5.6	Strømlinier om to rektangulære elektroder.	96
5.7	Effekt i sort kasse	97
5.8	Beregning af effekt for et strømlinierør.	97
5.9	Det enkleste elektriske kredsløb	99
5.10	Elektrostatisk generator	101
5.11	Daniell celle	103
5.12	Elektrisk kredsløb	104
5.13	Kirchhoffs 2. lov	106
5.14	Kredsløb med to masker.	107
5.15	Indførelse af maskestrømme.	107
6.1	Kraftvirkning mellem to strømme.	110
6.2	Kraften mellem to parallelle strømme.	111
6.3	Magnetisk vekselvirkning mellem lukkede strømkredse. . . .	112
6.4	Opdeling af strømfelt i strømlinierør.	112
6.5	Felter om bevæget ladning	114
6.6	Magnetisk moment	117
6.7	Galvanometerspole	118
6.8	Magnetfeltet om lang, lige ledning.	118
6.9	Magnetfeltet på akse af cirkulær leder	119
6.10	Helmholtz spoler	120
6.11	Magnetfelt i solenoide	121
6.12	Lang solenoide	127
6.13	Magnetisk multipolfelt	127
7.1	Induktionsloven	132
7.2	Emk induceret i bevæget leder	133
7.3	Roterende spole i homogent magnetfelt.	134
7.4	Betatron	135
7.5	Ringformet solenoide.	137
7.6	Selvinduktans af coaxialkabel.	138
7.7	Magnetisk koblete kredse	139
7.8	Koblete ringspoler	140
7.9	Gensidig induktans efter Neumann	141

7.10	Kredsløb med induktorer	142
7.11	Ydre og indre selvinduktans	144
8.1	Magnetiseringsstrøm på cylinder	149
8.2	Magnetfelt ved materiale	150
8.3	Hysteresekurve	155
8.4	Afmagnetisering	156
8.5	Relativ permeabilitet for udglødet jern.	157
8.6	Magnetiseringskurver for forskellige ferromagnetika	157
8.7	Præcession af elektronbane i magnetfelt	159
8.8	Magnetisk dipol i ydre felt	162
8.9	Langevins funktion	163
8.10	Kvantisering af magnetisk moment	165
8.11	Magnetisk opsplitting	166
8.12	Ferro-, antiferro- og ferrimagnetisme	170
8.13	Spontan magnetisering	171
8.14	Magnetisering af domæner	171
9.1	Grænsebetingelser mellem to magnetika	174
9.2	H -linier og B -linier ved grænseflader.	175
9.3	Flertydighed af magnetisk skalarpotential	178
9.4	Feltet om en magnetisk dipol	179
9.5	Feltet om en permanent magnetiseret kugle	181
9.6	Magnetfeltet om en magnetiseret cylinder	182
9.7	Felt på akse af homogent magnetiseret cylinder	183
9.8	Magnetisk kredsløb	184
9.9	Magnetisk kreds med permanent magnet	186
9.10	Arbejdspunkt for permanent magnet	187
10.1	Magnetisk energi af enkelt kreds	190
10.2	Energi af magnetisk koblete kredse	191
10.3	Magnetisk energi af strømfordeling	194
10.4	Flytning af magnetisk kreds	197
10.5	Magnetisk stang i spole	198
10.6	Magnetisk kreds med ferromagnetikum	199
10.7	Arbejdet ved magnetisering af et ferromagnetikum	200
11.1	Enkle seriekredse med R , L eller C	202
11.2	RLC -seriekreds	203
11.3	Seriekreds med R og L	205
11.4	Transient forløb i RL -kreds	206
11.5	Seriekreds med R og C	207
11.6	Transient forløb i RC -kreds	207
11.7	Seriekreds med R , L og C	208
11.8	Overdæmpning, kritisk dæmpning og underdæmpning	209
11.9	Seriekreds med sinusformet spænding	211
11.10	Impedanser i serie og i parallel.	213
11.11	Parallelforbindelse af RL og C	214
11.12	Seriekreds med impedans	215

11.13	Impedanstrekanter	215
11.14	Vekselstrøm som vektorer	216
11.15	Vektordiagrammer for strøm og spænding	217
11.16	Resonanskurve	219
11.17	Resonanskurver med forskelligt Q	220
12.1	Forskydningstrøm i kondensator	222
12.2	Poyntingvektoren	225
12.3	Energistrøm til capacitor	226
12.4	Elektromagnetisk bølge	231
12.5	Elektromagnetiske felter nær perfekt leder	232
13.1	Udbredelse af plan bølge	236
13.2	Feltvektorer i elektromagnetisk bølge	238
13.3	Lineær polarisation	239
13.4	Elliptisk polarisation	239
13.5	Feltvektoren i cirkulært polariseret bølge	240
13.6	Polarisationstilstande for lys	240
13.7	Dæmpet bølge i leder	244
14.1	Retarderede potentialer	249
14.2	Hertz dipol	250
14.3	Feltvektorer for elektrisk dipol	253
14.4	Dipolens strålingsmønster	254
14.5	Elektrisk og magnetisk dipol	257
14.6	Feltvektorer for magnetisk dipol	259
15.1	Leder med strøm i referencesystem i bevægelse.	263
15.2	Lorentz-transformation af kraft på partikel	268
15.3	Bevæget leder i magnetfelt	272
15.4	Bevæget linieladning	273
16.1	Transmissionslinie	275
16.2	Ekvivalentdiagram for dobbeltleder	276
16.3	Felter ved metaloverflade	281
16.4	Pladeleder	282
16.5	Bølge i pladeleder	283
16.6	Reflektion af bølge i pladeleder	284
16.7	Felterne TE, TM og TEM	285
16.8	Rektangulær bølgeleder	286
16.9	Feltlinier i bølgeleder	287
16.10	Rektangulær hulrumsresonator	291
16.11	Anslag af hulrumsresonator	293
16.12	Overfladeresistans	294
16.13	TE ₀₂₁ -felt i resonator	295
A.1	Linie-, flade- og volumenintegral af vektorfelt.	299
A.2	Betydningen af gradienten	301
A.3	Linieintegral af gradient	302

A.4	Gauss' sætning	303
A.5	Stokes sætning	303
A.6	Forskellige koordinatsystemer	307

Kapitel 1

Den elektromagnetiske teori

Fysik kan siges at være læren om stoffet og om vekselvirkningerne mellem stoffets bestanddele. Her spiller de elektriske og magnetiske fænomener en afgørende rolle. Vi kender også den store betydning af elektricitet og magnetisme inden for alle grene af tekniken og dens anvendelser. Oprindeligt blev de elektriske og de magnetiske fænomener opfattet som helt uafhængige. Men med *Hans Christian Ørsted*s (1777-1851) iagttagelse i 1820 af den elektriske strøms virkning på en magnetnål, blev de adskilte områder forenet til ét: *Elektromagnetismen*.

Hvad er fysik?

Formålet med behandlingen her er at give en sammenhængende fremstilling af den *elektromagnetiske teori*, sådan som den omkring 1873 blev udmøntet af *James Clerk Maxwell* (1831-1879). Maxwells teori er en matematisk teori. Man kan sige, at teorien er de fire differentialligninger for det elektromagnetiske felt, som Maxwell opstillede. Grundlaget for ligningerne og deres formulering var ganske vist skabt ved iagttagelser og spekulationer af mange fysikere og matematikere gennem mere end hundrede år. Her i blandt *Karl Friedrich Gauss* (1777-1855), *Michael Faraday* (1791-1867) og *Andre Marie Ampère* (1775-1836). Maxwell gav selv et afgørende bidrag til at gøre grundlaget fuldstændigt. Men hans indsats var først og fremmest, at han ud af mængden af iagttagelser og hypoteser valgte netop disse fire ligninger som dem, der kunne beskrive *alle* makroskopiske elektromagnetiske fænomener.

Maxwells teori

Maxwells ligninger spiller samme rolle inden for elektromagnetismen som Newtons love inden for den klassiske mekanik. Men Newtons love er kun en tilnærmelse, der gælder for hastigheder, som er små i forhold til lyshastigheden. Først med relativitetsteorien blev den klassiske mekanik komplet. Maxwells ligninger står derimod urørte, fuldt relativistisk korrekte som de først blev formuleret.

Teorien er relativistisk korrekt

Det skal imidlertid understreges, at Maxwells teori helt er en del af den *klassiske* fysik. Den er ikke umiddelbart gyldig for systemer og processer, som beherskes af kvantemekanikens love. Her må man anvende *kvante-elektrodynamik*, der i dag er en fuldt færdig teori, som i sig forener kvanteteori, relativitetsteori og elektromagnetisme.

Men inden for sit gyldighedsområde er den klassiske elektromagnetiske teori et fremragende eksempel, måske det bedste som findes, på en *deduktiv* teori, hvor alt kan udledes ud fra et begrænset antal forudsætninger, *in casu*

Deduktiv teori

de fire differentialligninger. Det kan pædagogisk udmærket lade sig gøre at bygge en fremstilling op på dette grundlag. Men ved en første præsentation af emnet er fremgangsmåden måske ikke den bedste. Det tager tid at lære ved et øjekast at forstå indholdet og betydningen af de matematiske formler. Ved den deduktive metode får man heller ikke med sikkerhed etableret forbindelsen til de observationer, som er grundlaget for enhver fysisk teori.

Eksperimentelt grundlag

Metoden som følges i denne bog er derfor ganske konventionel. Hver af de fire Maxwell ligninger knyttes til en eksperimentel iagttagelse, som dernæst formuleres matematisk. Maxwells teori er en *feltteori* og kan som sådan ved første møde virke lidt abstrakt. Men netop de omformninger, som fører fra eksperimentelle størrelser som kræfter, elektriske spændinger eller strømme til udsagn om det elektromagnetiske felt, er uhyre karakteristiske for teorien og kan hjælpe til at forankre feltbegrebet i den mere umiddelbare virkelighed.

De fire Maxwell ligninger

Inden vi går i gang med de iagttagelser og overvejelser, som er nødvendige for at opstille hver enkelt af de fire ligninger, kan det være på sin plads, uden kommentarer, at præsentere det fuldstændige ligningssystem. Bortset fra den måde, som matematikeren er skrevet på, og fra det enhedssystem (SI), som er forudsat, er ligningssystemet helt identisk med det, som findes i kapitel IX af Maxwells *Treatise on Electricity and Magnetism* publiceret i 1873:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Der er ikke nogen almindeligt accepteret nummerering af de fire ligninger, men i denne bog refereres der til dem i den viste nummerfølge.

Koblede fysiske felter

Den læser, som her første gang ser ligningerne 1.1-1.4 vil antagelig ikke føle sig særlig meget klogere. Det er sigtet med de følgende kapitler at vise, at hver enkelt af de fire ligninger har et meget konkret fysisk indhold og direkte kan forbindes med eksperimentelle iagttagelser. Men først og fremmest at vise, hvordan ligningernes intime sammenkobling af de fysiske felter, som er betegnet med $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ samt $\mathbf{J}$ og ρ , giver nøglen til forståelse og analyse af de mest forskelligartede emner inden for hele det område, der betegnes som elektromagnetisme.

Elektrostatik

De følgende kapitler behandler i rækkefølge først *Elektrostatik*, som drejer sig om det elektriske felt fra ladninger i hvile. Her begrænset til feltet i vacuum. Det elektriske felts natur gør det muligt allerede på dette punkt at formulere en vacuum-version af den 1. Maxwell ligning og en statisk form af den 3. Dernæst behandles under *Dielektrika* de særlige fænomener, som opstår, når der er elektrisk isolerende materialer tilstede i det elektrostatiske felt. På dette punkt kan den 1. Maxwell ligning gives sin endelige form. Et system af elektriske ladninger kræver energi til sin opbygning. Dette drøftes under *Elektrostatisk energi*, hvor det måske overraskende resultat er, at det elektrostatiske felt *selv* kan tilskrives en energi.

Når forudsætningerne udvides til også at omfatte ladninger, som bevæger sig, bliver elektrisk strøm mulig. Dertil er knyttet særlige virkninger, som først behandles under *Stationære strømme*, dvs. strømme, som ikke varierer med tiden.

Elektrisk strøm

Magnetfeltet er en vigtig virkning af den elektriske strøm. Det behandles først i vacuum under *Det magnetiske felt*. Magnetfeltet indføres både som en eksperimentel kendsgerning og som en nødvendig følge af det elektriske felt og relativitetsprincippet. På dette punkt fremkommer den 2. Maxwell ligning og begyndelsen til den 4.

Magnetfeltet

Som det elektriske felt påvirkes også magnetfeltet, når der er materialer tilstede. Disse fænomener behandles under *Magnetika*. For stationære magnetfelter kan der formuleres en teori, som i mange henseender er analog til teorien for statiske elektriske felter. Denne teori udvikles under betegnelsen *Magnetostatik*. Ligeledes kan det magnetiske felt tilskrives energi, hvilket drøftes under *Magnetostatisk energi*.

Når endelig forudsætningen om stationære strømme opgives, og man indbefatter strømme, som varierer langsomt i tid, giver de tilhørende tidsvarierende magnetfelter anledning til et nyt fænomen, *Induktion*. Den hertil hørende 3. Maxwell ligning gør det blandt andet muligt at behandle de i praksis vigtige *Vekselstrømme*.

Induktion

På dette punkt er systemet af de fire Maxwell ligninger næsten komplet. Der er dog et meget vigtigt forbehold over for den 4. ligning, hvor det sidste led endnu ikke er begrundet. Mens de øvrige ligninger i princippet var kendt fra tidligere, var det Maxwells særlige fortjeneste at indføre dette sidste led. Begrundelsen herfor og konsekvenserne deraf behandles under *Maxwells ligninger*.

Blandt de vigtige konsekvenser af det fuldstændige ligningssystem er muligheden for *Elektromagnetiske bølger*. Kilderne til de elektromagnetiske bølger er hurtigt varierende elektriske strømme og ladninger. Det er på dette punkt, at den fulde betydning af Maxwells vidunderlige ligninger bliver klar. Intet sted måske klarere end i behandlingen af *Elektromagnetisk stråling*.

*Teoriens
konsekvenser*

Som en afrunding diskuteres i *Relativitetsteorien og de elektromagnetiske felter* det perspektiv på den elektromagnetiske teori, som relativitetsteorien giver. Endelig afsluttes under *Anvendelser af den elektromagnetiske teori* med nogle få eksempler på de mange udnyttelser af den Maxwellske teori på praktiske problemer.

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Elektrisk ladning

Stoffet i universet er sammensat af partikler, hvoraf nogle har *elektrisk ladning*. Ladning er en egenskab ved stof på samme måde, som *masse* er det. Men mens der kun findes én slags masse, findes elektrisk ladning i to varieteter som, efter forslag af *Benjamin Franklin* (1706-1790)□, kaldes *positiv* og *negativ*. Disse betegnelser er velvalgte, da de to slags elektricitet kan ophæve hinandens virkninger.

Ladning er fundamental

Af de fundamentale partikler er *protonen* positivt ladet og *elektronen* negativt. Fortegnenes fastlæggelse fortaber sig i historien, hvor elektrisk ladning blev frembragt ved at gnide forskellige materialer med uskyldige kattes skind. Elektriciteten på en gnedet stang af rav blev kaldt negativ, mens den på en glasstang blev kaldt positiv. Elektronens og protonens ladninger er, så vidt det har kunnet konstateres med forfinede målemetoder, meget nøje numerisk lige store. Den numeriske ladning på en elektron kaldes den *elektriske elementarladning* som betegnes e , og har størrelsen $1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}$ (Coulomb, se afsnit 2.2).

$\pm e$

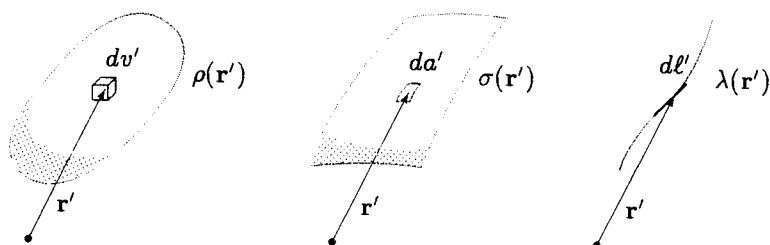
Elementarladning

Alle partikler har ladninger, som er et helt antal positive eller negative elementarladninger, eller de har ladningen nul. Visse partikler, som de masseløse *neutrinoer*, er fundamentalt neutrale. *Neutronen*, derimod, er nok uladet, men har alligevel en elektrisk struktur, som eksempelvis viser sig ved, at den har et magnetisk moment (jfr. afsnit 6.4). Man mener i dag, at tunge partikler som protoner og neutroner er opbygget af *quarks*, som bærer ladninger på $\pm e/3$ og $\pm 2e/3$, hvilket kan forklare neutronens elektriske struktur. Quarks har dog ikke været og kan ikke forventes observeret i fri tilstand. Man kan derfor vedblivende sige, at alle observerede partikler har en elektrisk ladning, som er *kvantiseret* i multipla af elementarladningen. Man har endnu ikke nogen forklaring på ladningens kvantisering.

Quarks

Ladning er en *bevaret størrelse*. For et isoleret system er ladningen konstant. Således kan en negativ elektron og dens positive partner, *positronen*, destruere hinanden i den proces, som kaldes *annihilation*. Derved omdannes de to partiklers hvileenergier til energi i to fotoner, som udsendes i modsatte retninger. Ladningerne er forsvundet, men det ændrer jo ikke systemets totale ladning, da der er forsvundet lige så megen positiv som negativ ladning. I den modsatte proces, *pardannelse*, kan en tilstrækkelig energirig foton give

Ladning bevares



Figur 2.1: Ladningsfordelinger i rummet, på en overflade og på en linie

Universet
neutralt

anledning til dannelse af en positiv og en negativ elektron. Men heller ikke derved ændres mængden af ladning som, regnet med fortegn, er nul både før og efter processen. Man må regne med, at fra universet blev skabt i den kosmiske ildkugle, har det indeholdt lige mange elektrisk positive og negative partikler og derfor som helhed har været elektrisk neutralt.

Stof næsten
neutralt

Under jordiske forhold vil stof normalt være opbygget af *atomer*, som rummer lige mange protoner og elektroner. Stof har derfor, også i mindre portioner, en udpræget tendens til at være elektrisk neutralt. Ved særlige påvirkninger (jfr. katteskindet) kan man fjerne eller tilføre et antal ladninger, især elektroner. Derved bliver stoffet ladet, idet visse dele deraf får et overskud af elektroner, andre et underskud. Vi skal se, at der er store kræfter mellem adskilte ladninger. Der vil derfor altid være en betydelig tilbøjelighed til at udjævne ladningsforskelle og genetablere elektrisk neutralitet.

Ladning er
additiv

Elektrisk ladning er *additiv*. Det er klart, når man tænker på, at ladning altid skyldes uforanderlige elementarladninger. Fjorten protoner har dobbelt så megen ladning som syv. Dette er ikke tilfældet for masse. Syv protoner og syv neutroner har mindre masse, når de forenes til en nitrogenkerne, end når de er frie partikler.

Antallet af elektriske ladninger i et makroskopisk stykke stof er meget stort ($\approx 10^{23}$), og elementarladningen er meget lille. Eksempelvis i sammenligning med den ladning (≈ 1 C), der typisk hvert sekund strømmer gennem et husholdningsapparat. Normalt mærker vi derfor ikke noget til, at ladningen er kvantiseret.

Kontinuerte
ladnings-
fordelinger

Makroskopisk kan vi således opfatte ladning som en *kontinuerlig* fordelt kvantitet. Den kan være fordelt mere eller mindre jævnt over et volumen. Vi kan da beskrive ladningstilstanden ved en *volumenladningstæthed* $\rho(\mathbf{r}')$ i Cm^{-3} , som angiver ladningen per volumen i et lille volumen dv' omkring punktet med stedvektoren $\mathbf{r}'$. Betegnelsen $\mathbf{r}'$ er benyttet til at angive ladningens beliggenhed for at være i overensstemmelse med en senere anvendt nomenklatur (se afsnit 2.2), hvor mærkede størrelser angiver *kildepunkter* og umærkede *målepunkter*. Betegnelsen $\mathbf{r}'$ har altså *ikke* noget med differentiation at gøre, se fig. 2.1.

Konvention for
stedvektorer

Ladning er ikke nødvendigvis fordelt over et volumen. I nogle tilfælde er den koncentreret på overfladen af et legeme. Det gælder for ledere (jfr. afsnit 2.3), som er karakteristiske ved, at de rummer frit bevægelige ladninger. Her beskriver man ladningsfordelingen ved en *fladeladningstæthed* $\sigma(\mathbf{r}')$ i Cm^{-2} . Man kan tilsvarende forestille sig én-dimensionale ladningsfordelinger (som tynde tråde) beskrevet ved en *linieladningstæthed* $\lambda(\mathbf{r}')$ i Cm^{-1} .

De nævnte ladningstætheder må opfattes som grænseværdier af forholdet mellem den ladmingsmængde Δq , der befinder sig indenfor henholdsvis et volumenelement $\Delta v'$, et overfladeelement $\Delta a'$ og et linieelement $\Delta \ell'$ i omegnen af $\mathbf{r}'$, altså

Ladningstæthed defineret

$$\rho(\mathbf{r}') = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v'}, \quad \sigma(\mathbf{r}') = \lim_{\Delta a' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta a'}, \quad \lambda(\mathbf{r}') = \lim_{\Delta \ell' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta \ell'}. \quad (2.1)$$

Vi finder den samlede ladning q på et legeme ved at integrere ladningstætheden hen over legemet. For de i 2.1 nævnte ladningstætheder bliver

Samlet ladning

$$q = \int_V \rho(\mathbf{r}') dv', \quad q = \int_S \sigma(\mathbf{r}') da', \quad q = \int_L \lambda(\mathbf{r}') d\ell', \quad (2.2)$$

hvor V , S , og L angiver henholdsvis det volumen, det areal eller den længde, hvorpå ladningen ønskes bestemt.

I det følgende benytter vi ofte en abstraktion, som kaldes en *punktladning*. Dermed menes en ladning, hvis udstrækning er lille i sammenligning med andre relevante dimensioner, som indgår i det foreliggende problem. En punktladning kan godt være 'makroskopisk'. For eksempel kan en højt svævende ladet ballon betragtes som en punktladning over for jordens overflade. Omvendt kan det over for atomets inderste elektroner være en dårlig approximation at betragte atomkernen som en punktladning.

Punktladning

2.2 Coulombs lov

Mellem elektriske ladninger virker der *kræfter*. Den første, som foretog systematiske undersøgelser af disse kraftvirkninger, var *Charles Augustin de Coulomb* (1736-1806)□. På baggrund af sine målinger kunne Coulomb fremsætte de grundlæggende love for den elektriske kraft mellem to punktladninger:

Love for den elektriske kraft

- Der er netop to typer elektrisk ladning, senere kaldt positiv og negativ.
- To punktladninger påvirker hinanden med modsatte kræfter, som går i retning af ladningernes forbindelseslinje og er omvendt proportionale med kvadratet på afstanden mellem dem.
- Kræfterne er desuden proportionale med produktet af de to ladninger og således, at to ladninger af samme type frastøder hinanden, mens ladninger af forskellig type tiltrækker hinanden.

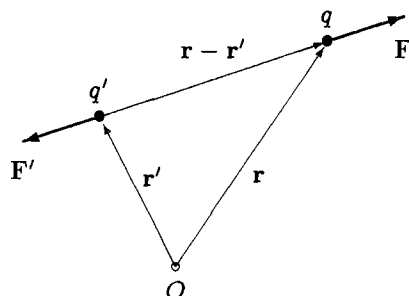
I nutidig vektornotation kan disse observationer sammenfattes i *Coulombs lov* (1785):

Coulombs lov

$$\mathbf{F} = k \frac{qq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.3)$$

Læg mærke til nomenklaturen, der er en slags standard, som vi anvender mange gange i resten af bogen. Som støtte for forståelsen illustrerer fig. 2.2 dens anvendelse i forbindelse med Coulombs lov.

Konstanten k skal vi siden vende tilbage til. Punktet O er nulpunkt for stedvektorer, som angiver ladningernes beliggenhed i rummet.



Figur 2.2: Kraftpåvirkningen mellem to ladede partikler.

Kilde- og måle-
ladninger

Vektoren $\mathbf{r}'$ angiver positionen af ladningen q' , som vi kan opfatte som *kilde* til kraften $\mathbf{F}$ på *måleladningen* q , hvis position er angivet ved stedvektoren $\mathbf{r}$. Vektoren $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ går fra kildepunktet $\mathbf{r}'$ til målepunktet $\mathbf{r}$. Den numeriske værdi $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ er således afstanden mellem de to ladninger. Vektoren

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.4)$$

er en *enhedsvektor* i retningen af $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, altså i retningen fra kilde til målepunkt. Vi vil ofte gøre brug af tricket i 2.4 for at skaffe os en enhedsvektor.

Med disse konventioner ses udtrykket 2.3 at være i overensstemmelse med Coulombs observationer, som de er sammenfattet ovenfor, når ladningerne regnes med fortegn.

Det er af hensyn til situationer, som vi møder i det følgende, at vi her har skelnet mellem *kildeladningen* q' og *måleladningen* q . Men i den aktuelle situation er der selvfølgelig ikke nogen principiel forskel på de to ladninger, og vi kunne lige så godt finde den kraft $\mathbf{F}'$, hvormed q påvirker q' . Vi bytter blot rundt på mærkede og umærkede størrelser i 2.3 og finder

$$\mathbf{F}' = k \frac{q'q}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = -\mathbf{F}. \quad (2.5)$$

Aktion =
reaktion

Loven om aktion og reaktion er således opfyldt for to partiklers vekselvirkning efter Coulombs lov.

Valg af
enhedssystem

Konstanten k har vi endnu ikke omtalt. Den afhænger af det enhedssystem, som benyttes. I denne bog anvendes overalt SI-enheder, hvor enhederne for henholdsvis længde, masse og tid er m, kg og s. Det tog mange år, før det stod fysikerne klart, at der i et rationelt målesystem er brug for at indføre en *særlig* elektrisk grund-enhed. I SI er denne enhed valgt som 1 A (ampere), fordi strømmålinger kan udføres med større nøjagtighed end måling af ladning. Med amperen defineret er enheden for ladning givet. Den bliver 1 As, altså 1 ampere-sekund, som kaldes 1 C (coulomb).

Når ladningsenheden er fastlagt, kan konstanten i Coulombs lov i princippet bestemmes ved måling af kraften mellem to kendte ladninger i en bestemt afstand. Selv om det ikke direkte er denne metode, som bruges, understreger den dog, at k er målelig.

For at få enkle udtryk for vigtige relationer inden for elektromagnetismen, her især Maxwells ligninger, har man valgt at skrive normaliseringskonstan-

ten k i 2.3 som

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (2.6)$$

Konstanten ϵ_0 optræder overalt i det følgende. Den kaldes *vacuum permittiviteten*. Værdierne og enhederne af de indførte konstanter er

ϵ_0 defineret

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9876 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}, \quad \epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1}\text{m}^{-2}\text{C}^2 (= \text{Fm}^{-1}). \quad (2.7)$$

Enheden F anvendt i 2.7 hedder farad og vil blive indført senere. Med disse vedtægter skrives Coulombs lov da på formen

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.8)$$

Nogen vil måske finde, at den her indførte nomenklatur er frygtelig besværlig. Ofte skrives Coulombs lov jo på en simplere form som

Kunne det gøres enklere?

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{eller} \quad \mathbf{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (2.9)$$

hvor r er afstanden fra q' til q . Disse udtryk svarer til 2.8 med $\mathbf{r}' = 0$ altså, at nulpunktet ligger i q' . I det følgende skal vi af og til benytte dette til at forenkle skrivemåden, men i almindelighed er det bedre at anvende udtrykkene 2.8, fordi det dér tydeligt fremgår, at kraften gennem $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ afhænger af både kildepunktets beliggenhed $\mathbf{r}'$ og af målepunktets beliggenhed $\mathbf{r}$. Altså af 6 koordinater. I denne forbindelse skal man være opmærksom på, at den kompakte skrivemåde $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, som er hensigtsmæssig ved fremstilling i tekst, ved de fleste anvendelser må skrives ud i koordinater. I cartesiske koordinater (sml. fig. 2.2) gælder således

Beregning i koordinater

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \quad (2.10)$$

mens der i polære koordinater med O som centrum gælder

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi}, \quad (2.11)$$

hvor φ er vinklen mellem $\mathbf{r}$ og $\mathbf{r}'$.

2.3 Det elektriske felt

Med Coulombs lov kan vi beregne kraften $\mathbf{F}$ på en enkelt punktladning q hidrørende fra én kildeladning q' . Er der flere punktformige kildeladninger, q'_i , $i = 1, 2, \dots, N$, vil kraften på måleladningen q være *vektorsummen* af de N individuelle kræfter beregnet efter 2.8, altså

Kraften er vektorsummen

$$\mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3} q'_i. \quad (2.12)$$

Ligning 2.12 er ingen selvfølge. Man siger, at kræfterne superponerer.

Kraften er alene en funktion af målepunktets beliggenhed $\mathbf{r}$, da kildepunkternes beliggenheder $\mathbf{r}'_i$ er givne.

Synspunktet bag Coulombs lov kan siges at være, at ladningerne påvirker hinanden gennem en *fjernvirkning*. Vi skal nu tage det første skridt mod en elektrisk feltteori ved at opfatte sagen sådan, at de N ladninger tilsammen skaber et *felt* i rummet. Det er da dette felt, som påvirker måleladningen. Man må tænke sig, at feltet eksisterer helt uafhængigt af, om måleladningen er tilstede eller ej. Feltet er en tilstand, som rummet befinder sig i, og kraften på måleladningen bliver en *lokal* vekselvirkning mellem denne og feltet. Altså en *nærvirkning*.

Vi kan beskrive tilstanden i punktet $\mathbf{r}$ ved kraften $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ per ladning. For at udelukke, at måleladningens tilstedeværelse forstyrrer kildeladningerne, kan vi tænke os måleladningen q meget lille og feltet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ bestemt ved grænseværdien

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_q(\mathbf{r})}{q}. \quad (2.13)$$

Vektorfeltet $\mathbf{E}$ kaldes den *elektriske feltstyrke* og er ét af de fire fundamentale elektromagnetiske felter, som beskrives ved Maxwells ligninger (se 1.1 og 1.3). Efter 2.13 bliver enheden for elektrisk feltstyrke 1 NC^{-1} , der dog mere hensigtsmæssigt angives som 1 Vm^{-1} (volt per m, se afsnit 2.4).

Feltstyrken fra en isoleret punktladning q' bliver efter 2.8

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.14)$$

For feltet fra N punktladninger finder vi efter 2.12

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3} q'_i. \quad (2.15)$$

Feltsynspunktet understreges af, at $\mathbf{E}$ er en *funktion* af $\mathbf{r}$. Kildekoordinaterne forsvinder som variable ved summationen over dem i 2.15.

Vi kan udvide disse betragtninger til også at gælde det felt, som skabes af kontinuerte ladningsfordelinger, som defineret ved 2.1. Summationen i 2.15 kan da ved en passende grænseovergang erstattes med integration. For en volumenladningstæthed gælder således, med $q'_i = \rho(\mathbf{r}') dv'$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv'. \quad (2.16)$$

Har man såvel punktladninger som volumen-, flade- og linie-ladningstætheder tilstede, bliver feltstyrken en sum af bidragene fra disse fordelinger:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3} q'_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \lambda(\mathbf{r}') dl'. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Feltteori er
nærvirknings-
teori

Felt fra
punktladninger

Felt fra
kontinuerte
fordelinger

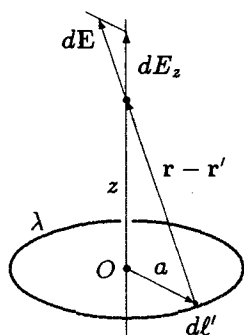
Dette formidable udtryk er meget generelt. Ved de fleste anvendelser behøver man dog ikke mere end et eller to led. Ligeledes kan man i mange tilfælde behandle overflade- og linietætheder som grænsetilfælde af en volumetæthed. Man kan da alene klare sig med integralet 2.16.

Vi bemærker, at integranden i 2.16 er singulær for $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Det hindrer dog ikke, at man *beregner* feltstyrken i et punkt inde i ladningsfordelingen, da funktionen $\rho(\mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2$ er integrabel for endelig ladningstæthed ρ . Det er *fortolkningen* af det beregnede $\mathbf{E}$, der er vanskeligheder med, da selv en nok så lille prøveladning voldsomt vil forstyrre feltet, og dermed ladningsfordelingen, i sin umiddelbare nærhed.

▷ Ringladning: I nogle få tilfælde er det muligt på enkel måde at beregne feltstyrker ved hjælp af 2.17. Som eksempel skal vi finde feltet på akse af en tynd ring, der bærer den jævnt fordelte ladningstæthed λ (fig. 2.3). Vi

Det samlede felt

Feltet fra en ringladning



Figur 2.3: Feltstyrken på akse af en homogen ringladning.

kan her anvende det sidste led i 2.17, som vil give tre komponenter af $\mathbf{E}$. Symmetrien i problemet bevirker dog, at kun $E_z \neq 0$. Med de på figuren angivne betegnelser foretager vi følgende identifikationer:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}, \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_z = z, \quad \oint dl' = 2\pi a, \quad (2.18)$$

hvorpå feltstyrken kan beregnes

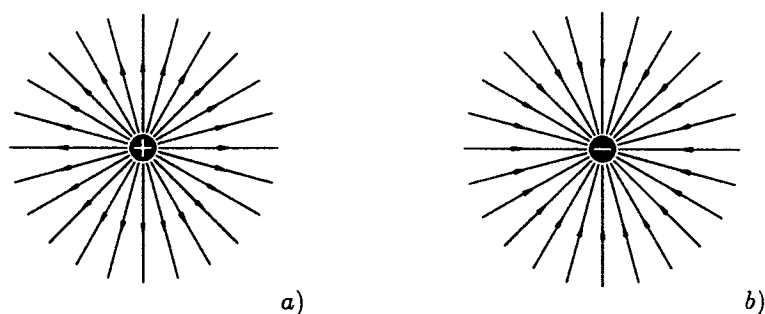
$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \lambda dl' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{z dl'}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \oint dl' = \frac{\lambda a z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Feltet skifter fortegn, når ringen passerer. Det går mod nul som feltet fra en punktladning $2\pi\lambda a$ i store afstande $z \ll$

▷ Feltlinier: Man kan meget slående anskueliggøre det elektriske felt i og omkring en ladningsfordeling. Dette sker med *feltlinier*, et begreb indført af Faraday. Feltlinierne er kurver, som i ethvert punkt har feltvektoren $\mathbf{E}$ som tangent. Som vi siden skal vise, løber de med en tæthed, der er proportional med feltets styrke. Som følge af tangentbetingelsen vil et element $d\mathbf{r}$ af feltlinien gennem punktet $\mathbf{r}$ være parallelt med feltvektoren i samme punkt. Vi kan udtrykke dette ved differentiaalligningerne

Feltet kan tegnes

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (2.20)$$

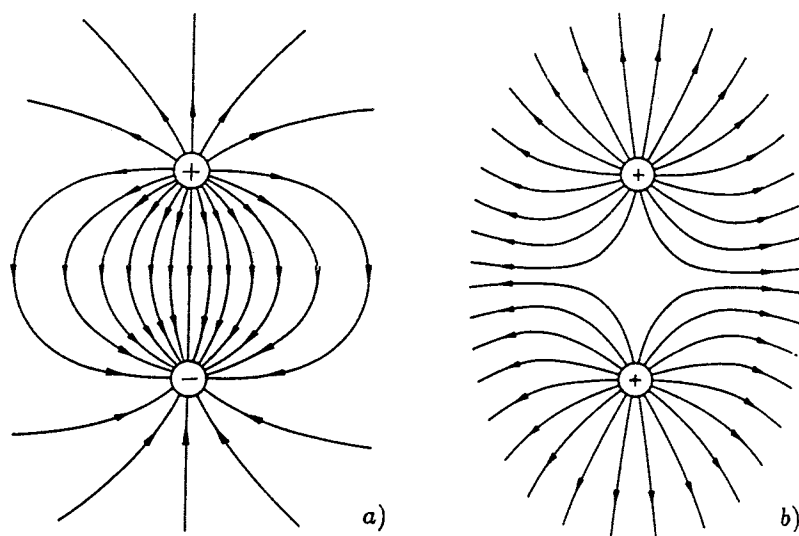


Figur 2.4: a) Det elektrostatiske felt omkring en positiv punktladning. Feltlinierne udgår radialt fra ladningen. b) Det elektrostatiske felt omkring en negativ punktladning. Her løber feltlinierne ind mod ladningen.

Indføres buelængden s målt langs feltlinien, kan vi i stedet for 2.20 skrive

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{E}, \quad (2.21)$$

som udtrykker, at enhedsvektorerne $d\mathbf{r}/ds$ og $\mathbf{E}/E$ er identiske.



Figur 2.5: Det elektrostatiske felt omkring to ens og to modsatte punktladninger. I tilfælde a) ender alle feltlinier fra den positive ladning på den negative. I tilfælde b) ender feltlinierne på negative ladninger i det uendelig fjerne.

*Ens punkt-
ladninger*

Som eksempel viser fig. 2.5 udseendet af feltet omkring to numerisk lige store punktladninger med henholdsvis modsatte og samme fortegn. Man ser, at feltlinierne stråler radialt ud fra eller ind mod punktladningerne og altså begynder eller ender der. Vi skal senere generelt vise, at feltlinierne er kontinuerte kurver, som kun kan ende eller begynde på ladninger. Ved forskellige lejligheder skal vi vende tilbage til felterne på fig. 2.5. ◁

2.4 Elektrisk potential

Det elektrostatiske felt har den vigtige egenskab, at det er *rotationsfrit*. Vi kan vise dette ved at beregne rotationen af udtrykket 2.16 for feltstyrken fra en volumenladningstæthed. Resultatet kan umiddelbart generaliseres til at omfatte det komplette udtryk 2.17.

Vi beregner $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$, altså rotationen i målepunktet. Fra 2.16 får vi

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') dv' \nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (2.22)$$

idet vi, som tilladt for kontinuerte funktioner med kontinuerte afledede, har differentieret efter $\mathbf{r}$ under integraltegnet. For at beregne integranden må vi altså udregne

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.23)$$

Vi følger her samme procedure som ved udledningen af A.43, idet vi benytter betegnelserne $\mathbf{R} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ og $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$:

$$\nabla \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{R^3} \nabla \times \mathbf{R} + \frac{-3\mathbf{R}}{R^5} \times \mathbf{R}. \quad (2.24)$$

Hvis målepunktet ikke falder i noget kildepunkt, altså hvis $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, giver 2.24 umiddelbart nul, da $\nabla \times \mathbf{R} = 0$ og $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = 0$. Hvis målepunktet derimod er sammenfaldende med et kildepunkt er udtrykket 2.24 ubestemt. Feltets rotation er dog nul også i kildepunktet. Vi kan indse dette ved at lægge en lille 'Stokes' cirkel med centrum i kildepunktet. Cirkulationen langs enhver cirkel af denne type er nul, da feltet $\mathbf{R}/R^3$ er radiale. Enhver komponent af rotationen er da også nul efter relationen A.28. Volumenintegralet i 2.22 forsvinder derfor overalt. Vi har dermed vist den vigtige relation

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0.} \quad (2.25)$$

Ved hjælp af Stokes sætning A.27 kan rotationsfriheden af feltet også udtrykkes på integral form

$$\boxed{\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0,} \quad (2.26)$$

altså, at cirkulation af det elektriske felt langs enhver lukket kurve er nul. Ligningerne 2.25 og 2.26 gælder *kun* i elektrostatiske. De er de statiske former af den 3. Maxwell ligning, som vi formulerer dynamisk under emnet induktion.

Da $\mathbf{E}$ -feltet er rotationsfrit kan det skrives som gradienten af et skalarfelt. Efter konvention skriver man gradienten med et minus:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}),} \quad (2.27)$$

hvor φ da kaldes det *elektriske potential* eller *skalarpotential*.

$\mathbf{E}$ -feltet er
rotationsfrit

Rotationen
er nul

Cirkulationen
er nul

$\mathbf{E}$ -feltet er et
gradientfelt

Vi søger nu potentialet $\varphi(\mathbf{r})$ udtrykt ved feltets kilder, som er ladningsfordelinger af de forskellige typer, vi har omtalt i afsnit 2.1. Her noterer vi først, at der gælder

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.28)$$

Dermed kan feltet 2.14 fra en isoleret punktladning skrives

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.29)$$

Potential fra
punktladning

Sammenligning med 2.27 viser, at det elektrostatiske potential fra en punktladning er

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.30)$$

Potential fra
volumenladning

Tilsvarende finder vi for feltet 2.16 fra en volumenladning

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') dv'. \quad (2.31)$$

I det sidste integral ombytter vi differentiation og integration. Dvs. at $-\nabla$ flyttes uden for integraltegnet. Vi ser da, at potentialet fra volumenladningen bliver

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (2.32)$$

Potential fra
generel ladningsfordeling

For det generelle tilfælde med såvel punktladninger som volumen-, flade- og linjeladninger bliver potentialet en sum af bidragene fra disse fordelinger:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl'. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Anvendes udtrykkene 2.30, 2.32 eller 2.33 på rumligt begrænsede ladningsfordelinger (dvs. fordelinger hvor $r' < L$, idet L er en fast længde) ses potentialerne at blive nul i det uendelig fjerne, dvs. for $r \rightarrow \infty$. Af potentialet forlanges efter 2.27 blot, at dets gradient er nul. Så til φ kan vi altid addere en arbitrær konstant. Denne bestemmes ved at fastlægge potentialet i et bestemt punkt, referencepunktet. Ofte, men ikke altid, vælges et 'uendelig' fjernt referencepunkt, som gives potentialet nul. Dette er tilfældet med potentialerne givet ovenfor. Men vi har frihed til at vælge andre referencepunkter med andre potentialer. Betegnes referencepunktet med 'ref' kan vi ud fra feltstyrken beregne potentialet i et vilkårligt punkt $\mathbf{r}$. Ved integration af 2.27 langs en vilkårlig kurve fra $\mathbf{r}$ til ref finder vi nemlig

$$\int_{\mathbf{r}}^{\text{ref}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}}^{\text{ref}} \nabla \varphi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \nabla \varphi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} d\varphi = \varphi(\mathbf{r}) - \varphi_{\text{ref}}, \quad (2.34)$$

Potentialet
fastlægges

hvor vi, jvf. A.20, har udnyttet, at $\nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}$ er et totalt differential. Vi kan formulere indholdet af 2.34 i følgende regel:

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{ref}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \varphi_{\mathbf{ref}},} \quad (2.35)$$

som selvfølgelig er særlig enkel, hvis referencepotentialet er nul. Vi skal siden under Gauss' lov se, at feltstyrken ofte kan bestemmes på simpel vis. I så fald er 2.35 særdeles nyttig til beregning af potentialet.

Det med 2.27 indførte elektriske potential er nært knyttet til den potentielle energi. Lad os tænke på en punktladning q , som vi flytter fra referencepunktet med potentialet nul til et punkt $\mathbf{r}$ med potentialet $\varphi(\mathbf{r})$. Punktladningens potentielle energi U kan vi beregne som det arbejde W , vi med en ydre kraft $\mathbf{F}$ må udføre mod feltekraften $q\mathbf{E}$ ved ladningens flytning fra ref til $\mathbf{r}$:

$$U = W = \int_{\mathbf{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -q \int_{\mathbf{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = q \int_{\mathbf{ref}}^{\mathbf{r}} \nabla\varphi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = q \int_{\mathbf{ref}}^{\mathbf{r}} d\varphi = q\varphi(\mathbf{r}). \quad (2.36)$$

Den potentielle energi er altså simpelthen ladningen gange det elektriske potential. Potentialet selv udtrykker et arbejde per ladning. Hermed er også enheden for potential givet. Den bliver 1 JC^{-1} , som kaldes 1 volt efter *Alessandro G. Volta* (1745-1827) $\square$.

Man omtaler ofte potentialforskelle som *elektriske spændinger*. Potentialforskellen V_{ab} mellem to punkter a og b bliver

$$V_{ab} = \int_a^b \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_a^b \nabla\varphi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \varphi(a) - \varphi(b). \quad (2.37)$$

Potentialforskellen er feltets arbejde per enhedsladning, som føres fra a til b . Dette arbejde er, som det fremgår af 2.37 eller 2.26, uafhængigt af vejen. Det elektriske felt er *konservativt*.

Man kan danne sig et billede af det elektrostatiske felt ved at tænke på niveaufladerne for skalarfunktionen $\varphi(\mathbf{r})$. Til ethvert punkt P i rummet hører der én sådan flade, som består af alle punkter, der har samme potential som P . Niveaufladerne kaldes derfor *ekvipotentialflader*. Ekvipotentialfladen gennem P er bestemt ved

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(P). \quad (2.38)$$

Da gradienten i ethvert punkt er normal til niveaufladen (se A.19) er feltstyrken overalt vinkelret på ekvipotentialfladen. De i afsnit 2.3 nævnte feltlinier skal altså tegnes vinkelret på ekvipotentialfladerne.

Potentialbegrebet spiller en meget stor rolle inden for den elektromagnetiske teori. Potentialet er et skalarfelt og som sådan meget enklere at arbejde med end vektorfeltet $\mathbf{E}$. Man bemærker også, at integralet 2.32 er simple end hvert af de tre integraler, som skjuler sig i udtrykket 2.16. Potentialer er dog ikke blot teoretiske abstraktioner. De er fysiske realiteter hvilket enhver, der har fået et elektrisk stød, meget vel har erfaret.

Potential og
potentiell
energi

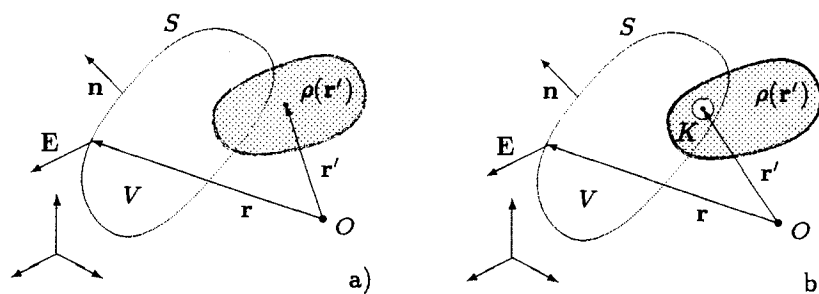
Enheden volt

Ekvipotential-
flader

2.5 Gauss' lov

Coulombs lov
 $\Rightarrow$ Gauss' lov

Udtrykket 2.16 for feltstyrken fra en ladningsfordeling stammer, som det fremgår af forrige afsnit, direkte fra Coulombs lov. Vi skal nu ud fra dette udtryk udlede en vigtig lov for den udadrettede strøm af vektorfeltet $\mathbf{E}$ gennem en lukket flade. Vi skal kalde denne *fysiske* lov for *Gauss' lov*, til forskel fra *Gauss' sætning* (divergensteoremet, A.23), som er et *matematisk* udsagn. Med denne skelnen vil det nedenfor fremgå, at vi når frem til Gauss' lov ved brug af Gauss' sætning. Vi vil udlede loven for en volumenladningstæthed



Figur 2.6: Udedning af Gauss' lov.

$\rho(\mathbf{r}')$, hvor feltstyrken $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ i et vilkårligt punkt $\mathbf{r}$ i rummet er givet ved 2.16. Lad S være en lukket flade i rummet (fig. 2.6) med vilkårlig form og beliggenhed. En sådan *Gauss-flade* kan ligge helt uden for området med ladninger, eller den kan helt eller delvis omslutte $\rho(\mathbf{r}')$.

Vi beregner nu strømmen af vektorfeltet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ gennem fladen S

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\mathbf{a} \cdot \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') dv' \oint_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

I det sidste udtryk har vi ombyttet integrationsordenen, hvilket er tilladt for skikkelige funktioner og grænser. Desuden er $\rho(\mathbf{r}')$ trukket uden for fladeintegralet, som er en integration over $\mathbf{r}$, mens ρ kun afhænger af $\mathbf{r}'$.

Problemet er nu at udregne fladeintegralet, som jo bliver en funktion af $\mathbf{r}'$. Vi ser først på det tilfælde, hvor kildepunktet $\mathbf{r}'$ ligger *uden* for S (se fig. 2.6a.). Fladeintegralet kan ved hjælp af Gauss' sætning omformes til et volumenintegral over feltets divergens, som vi finder af tabel A2:7

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi,$$

idet $\varphi = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ og $\mathbf{F} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Da $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \neq 0$ finder man, som også vist i A.42, at

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \left(-\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Strøm af $\mathbf{E}$
gennem flade

Kilde uden for
flade

For et kildepunkt uden for S følger da umiddelbart af Gauss' sætning, at

$$\oint_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv = 0, \quad (2.41)$$

hvor V er det af S omsluttende volumen.

Hvis kildepunktet ligger *inden* for S gælder dette udtryk ikke, da volumenintegranden divergerer for $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 0$. Men udkærer vi en lille kugle K med radius R omkring kildepunktet, ligger dette uden for området mellem K og S . Her kan vi da igen anvende Gauss' sætning:

Kilde inden for flade

$$\oint_{S+S_K} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{a} = \int_{V-K} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv = 0. \quad (2.42)$$

Her er arealvektoren $d\mathbf{a}$ overalt udadrettet, dvs. at den peger ind i kuglen med overfladen S_K , men ud af S . Skiftes der normalretning på kuglefladen, så $d\mathbf{a}$ peger ud af kuglen, finder vi af 2.42

$$\oint_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{S_K} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi R^2 \frac{1}{R^2} = 4\pi, \quad (2.43)$$

idet fladeintegralet over S_K er udregnet direkte. For fladeintegralet over S i 2.39 har vi altså fundet

$$\oint_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{a} = \begin{cases} 0 & \mathbf{r}' \text{ uden for } S \\ 4\pi & \mathbf{r}' \text{ inden for } S. \end{cases} \quad (2.44)$$

Indsættes 2.44 i sidste udtryk i 2.39 finder vi

Gauss' lov udledt

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') dv' = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (2.45)$$

hvor V stadig angiver det volumen, som omslutes af fladen S . Størrelsen

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}') dv' \quad (2.46)$$

er den samlede ladning, som omslutes af S .

Ligningen 2.45 er *Gauss' lov*. Om den har man sagt, at elektrostatik er Gauss' lov – og så resten. Udtrykt i ord siger Gauss' lov, at *den udadrettede strøm af den elektriske feltstyrke gennem en lukket flade er lig den samlede ladning inden for fladen divideret med ϵ_0* .

Gauss' lov i ord

Gauss' lov, som givet i 2.45, siges at være på *integral* form. Den udtaler sig om forholdene i et område, og har, som vi skal se i de næste afsnit, mange væsentlige anvendelser. Vi kan imidlertid også udtrykke Gauss' lov på en *differentiel* form, som er betydningsfuld i andre sammenhænge.

Hertil benytter vi Gauss' sætning (divergensteoremet) på vektorfeltet $\mathbf{E}$. Er S igen en lukket flade, som indeslutter volumenet V , gælder den rent matematiske relation

Gauss' lov omformes

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv. \quad (2.47)$$

Overfladeintegralet er imidlertid ved Gauss' lov 2.45 fysisk knyttet til ladningsfordelingen. Indføres dette i 2.47, finder vi

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') dv'. \quad (2.48)$$

De to volumenintegraler i 2.48 går begge over det volumen V , som indesluttet af S . Her er det selvfølgelig uden betydning om integrationsvariablen kaldes $\mathbf{r}$ eller $\mathbf{r}'$. Vi skriver derfor den sidste relation i 2.48 som

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dv. \quad (2.49)$$

Denne relation skal være opfyldt for ethvert delvolumen af V . Vi kan vælge et delvolumen så lille, at integranderne på hver side i 2.49 varierer vilkårlig lidt. Heraf slutter vi, at

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}}. \quad (2.50)$$

*Gauss' lov $\Rightarrow$
1. Maxwell
ligning*

Dette er Gauss' lov på differentiell form, som er identisk med den 1. Maxwell ligning i vacuum. Den får i kapitel 3 sin endelige formulering, som er gyldig, også når der er isolatorer tilstede.

2.6 Ledere

*Materialer
ændrer feltet*

De foregående afsnit har vedrørt ladninger og ladningsfordelinger, som befandt sig i vacuum og som var i hvile. Betragtningerne dér tjente først og fremmest til at indføre grundlæggende begreber som feltstyrke og potential. Desuden kan man sige, at i en passende atomar grænse har man kun felter i vacuum. Men i praksis møder man oftest elektrostatiske fænomener i makroskopisk skala, hvor der er stof tilstede i form af forskellige materialer. Disse materialer påvirker i væsentlig grad de elektriske felter. For at behandle sådanne fænomener er det i elektrostatiken tilstrækkeligt at skelne mellem to typer af materialer: Ledere og isolatorer.

*Ledere har
frie elektroner*

I en *leder*, typisk et metal, findes der frit bevægelige elektroner, som påvirkes af ydre felter. I metallernes atomer er de yderste elektroner så løst bundne, at de frit kan bevæge sig rundt i metalgitteret i en termisk bevægelse. Disse elektroner kaldes *ledningselektroner*. Et ydre elektrisk felt påvirker ledningselektronernes bevægelse således, at der bliver en samlet *drift* af elektroner modsat feltretningen. Det er denne drift af elektroner, som udgør *den elektriske strøm*. Bemærk, at den elektriske strøms retning per definition er bevægelsesretningen for en *positiv* ladning, altså feltretningen. I en leder er strømretningen derfor modsat bevægelsesretningen for elektronerne.

*Isolatorer har
bundne
elektroner*

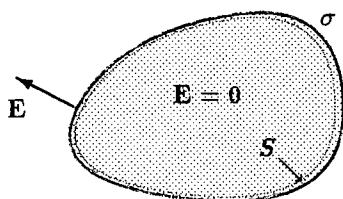
I den anden gruppe af materialer, *isolatorerne*, er elektronerne fastere bundet til deres atomer eller molekyler. Elektronerne kan af et ydre felt nok forskydes en smule i forhold til deres uforstyrrede middelpositioner, men de forlader ikke deres molekyle, og der bliver ingen strøm. Vi skal senere under emnet *dielektrika* i kapitel 3 vende tilbage til isolatorernes elektriske egenskaber.

Den elektriske strøm i en leder kan vedblive, så længe en ydre energikilde opretholder det elektriske felt. Er en leder overladt til sig selv, vil strømmen ikke kunne fortsætte, da der er et energitab forbundet med elektronbevægelsen i ledende materialer. I slutsituationen, som normalt nås inden for meget kort tid (se *relaxationstid*), har ladningerne fordelt sig sådan, at der ikke virker kræfter på nogen af dem. Ladningerne er derfor i hvile, og der er ingen elektriske strømme. Det er denne *statiske* situation, som er elektrostatikens emne.

Da elektronerne kan bevæges af selv det svageste felt, og da der altid er masser af ledningselektroner tilstede, ser man, at fraværet af strømme betyder, at *i den statiske situation er det elektriske felt nul i det indre af en leder*. Af $E = 0$ sammen med $E = -\nabla\varphi$ følger igen, at potentialet er konstant overalt i lederen. *En leder er et ekvipotentielt område af rummet*. Lederens overflade er således en ekvipotentialflade, og feltstyrken ved overfladen må være normal til denne (se fig. 2.7).

Det er en interessant følge af det elektriske felts forsvinden i det indre af en leder og af Gauss' lov, at *nettoladningen på en leder sidder på dens overflade*. Vi kan lægge Gauss-flader inden i lederen fuldstændig vilkårligt

Feltet i en leder er nul



Figur 2.7: En Gauss-flade lagt lige under en leders overflade viser, at den elektriske ladning sidder på overfladen. Den elektriske feltstyrke er vinkelret på overfladen, som er en ekvipotentialflade.

(se fig. 2.7). Da feltstyrken overalt er nul, fortæller Gauss' lov, at ingen af fladerne indeslutter nogen ladning. Vi kan lægge en Gauss-flade S så tæt op mod lederens inderflade, som vi vil, og finder stadig, at den indesluttende ladning er nul. Så hvis lederen *har* en ladning, kan denne kun sidde på overfladen.

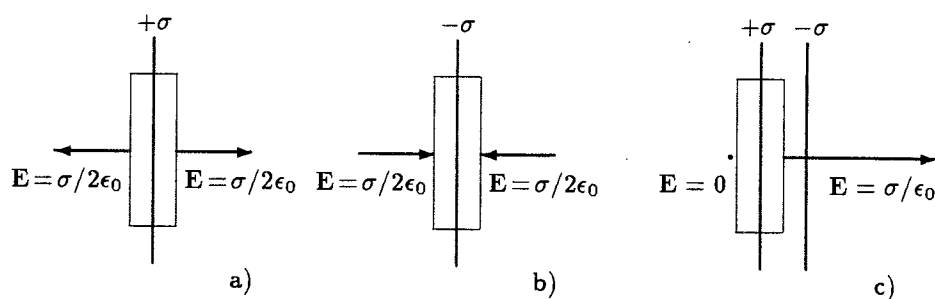
En leders ladning sidder på dens overflade

Før vi fortsætter behandlingen af feltforholdene nær en leders overflade, kan det være hensigtsmæssigt at indskyde nogle bemærkninger om feltet fra tynde lag af elektrisk ladning. Vi får her lejlighed til at se nogle typiske anvendelser af Gauss' lov.

Lad os forestille os en plan med et meget tyndt lag af elektrisk ladning, eksempelvis et ladet plasticfolie (fig. 2.8 a,b). Ladningen har den jævnt fordelte tæthed σ . Symmetrien i problemet peger på, at feltstyrken overalt er vinkelret på planen og, for en positiv ladning, rettet bort fra denne. Vi omgiver nu et stykke af planen med en 'Gauss' pilledåse', som vist på fig. 2.9 a. Har dåsens top og bund hver arealet ΔS , bliver den udadrettede strøm af E -feltet $2E\Delta S$. Dåsens cylindriske væg bidrager ikke, da den er parallel med feltet. Den indesluttende ladning er $\sigma\Delta S$, så efter Gauss' lov 2.45 er $2E\Delta S = \sigma\Delta S/\epsilon_0$. Feltstyrken uden for enkeltlaget bliver derfor

Elektrisk enkeltlag

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2.51)$$



Figur 2.8: En 'Gauss pillådase' anvendt til bestemmelse af den elektriske feltstyrke ved a) og b) et enkeltlag og ved c) et dobbeltlag af elektrisk ladning.

Dobbeltlag

Vi betragter dernæst et *elektrisk dobbeltlag*, som består af to parallelle planer med lige store, men modsatte ladninger (fig. 2.8c). Her skal vi addere felterne, som i området uden for de to planer er modsat rettede og derfor adderer til nul. I området mellem de to planer adderer feltstyrkerne til σ/ϵ_0 . Med de på figuren viste dåser verificerer man let, at dette er i overensstemmelse med Gauss' lov.

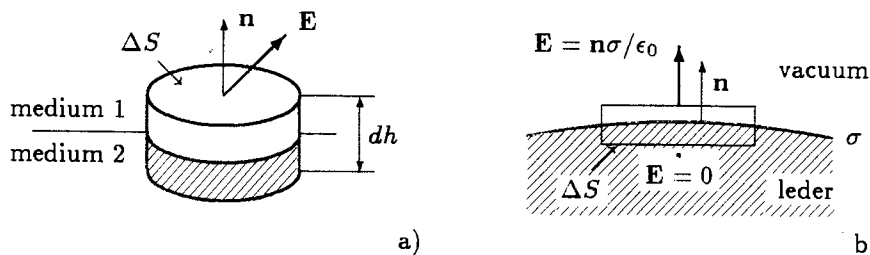
Feltstyrken ved en leders overflade

Vi vender nu tilbage til lederen, hvor vi fandt, at der ikke er nogen feltstyrke i dens indre. Derimod er der lige uden for dens overflade en feltstyrke, som igen kan findes af Gauss' lov, se fig. 2.9b. Vi omgiver et lille stykke af lederens overflade med en Gauss-dåse. Dåsen er halvt nedsunken i lederen, sådan at dens låg er i vacuum, dens bund i lederen. Feltstyrken E på låget, dvs. lige uden for lederen, er, som vi har set, normal til lederoverfladen. Feltstyrken på bunden, inde i lederen, er nul. Har lederens overflade ladningstæthed σ og dåsens top og bund hver arealet ΔS , bliver den indsluttede ladning $\sigma\Delta S$, og Gauss' lov giver $E\Delta S = \sigma\Delta S/\epsilon_0$. Det elektriske felt lige uden for overfladen bliver derfor

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.52)$$

Lige uden for overfladen er feltstyrken σ/ϵ_0 . Lige inden for er den 0. Der er imidlertid også en feltstyrke lige i lederens overfladen, nemlig

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (2.53)$$



Figur 2.9: a) En 'Gauss pillådase' er en flad cylinder lagt i skillefladen mellem to medier. b) Er medierne vacuum og en leder, viser pillådase-argumentet, at den elektriske feltstyrke lige uden for lederen er σ/ϵ_0 .

altså middelværdien af feltet lige uden for og lige inden for overfladen. Man kan argumentere for dette udtryk på forskellig måde. Her er én: Vi ser på et lille fladeelement ΔS af lederoverfladen med ladningstæthed σ . Feltstyrken lige uden for fladeelementet er givet ved 2.52. Den er sammensat af et bidrag E_e fra elementet selv og et bidrag E_a fra hele den øvrige leders overflade. Lige inden for overfladen er feltet nul. Det er sammensat af de samme bidrag som udenfor, men feltstyrken fra overfladeelementet har skiftet retning. Vi kan opstille følgende regnskab

$$\begin{array}{rcl} \text{lige udenfor :} & E_e + E_a & = \sigma/\epsilon_0 \\ \text{lige indenfor :} & -E_e + E_a & = 0 \\ \hline & 2E_a & = \sigma/\epsilon_0. \end{array} \quad (2.54)$$

Ladningen på fladeelementet selv påvirkes kun af feltstyrken fra de øvrige ladninger, som efter 2.54 bliver $\sigma/2\epsilon_0$. Feltstyrken påvirker fladeelementet ΔS med en kraft

$$F_s = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Delta S, \quad (2.55)$$

som vi senere også skal finde ved en energibetragtning.

*Feltstyrken
i en leders
overflade*

*Kraft på leders
overflade*

2.7 Elektriske felter bestemt ved Gauss' lov

Gauss' lov på integral form 2.45 kan, som vi så det i forrige afsnit, i mange tilfælde anvendes til at bestemme det elektriske felt omkring ladningsfordelinger, som besidder en vis symmetri. Vi skal i dette afsnit se nogle yderligere eksempler herpå.

Metoden, som anvendes, er i alle tilfælde den samme: Man omgiver ladningsfordelingen med en passende lukket *Gauss-flade* valgt sådan, at feltets normalkomponent på hele fladen eller på stykker deraf har samme værdi. Feltstyrken kan da sættes uden for fladeintegralet i 2.45 og kan straks beregnes ud fra Gauss-fladens eller stykkernes areal og den samlede ladning, fladen omslutter.

▷ Feltet fra en punktladning: Af symmetri Grunde må E -feltet være radialt og kan kun afhænge af afstanden til punktladningen. Som Gauss-flade vælges en kugleflade med radius r , hvorefter 2.45 giver:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (2.56)$$

altså

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{eller} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.57)$$

Vi har hermed vist, at Coulombs lov kan genudledes fra Gauss' lov. Der er således fuld ekvivalens mellem de to love. ◁

▷ Sfæriske ladningsfordelinger: I en sfærisk ladningsfordeling afhænger ladningstætheden kun af afstanden r' fra centrum og er altså af formen $\rho(r')$, ikke $\rho(\mathbf{r}')$. Feltstyrken må som før være radial og kun afhænge af afstanden r

*Metode ved
feltbestemmelse*

Punktladning

*Sfæriske
fordelinger*

fra fordelings centrum. Som Gauss-flade vælges igen en kugle med radius r svarende til den afstand, hvori feltstyrken ønskes bestemt. Vi finder da af 2.46

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{r' \leq r} \rho(r') dv', \quad (2.58)$$

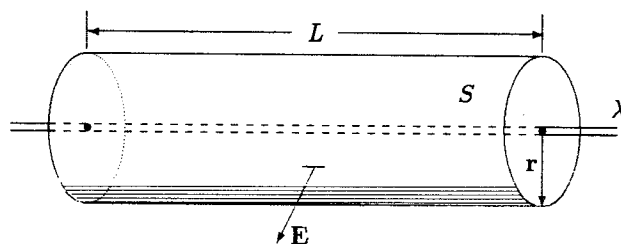
hvoraf

$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.59)$$

Integralet over ladningstætheden omfatter kun den del deraf, som ligger inden for Gauss-fladen. Ligger noget af ladningsfordelingen uden for Gauss-fladen, vil den samlede ladning inden for fladen afhænge af r , som angivet med betegnelsen $Q(r)$ i 2.59. Vi bemærker, at feltstyrken kun afhænger af den samlede ladning inden for fladen og er identisk med feltstyrken fra en punktladning $Q(r)$ anbragt i centrum. Ladning uden for Gauss-fladen er uden betydning for feltstyrken på denne så længe, at den sfæriske symmetri er bevaret. Det understreges, at dette ikke er tilfældet for potentialet, idet man der, som det fremgår af 2.35, kan komme ud for at integrere sig gennem dele af feltet, som er påvirket af ladninger uden for Gauss-fladen. ◁

*Cylindriske
fordelinger*

▷ Cylindersymmetriske ladningsfordelinger. Som eksempel kan vi se på en lang linieladning, eksempelvis en ladet nylontråd med ladningstæthed λ .



Figur 2.10: Feltet om en linieladning kan bestemmes ved at omgive den med en cylindrisk Gauss-flade.

*Felt fra
linieladning*

Feltstyrken må være radial (vinkelret på lederen) og kun afhænge af den radiale afstand r fra linieladningen. Som Gauss-flade anvendes en coaxial cylinder med radius r og længde L , som vist på 2.10. Cylinderens endeflader er parallelle med feltet og bidrager ikke til overfladeintegralet i 2.46, som giver

$$2\pi r L E(r) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}, \quad (2.60)$$

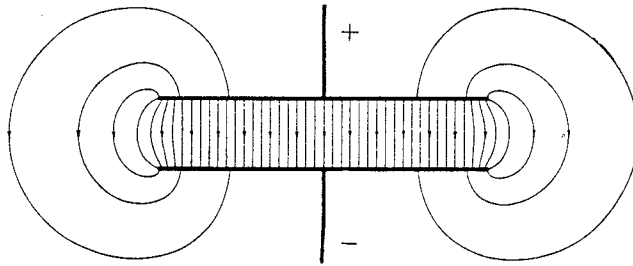
altså

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.61)$$

Dette E -felt kan beregnes direkte fra det sidste led i 2.17, men kun med noget besvær (se opgave 2.13). ◁

*Pladekon-
densator*

▷ Pladekondensator: I det følgende får vi mange gange brug for at illustrere nye begreber ved at anvende dem på simple felter. Hertil er en *pladekondensator* meget velegnet. Den består af to udstrakte, parallelle metalplader



Figur 2.11: Pladekondensator. Feltet mellem to udstrakte metalplader kan med god tilnærmelse betragtes som homogent.

med afstand d og areal A . Pladerne gives lige store, men modsatte ladninger $\pm Q$, eller der opretholdes en bestemt spændingsforskel V mellem dem, ofte med den ene plade jordforbundet. Er pladeafstanden meget mindre end kondensatorens øvrige dimensioner og afstandene til omgivelserne, kan feltet mellem pladerne opfattes som homogent.

Feltstyrken må af symmetrigrunde være homogen og vinkelret på pladerne. Kun langs pladekanterne er der afvigelser, idet feltet her strækker sig omkring en pladeafstand ud over pladekanten og er inhomogent, se fig. 2.11. I det følgende er vi som regel kun interesseret i det homogene felt.

Homogent felt

Ladningerne $\pm Q$ vil arrangere sig med homogene ladningstætheder $\pm\sigma = \pm Q/A$ på de pladesider, som vender mod hinanden. Der kan ikke være nogen ladning på pladernes ydersider. Det kan indses ved på ydersiden at lægge en Gauss-dåse med bunden nedsænket i metalpladen. En eventuel ladning på ydersiden ville give samme strøm af E -felt gennem dåsens låg, uanset dens højde. Hele rummet måtte således være fyldt med felt som følge af kondensatoren, hvilket blandt andet af energimæssige grunde, er urimeligt.

Kun ladning på indersiden

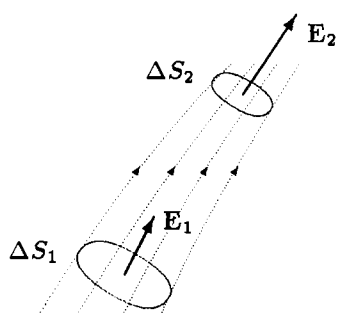
Vi kan da opfatte ladningsfordelingen i kondensatoren som et elektrisk dobbeltlag. Efter 2.52 er feltstyrken i mellemrummet $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/A\epsilon_0$. I metalpladerne og uden for kondensatoren giver dobbeltlagsbetragtningen korrekt feltstyrken 0. Efter 2.55 bliver tiltrækningskraften mellem pladerne $F = A\sigma^2/2\epsilon_0 = Q^2/2A\epsilon_0$.

Felt i pladekondensator

▷ Feltlinierør: Gauss' lov giver os en yderligere forståelse af de feltlinier, vi indførte i afsnit 2.3. Lad os se på et *ladningsfrit* område af rummet (fig. 2.12). Vi kan tegne et tyndt rør, hvis frembringere er feltlinier, og hvor top og bund er stykker af ekvipotentialflader og derfor vinkelrette på feltlinierne. Bundens areal kaldes ΔS_1 og feltstyrken her E_1 . De tilsvarende størrelser for toppen kaldes ΔS_2 og E_2 . Det elektriske felt er overalt parallelt med rørets sider, og feltet har derfor ingen strøm gennem disse. Anvender vi Gauss' lov på røret, er det derfor kun endefladerne som bidrager til E -feltets strøm gennem overfladen. Med endefladernes normaler ensrettede med feltet finder vi for den samlede strøm af E -felt ind i det ladningstomme rør:

$$E_1\Delta S_1 - E_2\Delta S_2 = 0 \Rightarrow E_1\Delta S_1 = E_2\Delta S_2, \quad (2.62)$$

altså, at strømmen i feltretningen gennem de to endeflader er den samme.



Figur 2.12: En rørformet Gauss-flade med feltlinierne, som frembringere og endeflader, som er stykker af ekvipotentialflader. Der løber lige så mange feltlinier ind gennem den ene endeflade, som ud gennem den anden.

*Feltlinier
uden ende*

Tænker vi i stedet i feltlinier, må der komme lige så mange feltlinier ud af røret gennem ΔS_2 som ind gennem ΔS_1 . Hvis en feltlinie stoppede et sted i røret, ville det jo betyde en diskontinuitet i $\mathbf{E}$ -feltet. Vi kunne da omgive punktet med diskontinuiteten med en lille Gauss-flade, hvorigennem der ville være en indadrettet flux, som igen ville betyde, at fladen rummede en negativ ladning. Dette i modstrid med forudsætningen om rummets ladningsfrihed.

Vi slutter således, at feltlinierne fortsætter i uændret antal gennem røret. Betegner N_1 og N_2 feltlinietæthederne på de to endeflader, gælder altså

$$N_1 \Delta S_1 = N_2 \Delta S_2. \quad (2.63)$$

Af 2.62 sammen med 2.63 følger da

$$\frac{N_1}{E_1} = \frac{N_2}{E_2}. \quad (2.64)$$

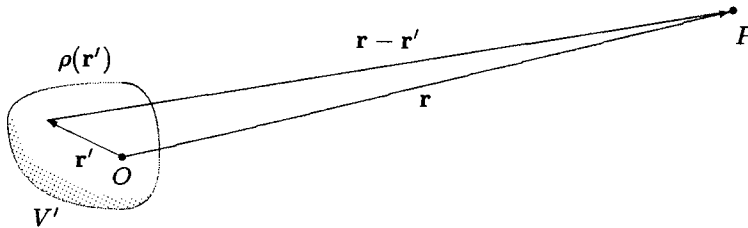
*Feltliniers
tæthed*

Den ofte gjorte forudsætning om, at feltlinierne tegnes med en tæthed proportional med feltstyrken, er således ikke en nødvendig ekstra betingelse, men en naturlig konsekvens af Gauss' lov. ◁

2.8 Elektriske multipolfelter

Man fornemmer næsten intuitivt, at i store afstande fra en begrænset ladningsfordeling vil potentialet nærme sig potentialet fra en punktladning lig med den totale ladning Q af fordelingen. Feltet har dog detaljer, som er væsentlige i mange fysisk betydningsfulde situationer. Vi skal i dette afsnit se, hvorledes man ved en såkaldt *multipoludvikling* kan approximere feltet fra en vilkårlig begrænset ladningsfordeling til i princippet enhver ønsket nøjagtighed.

Approximation af feltet



Figur 2.13: Det elektriske potential i store afstande fra en begrænset ladningsfordeling kan udtrykkes som en sum af potentialerne af elektriske multipoler af stigende orden.

Vi betragter situationen fig. 2.13. Vi lægger nulpunktet for stedvektorerne $\mathbf{r}$ og $\mathbf{r}'$ inde i ladningsfordelingen. Da denne er begrænset, kan den helt indesluttet i en kugle med radius a og med centrum i nulpunktet. For alle kildepunkter gælder således, at $r' < a$. Vi ønsker at approximere feltet i store afstande, dvs. for $r \gg a$.

Feltet på store afstande

Med dette for øje tager vi igen udgangspunkt i det eksakte udtryk 2.32:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (2.65)$$

hvor vi med binominalformlen udvikler $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ i en potensrække efter r'/r :

Rækkeudvikling af feltet

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left(1 + \left[-2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right] \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[-2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right] + \frac{3}{8} \left[-2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right]^2 + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})^2 - r'^2 r^2}{2r^5} + \dots \end{aligned} \quad (2.66)$$

Vi har her medtaget led indtil 2. orden i r'/r . Indføres dette i 2.65, kan vi flytte faktorer, som kun afhænger af r , uden for integraltegnene i den ledvise integration, da denne kun angår r' . Vi kan derfor skrive potentialet som:

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') dv' \\
& + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_{V'} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv' \\
& + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} \int_{V'} (3(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})^2 - r'^2 r^2) \rho(\mathbf{r}') dv' \\
& + \dots
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Aftagende led

Vi bemærker, at hvert af leddene i denne række er en faktor $\approx a/r \ll 1$ mindre end det forrige. Vi kan altså skrive potentialet som en sum af aftagende led

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r}) + \varphi_3(\mathbf{r}) + \dots \tag{2.68}$$

I rækkefølge kaldes disse felter, af årsager som senere bliver klarlagt, for monopol-, dipol-, quadrupol-, og octupolfeltet. Kaldes det løbende index λ , ser man, at de græske talbetegnelser svarer til 2^λ .

2.8.1 Monopolfeltet

Det første led i rækken 2.67

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') dv' \tag{2.69}$$

Monopol $\equiv$
punktladning

genkender vi som potentialet fra en punktladning lig fordelings samlede ladning

$$q = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') dv'. \tag{2.70}$$

Potentialet skrives da kompakt

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \tag{2.71}$$

Monopol-
potential $\sim 1/r$

Dette led i rækkeudviklingen 2.68 kaldes *monopolledet*. Man kan forestille sig en *elektrisk monopol* og feltet omkring den ved at tænke på en punktladning. Monopolledet aftager omvendt proportionalt med afstanden r til målepunktet og forekommer selvfølgelig kun, hvis fordelingen har en netto-ladning. Den til monopolledet svarende feltstyrke er selvsagt feltstyrken fra en punktladning jvf. 2.14.

2.8.2 Dipolfeltet

Det næste led i rækken 2.67 er

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_{V'} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv', \tag{2.72}$$

Dipolmoment
defineret

som afhænger af vektoren

$$\mathbf{p} = \int_{V'} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv', \tag{2.73}$$

der, jfr. massemomentet $\int r \rho_m dv$ i mekaniken, kaldes ladningsfordelingens *elektriske dipolmoment*, og det hertil svarende led i 2.68, *dipolledet*.

Dipolmomentet er et udtryk for en forskydning af positive og negative ladninger i forhold til hinanden. Den simpleste dipol, man kan forestille sig, består derfor af to punktladninger $\pm q$ anbragt i den (lille) vektorafstand ℓ . Dipolmomentet bliver da, når integrationen i 2.73 erstattes med en sum,

$$\mathbf{p} = -q\mathbf{r} + q(\mathbf{r} + \ell), \quad \text{dvs.} \quad \boxed{\mathbf{p} = q\ell.} \quad (2.74)$$

Den simpleste dipol

I ovenstående betragtninger har vi benyttet, at ladningsfordelingens udstrækning var lille i forhold til observationsafstanden. Ofte anvender man en abstraktion som, i analogi med en punktladning, kaldes en *punktdipol*. Vi kan forestille os de to ladninger $\pm q$ bragt nærmere og nærmere hinanden, men justeret således, at produktet $q\ell$ holdes konstant.

Punktdipol

For et system af punktladninger q_i med stedvektorer $\mathbf{r}_i$ beregnes dipolmomentet tilsvarende som en sum

$$\boxed{\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i.} \quad (2.75)$$

Efter 2.73 eller 2.75 vil en ladningssymmetrisk fordeling ikke have noget dipolmoment.

Ved hjælp af dipolmomentet $\mathbf{p}$ kan dipolpotentialet 2.72 skrives på den kompakte form

$$\boxed{\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.} \quad (2.76)$$

Et vigtigt udtryk!

Vi bemærker, at dipolpotentialet aftager omvendt proportionalt med kvadratet på afstanden r .

Dipolpotential
 $\sim 1/r^2$

I almindelighed vil dipolmomentet, beregnet efter 2.73, afhænge af det valgte fælles nulpunkt for $\mathbf{r}$ og $\mathbf{r}'$. Benytter vi et nulpunkt, som er forskudt med vektoren $\mathbf{f}$ i forhold til det oprindelige, kan vi indføre nye kildepunktskoordinater $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{f}$. Vi finder da det nye dipolmoment

Nulpunktets betydning

$$\mathbf{p}'' = \int_{V'} \mathbf{r}'' \rho(\mathbf{r}'') dv'' = \int_{V'} (\mathbf{r}' - \mathbf{f}) \rho(\mathbf{r}') dv' = \mathbf{p}' - \mathbf{f}q. \quad (2.77)$$

Vi har her af hensyn til overskueligheden benyttet betegnelsen $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ (jvf. 2.73) og desuden, at ladningstætheden er den samme i det gamle og det nye system. Hvis den totale ladning q af fordelingen er nul, er dipolmomentet ifølge 2.77 uafhængigt af punktet, hvorom det beregnes, og fordelingen omtales da blot som en 'dipol'. Er omvendt $q \neq 0$ kan man efter 2.77 altid finde et system, hvori dipolmomentet er nul. At dipolmomentet afhænger af det valgte nulpunkt betyder ikke, at det beregnede potential i et bestemt punkt af rummet bliver et andet. Monopolledet og de højere led i rækken 2.68 ændres også, således at det samlede potential bliver det samme.

Feltstyrken fra en dipol kan beregnes som $-\nabla\varphi(\mathbf{r})$. Ved hjælp af appendix A.2:5 og A.44 finder man:

Igen et vigtigt udtryk!

$$\boxed{\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right].} \quad (2.78)$$

Dipol i
ydre felt

Ved mange anvendelser har man brug for at beregne den potentielle energi af en dipol, som er anbragt i et ydre elektrisk felt $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$. Dette felt er altså et andet end feltet $\varphi_1(\mathbf{r})$ givet ved 2.76, som er et indre felt. Det divergerer iøvrigt for en punktdipol. I lighed med feltet fra en punktladning, som også divergerer, udelades det ved beregningen af den potentielle energi.

Dipolens energi
i ydre felt

Dipolens energi $U(\mathbf{r})$ i det ydre felt kan let beregnes ved anvendelse af 2.36 på to punktladninger $\pm q$ i afstanden ℓ :

$$U(\mathbf{r}) = -q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r} + \ell). \quad (2.79)$$

For ℓ lille kan vi med anvendelse af A.19 skrive

$$\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r} + \ell) = \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \ell \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}}. \quad (2.80)$$

Indsættes dette i 2.79 bliver

$$U(\mathbf{r}) = q\ell \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}}, \quad (2.81)$$

eller, udtrykt ved dipolmomentet:

$$U(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}} \quad (2.82)$$

hvor vi også har udtrykt energien ved feltstyrken i det ydre felt. Udtrykkene 2.82, som her er udledt for en dipol af to punktladninger, gælder generelt, dersom det ydre felt ikke varierer for voldsomt hen over ladningsfordelingen.

Kraft på
dipol

Vi kan finde den kraft, som påvirker dipolen som $\mathbf{F} = -\nabla U$, altså

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})_{\text{ext}}, \quad (2.83)$$

hvor vi får anvendelse for operationen ' $\mathbf{p} \cdot \nabla$ '. Se A.34 og opgave 2.20. Bemærk, at der ikke er nogen kraft på en dipol i et homogent felt.

Kraftmoment

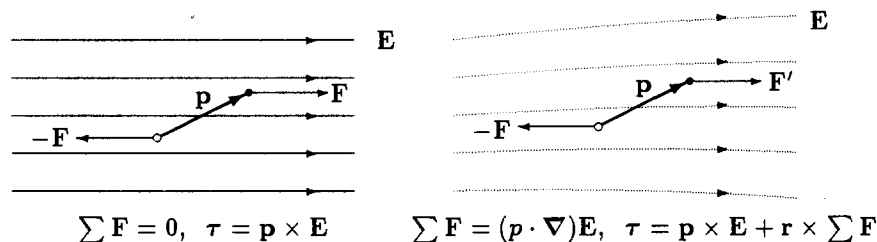
På tilsvarende måde kan man beregne det kraftmoment τ , som påvirker en dipol i et ydre elektrisk felt. Er feltet homogent, finder man

$$\tau = \int_{V'} \mathbf{r}' \times \rho(\mathbf{r}') \mathbf{E} dv' = \left(\int_{V'} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv' \right) \times \mathbf{E}, \quad (2.84)$$

altså

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (2.85)$$

I inhomogene felter får momentet et yderligere bidrag. Sml. opgave 2.20.



Figur 2.14: En dipol påvirkes kun af en kraft i et inhomogent ydre felt. Der er et kraftmoment i både homogene og inhomogene felter.

2.8.3 Quadrupolfeltet

De højere led i rækken 2.67 bliver hurtigt komplicerede. Vi skal indskrænke os til nogle bemærkninger om quadrupolfeltet, som er givet ved

Quadrupol-
feltet

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} \int_{V'} (3(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})^2 - r'^2 r^2) \rho(\mathbf{r}') dv'. \quad (2.86)$$

Omskrivning af dette udtryk sker lettest ved at udnytte tensorregningens effektive metoder, som det dog næppe betaler sig at indføre her. Men vi kan med fordel låne lidt notation, idet vi vil skrive de cartesiske koordinater af $\mathbf{r}$ som x_i , $i = 1, 2, 3$ eller x_j , $j = 1, 2, 3$ og tilsvarende $\mathbf{r}'$ som x'_i , $i = 1, 2, 3$ eller x'_j , $j = 1, 2, 3$. Vi vil også benytte det såkaldte Kronecker-symbol δ_{ij} defineret ved

Omskrivning
i tensorsprog

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.87)$$

Man kan da skrive potentialet 2.86 som

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} \int_{V'} (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') dv', \quad (2.88)$$

hvor det på tilsyneladende mirakuløs vis er lykkedes at separere mærkede og umærkede koordinater. Ved en lidt møjsommelig udregning i koordinater kan man overbevise sig om, at udtrykkene 2.86 og 2.88 stemmer overens. Efter 2.88 aftager quadrupolpotentialet med tredje potens af observationsafstanden r (som jo også indgår i x_i og x_j).

Quadrupol-
potential
 $\sim 1/r^3$

En fysisk størrelse med to (eller flere) vektorindices kaldes en *tensor*. Vi har netop mødt en sådan tensor, nemlig *quadrupolmoment tensoren*, hvis ni komponenter Q_{ij} svarer til $i, j = 1, 2, 3$. Komponenterne er givet ved

Quadrupol
tensoren
defineret

$$Q_{ij} = \int_{V'} (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') dv'. \quad (2.89)$$

Ved hjælp af quadrupolmoment tensoren kan quadrupol potentialet kompakt skrives

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij}. \quad (2.90)$$

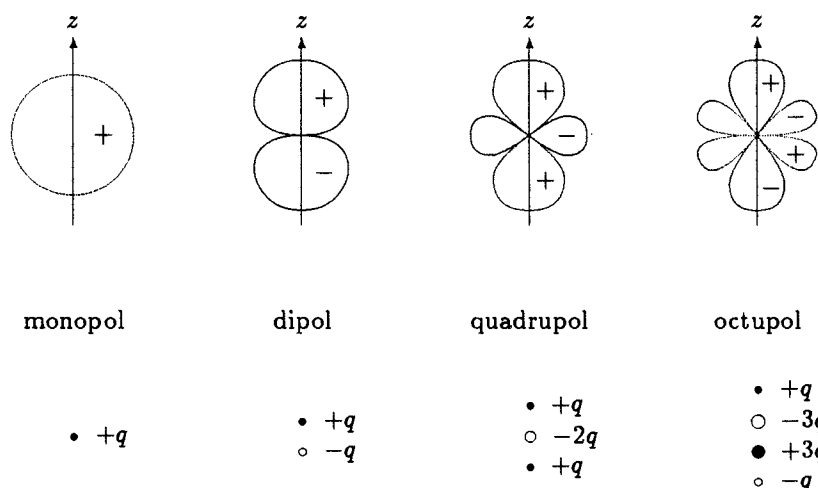
Dette potential kan i matrixsprog skrives som en kvadratisk form:

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \{x_1, x_2, x_3\} \begin{Bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}. \quad (2.91)$$

Som det ses af 2.89 er quadrupol tensoren *symmetrisk*, dvs. $Q_{ij} = Q_{ji}$. Desuden ses, at tensoren har *sporet* nul, dvs., at det om diagonalelementerne gælder, at $\sum_i Q_{ii} = 0$. Af tensorens ni komponenter er altså kun fem uafhængige.

Man kan opbygge en simpel quadrupol af to dipoler med momenter $\pm q\ell$, anbragt som vist på fig. 2.15. Dette system har hverken et monopolmoment (dvs. ladning) eller et resulterende dipolmoment. Derimod er der et

En simpel
quadrupol



Figur 2.15: Systemer opbygget af 1, 2, 4 og 8 punktladninger, som giver rene multipolfelter af orden 0, 1, 2, og 3. Figuren viser også skitser af ekvipotentialfladerne, som er rotationsymmetriske om den viste z-akse og potentialets fortegn.

quadrupolmoment, som efter 2.89 har diagonalelementerne $Q_{11} = -2q\ell^2$, $Q_{22} = -2q\ell^2$ og $Q_{33} = 4q\ell^2$. De ikke-diagonale elementer er alle nul. Efter 2.91 bliver potentialet, idet vi vender tilbage til nomenklaturen $\mathbf{r} = (x, y, z)$:

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\ell^2}{r^5} (-x^2 - y^2 + 2z^2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\ell^2}{r^5} (3z^2 - r^2). \quad (2.92)$$

2.8.4 Aksialsymmetriske ladningsfordelinger

Vigtige
faconer

Man møder ofte ladningsfordelinger, eksempelvis molekyler eller atomkerner, som har rotationssymmetri omkring en akse. Vælges denne akse som z-akse og kaldes polarvinklen mellem z-aksen og observationsretningen for θ , kan man alment vise, at potentialet omkring fordelingen kan skrives

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), \quad (2.93)$$

hvor Q_n er et for fordelingen karakteristisk multipolmoment og $P_n(\cos \theta)$ et af de såkaldte *Legendre polynomier*, som vi også senere skal anvende. Legendre polynomierne af lavest grad n er:

$$P_0(\cos \theta) = 1, \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1). \quad (2.94)$$

Vi kan sammenholde med de tidligere udledte udtryk, 2.71, 2.76 og 2.92 for potentialet af en monopol, en dipol eller en lineær quadrupol. Anbringes dipolen og quadrupolen på z-aksen gælder $z = r \cos \theta$, og man ser ved sammenligning, at $Q_0 = q$, $Q_1 = q\ell$ og $Q_2 = 2q\ell^2$. De nævnte potentialer kan da efter 2.93 skrives:

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (2.95)$$

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\ell}{r^2} \cos \theta \quad (2.96)$$

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\ell^2}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1). \quad (2.97)$$

Disse udtryk er bekvemme, da de direkte angiver potentialerne i polære koordinater. Sættes $\varphi = \text{const}$ opnår man ligninger, som bestemmer ekvipotentialfladerne, sml. fig. 2.15.

2.9 Laplaces ligning og dens løsninger

Maxwell giver
grundlaget

I de foregående afsnit har vi formuleret to grundlæggende differentiaalligninger for det elektrostatiske felt i vacuum, nemlig den 3. Maxwell ligning på formen 2.25 og den 1. Maxwell ligning på formen 2.50, altså

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0} \quad \text{og} \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0.} \quad (2.98)$$

Vi har også i 2.27 udnyttet $\mathbf{E}$ -feltets rotationsfrihed til at skrive det som gradienten af det elektriske potential, altså

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}).} \quad (2.99)$$

Indsættes dette i den 1. Maxwell ligning, finder vi

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla\varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.100)$$

som ved brug af A.31 kan skrives

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},} \quad (2.101)$$

Poissons
ligning

hvor ∇^2 er Laplaceoperatoren. Denne partielle anden ordens differentiaalligning er en grundlæggende ligning i elektrostatiken og kaldes *Poissons ligning*. Den kan løses, dersom man kender $\rho(\mathbf{r})$, altså ladningstætheden som funktion af koordinaterne. Valget af hensigtsmæssige koordinater afhænger af det betragtede systems symmetri. Vi skal i det følgende anvende cartesiske koordinater (x, y, z) , sfæriske koordinater (r, θ, ϕ) eller cylindriske koordinater (r, θ, z) . De hertil svarende udtryk for Laplaceoperatoren findes i appendix afsnit A.2.3.

Laplaces
ligning

I mange praktiske problemer er størstedelen af rummet ladningsfrit. Her gælder altså $\rho = 0$ og Poissons ligning får den simple form

$$\boxed{\nabla^2\varphi = 0,} \quad (2.102)$$

som kaldes *Laplaces ligning*. Løsninger til Laplaces ligning kaldes *harmoniske funktioner* eller *potentialfunktioner*.

2.9.1 Entydigheden af elektrostatiske løsninger

Nemt hvis
 ρ er kendt

At løse et elektrostatisk problem er ensbetydende med at finde et potential, som tilfredsstiller Poissons eller Laplaces ligninger. Hvis ladningstætheden ρ er kendt i ethvert punkt af rummet, er det i princippet enkelt at finde en løsning til Poissons ligning. En sådan er nemlig givet ved udtrykket 2.32, altså som

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'.} \quad (2.103)$$

Denne løsning går mod nul som $1/r$ i store afstande r fra en begrænset ladningsfordeling. Det kan vises, at dette er tilstrækkeligt til at sikre, at Poissons ligning har en entydig løsning.

Her skal vi hovedsagelig diskutere løsninger til Laplaces ligning. I et typisk problem har man ledere, om hvilke man ved, at de har visse potentialer eller visse totale ladninger. Ladningen fordeler sig på lederoverfladerne sådan, at potentialet i ledernes indre bliver konstant. Man kender imidlertid ikke denne fordeling. Tværtimod vil opgaven ofte være, at regne sig frem til fordelingen og til potentialet i ethvert punkt af det tomme rum mellem lederne.

Typiske problemer

Det er ikke vanskeligt at finde løsninger til Laplaces ligning. Dem vil der være mange af. Problemet er at finde løsninger, som opfylder de givne *randbetingelser*. Det vil her sige, at finde løsninger, som antager den rigtige (konstante) potentialværdi på de forskellige ledes overflader eller giver lederne den korrekte ladning. Sådanne *randværdiproblemer* er meget almindelige i fysiken, men de har ikke nogen almen matematisk løsning, og behandles idag oftest med numeriske metoder. Der findes imidlertid en række tilfælde, hvor geometrien har en såpas høj grad af symmetri, at man kan beregne eller gætte sig frem til en løsning. Når man for sådanne tilfælde søger en løsning, er det af stor betydning at vide, at denne, altså $\varphi(\mathbf{r})$, er entydigt bestemt ved forholdene på randen.

Randværdiproblemet er generelt

Som hjælp ved konstruktionen af en løsning kan man ofte benytte følgende *superpositionsprincip*: Hvis $\varphi_I, \varphi_{II}, \dots, \varphi_N$ alle er løsninger til Laplaces ligning (med forskellige randbetingelser), da er superpositionen

Potentialer superponerer

$$\varphi = C_I\varphi_I + C_{II}\varphi_{II} + \dots + C_N\varphi_N \quad (2.104)$$

også en løsning. Rigtigheden heraf ses umiddelbart, idet

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \nabla^2 C_I\varphi_I + \nabla^2 C_{II}\varphi_{II} + \dots + \nabla^2 C_N\varphi_N \\ &= C_I\nabla^2\varphi_I + C_{II}\nabla^2\varphi_{II} + \dots + C_N\nabla^2\varphi_N \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Efter dette princip kan vi superponere løsninger til Laplaceligningen med henblik på, at superpositionen skal tilfredsstille de givne randbetingelser. Vi skal se flere eksempler herpå i det følgende.

Vi skal dernæst vise entydigheden af løsningen til Laplaces ligning for det tilfælde, hvor lederne 1, 2, ..., n med overflader $S_1, S_2, \dots, S_n$ har kendte potentialer $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_n^0$. Vi forudsætter, at systemet af ledere er rumligt begrænset sådan, at det kan indesluttet i en stor kugleflade S med radius R . Volumenet inden for S , men uden for lederne, betegner vi med V .

Bevis for entydighed

Vi antager nu, at der i V er to løsninger φ_1 og φ_2 til Laplaceligningen med de *samme* randbetingelser på $S_1, S_2, \dots, S_n$ og S og opfinder en ny funktion $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$. Denne funktion vil overalt i V tilfredsstille $\nabla^2\Phi = 0$. Funktionen Φ er desuden nul på alle lederoverflader og må på S forsvinde i det mindste som $1/R$ for $R \rightarrow \infty$. En nettoladning på ledersystemet vil jo i store afstande tage sig ud som en punktladning. Af Φ konstruerer vi vektoren $\Phi\nabla\Phi$, på hvilken vi anvender divergensteoremet:

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) dv = \int_{S+S_1+\dots+S_n} (\Phi \nabla \Phi) \cdot d\mathbf{a} = 0. \quad (2.106)$$

Fladeintegralet over lederfladerne er nul da $\Phi = 0$. Integralet over S forsvinder fordi $\Phi\nabla\Phi \rightarrow 1/R^3$ (mindst) for $R \rightarrow \infty$. Vi omskriver nu ved hjælp af

tabel A.2:7 divergensen til

$$\nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) = \Phi \nabla^2 \Phi + (\nabla \Phi)^2. \quad (2.107)$$

Fordi $\nabla^2 \Phi = 0$ overalt i V , forsvinder det tilsvarende led i 2.107 og udtrykket 2.106 reducerer til

$$\int_V (\nabla \Phi)^2 = 0. \quad (2.108)$$

Integranden $(\nabla \Phi)^2$ er positiv eller nul overalt i V . Men da integralet er nul, er $\nabla \Phi = 0$ den eneste mulighed. Funktionen Φ er altså en konstant, og da $\Phi = 0$ eksempelvis på en lederoverflade, må denne konstant være nul. Idet $\Phi = 0 = \varphi_1 - \varphi_2$ har vi hermed bevist, at to løsninger φ_1 og φ_2 til Laplaceligningen med de *samme* randbetingelser er identiske. Det elektrostatiske problems løsning er således entydig.

Tilsvarende kan man vise entydigheden af løsningen, når lederne har givne ladninger, og entydigheden af løsningen til Poissons ligning.

2.9.2 Laplaceligningen i én variabel

I nogle få tilfælde kan man direkte angive den analytiske løsning til Laplace-ligningen. I visse situationer (se fig. 2.16) afhænger potentialet således kun af en enkelt parameter, og man har et (pseudo)endimensionalt problem, som er løseligt. I dette afsnit skal vi som eksempler sammenstille nogle af disse løsninger, som dels er nyttige i sig selv, og som dels kan tjene som udgangspunkt for konstruktionen af andre løsninger.

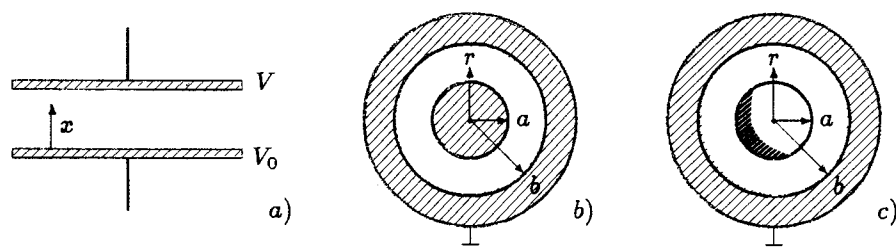
Plade-
kondensator

▷ Pladekondensator: Feltet mellem to plane kondensatorplader afhænger kun af afstanden fra den ene plade, som kan angives ved koordinaten x . Vi har da følgende Laplceligning med tilhørende generel løsning:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0, \quad \varphi(x) = cx + d, \quad (2.109)$$

hvor konstanterne c og d skal bestemmes af randbetingelserne. Har den nederste plade i kondensatoren potentialet V_0 og den øverste potentialet V og er pladeafstanden a , finder man

$$\varphi(x) = \frac{V - V_0}{a} x + V_0. \quad \triangleleft \quad (2.110)$$



Figur 2.16: a) Feltet i en pladekondensator afhænger kun af afstanden x fra den ene plade 2) Feltet mellem to rørformede ledere med fælles akse (cylinderkondensator) afhænger kun af afstanden r fra akse. c) Feltet mellem to koncentriske, ledende kugleskaller (kuglekondensator) afhænger kun af afstanden r fra centrum.

▷ Cylinderkondensator: For en lang cylinderkondensator (se fig. 2.16b) anvender man cylindriske koordinater omkring akse. Koordinaterne (z, θ) indgår på grund af rotationssymmetrien ikke i potentialet, og man får følgende Laplanceligning, hvis løsning let findes ved integration:

Cylinderkondensator

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0, \quad \varphi(r) = c \ln r + d. \quad (2.111)$$

Har den inderste cylinder potentialet V og radius a , mens den yderste har potentialet 0 og inderradius b , bliver løsningen

$$\varphi(r) = V \frac{\ln b - \ln r}{\ln b - \ln a}. \quad (2.112)$$

▷ Kuglekondensator: Her anvender vi naturligt sfæriske koordinater og finder følgende Laplanceligning med løsning:

Kuglekondensator

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0, \quad \varphi(r) = -\frac{c}{r} + d. \quad (2.113)$$

Har den inderste kugle potentialet V og radius a og den yderste potentialet 0 og inderradius b bliver løsningen

$$\varphi(r) = V \frac{a(b-r)}{r(b-a)}. \quad (2.114)$$

Det er værd at huske, at problemer af ovenstående type også, og måske enklere, kan løses ved at anvende Gauss' lov til at bestemme feltstyrken, hvorpå potentialet findes ved integration, jvf. 2.35. ◁

Gauss' lov kan også bruges

2.9.3 Laplanceligningen i cylindriske koordinater

I mange praktiske problemer møder man ledere i form af cylindre eller kugler, ofte med fælles akse eller centrum. Det indbyder selvfølgelig til behandling i cylindriske eller sfæriske koordinater. I forrige afsnit har vi allerede set på cylinderkondensatoren og kuglekondensatoren, hvor symmetrien er sådan, at problemet kun indeholder én uafhængig variabel. Her skal vi se på cylindriske situationer, hvor Laplaceoperatoren har to uafhængige variable.

I nogle tilfælde afhænger det elektrostatiske potential i cylinderkoordinater af de to variable (r, θ) . Koordinaten z indgår ikke, så potentialet kan forskydes langs akse. Laplanceligningen bliver af formen

Cylinderkoordinater (r, θ)

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.115)$$

Løsningerne kaldes *cylinder harmoniske funktioner* og egner sig til undersøgelse af visse problemer med en lang cylindrisk leder (se opgave 2.25), men ikke til problemer hvor lederen er kort og potentialet derfor z -afhængigt.

Man kan finde den familie af funktioner, som tilfredsstiller 2.115, ved separation af de variable. Man antager altså en løsning $\varphi(r, \theta) = Z(r)Y(\theta)$, som indsat separerer Laplanceligningen til

Løsning ved separation

$$\frac{r}{Z} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dZ}{dr} \right) = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{d\theta^2} = k, \quad (2.116)$$

hvor venstre side alene er en funktion af r og højre en funktion af θ .

Den eneste måde hvorpå en funktion af r altid kan være lig en funktion af θ er, at begge er samme konstant k , som vi har indført som separationskonstant. Her bliver θ -ligningen særlig simpel og har løsningerne

$$Y_1(\theta) = \cos \sqrt{k} \theta, \quad Y_2(\theta) = \sin \sqrt{k} \theta. \quad (2.117)$$

*Biden sig selv
i halen princip*

Skal disse løsninger imidlertid være entydige, og dermed fysisk meningsfulde, må de returnere til den oprindelige værdi, når θ øges med 2π , dvs.

$$\begin{aligned} \cos \sqrt{k}(\theta + 2\pi) &= \cos \sqrt{k} \theta, \\ \sin \sqrt{k}(\theta + 2\pi) &= \sin \sqrt{k} \theta. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Disse betingelser kræver åbenlyst, at $\sqrt{k} = n$, hvor n er et helt tal, eller $k = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Hermed er separationskonstanten fastlagt. Den radiale ligning bliver da

$$\frac{r}{Z} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dZ}{dr} \right) = n^2. \quad (2.119)$$

*Almen cylin-
drisk løsning*

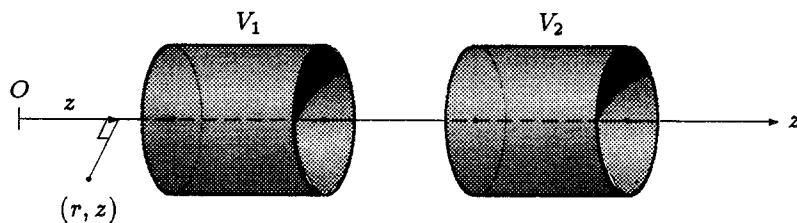
Ved prøve ser man, at ligningen har løsningerne $Z = r^{\pm n}$ for $n \neq 0$ mens $Z = 1$ eller $Z = \ln r$ for $n = 0$. Den almindelige løsning til problemet er derfor en superposition af de her fundne cylinder harmoniske funktioner:

$$\varphi(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^N (A_n r^n + A_{-n} r^{-n}) \cos n\theta + \sum_{n=1}^N (B_n r^n + B_{-n} r^{-n}) \sin n\theta, \quad (2.120)$$

hvor koefficienterne $A_{\pm n}$ og $B_{\pm n}$ må findes fra grænsebetingelserne på lederoverfladerne eller i det uendelig fjerne. Ofte vil en simpel inspektion af symmetri, singulariteter m.v. i et forelagt problem vise, at kun ganske få led kan bidrage til superpositionen 2.120.

*Rotationssym-
metri om z*

I andre tilfælde har potentialet rotationssymmetri om z -aksen. Sådanne aksialsymmetriske felter anvendes eksempelvis inden for elektronoptiken som elektrostatiske linser (se fig. 2.17). Over for en elektronstråle virker en elektrostatisk linse, som en sædvanlig linse gør det over for lys. Vi vælger cy-



Figur 2.17: En elektrostatiske linse opbygget af rørformede elementer med fælles akse. Elementerne holdes på hvert sit potential. Potentialet er af formen $\varphi(r, z)$.

*Cylinderkoor-
dinator (r, z)*

linderkoordinater med z -aksen langs symmetriaksen. På grund af rotations-symmetrien afhænger potentialet ikke af vinklen θ og bliver altså af formen $\varphi(r, z)$, som skal tilfredsstille Laplaceligningen i koordinaterne (r, z) , dvs.

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.121)$$

Denne ligning kan også separeres, men for de fleste randbetingelser, som mødes i praksis, er løsningerne ikke til megen nytte. Vi skal i stedet se på en tilnærmet løsningsmetode, som kan anvendes på elektrostatiske linser.

Da akse her er ladningsfri, sml. fig. 2.17, kan der ikke være noget radiale E-felt. Dvs. at $\partial\varphi/\partial r = 0$ for punkter på akse. Efter l'Hôpitals regel har vi da på akse

Elektrostatisk linse

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}, \quad (2.122)$$

hvorefter Laplaceligningen på akse får formen

$$\nabla^2\varphi = 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.123)$$

Vi kan udvikle feltet i nærheden af akse i en Taylorrække og finder da

$$\varphi(r, z) \approx \varphi(0, z) + \frac{r^2}{2} \varphi''_{r^2}(0, z) = \varphi(0, z) - \frac{r^2}{4} \varphi''_{z^2}(0, z), \quad (2.124)$$

hvor vi ved den sidste omskrivning har anvendt 2.123. Vi ser altså, at potentialet i nærheden af akse kan udtrykkes alene ved feltet på akse, som eksempelvis kan bestemmes eksperimentelt.

Felt bestemt ved felt på akse

2.9.4 Laplaceligningen i sfæriske koordinater

Mange elektrostatiske problemer egner sig til analyse i sfæriske koordinater (r, θ, ϕ) . Vi skal her udelukkende se på tilfælde, hvor potentialet ikke afhænger af azimuth-vinklen ϕ . Dette begrænser os igen til problemer med to parametre, men tilbage er der stadigvæk mange fysisk vigtige situationer. Løsningerne hertil har praktiske anvendelser, men bidrager også til belysning af de elektrostatiske felters egenskaber generelt.

Rotationssymmetri ved kugle

Vi betragter altså potentialer af formen $\varphi(r, \theta)$ med den sædvanlige beliggenhed af koordinatsystemet. I dette tilfælde bliver Laplaces ligning

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) = 0. \quad (2.125)$$

Vi løser igen denne ligning ved separation, idet vi antager en løsning af formen $\varphi(r, \theta) = Z(r)P(\theta)$ og husker, at r og θ i det sfæriske tilfælde har en anden betydning end i det cylindriske tilfælde 2.115. Ved indsætning af denne løsning får man

Separation igen

$$\frac{P}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) + \frac{Z}{r^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0, \quad (2.126)$$

hvor de partielle afledede er erstattet med sædvanlige afledede, da både Z og P er funktioner af én variabel. Efter division igennem med ZP og multiplikation med r^2 separerer Laplaceligningen bekvemt til

$$\frac{1}{Z} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right) = k, \quad (2.127)$$

hvor k er en separationskonstant.

Vi betragter først θ -ligningen, som bliver

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = -kP. \quad (2.128)$$

Igen en fransk matematiker

Dette er *Legendres differentiaalligning*. Den har kun fysisk acceptable løsninger, dvs. løsninger $P(\theta)$ som forbliver endelige i hele intervallet $[0, \pi]$, når $k = n(n+1)$, hvor $n = 0, 1, 2, \dots$

De acceptable løsninger til Legendres ligning for de forskellige værdier af n er polynomier i $\cos \theta$. De betegnes $P_n(\cos \theta)$ og kaldes *Legendre polynomier*. Tabel 2.1 viser Legendre polynomierne af lavest grad n .

Tabel 2.1: Legendre polynomier

n	$P_n(\cos \theta)$
0	1
1	$\cos \theta$
2	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$
4	$\frac{1}{8}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63 \cos^5 \theta - 70 \cos^3 \theta + 15 \cos \theta)$

Vi kan nu behandle den radiale ligning fra 2.127

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = n(n+1)Z, \quad (2.129)$$

hvor vi har indført de for θ -ligningen acceptable værdier $k = n(n+1)$ af separationskonstanten. Prøve viser, at denne ligning har to uafhængige løsninger for hvert n , nemlig

$$Z_n(r) = r^n, \quad Z_n(r) = r^{-(n+1)}. \quad (2.130)$$

Zonale funktioner

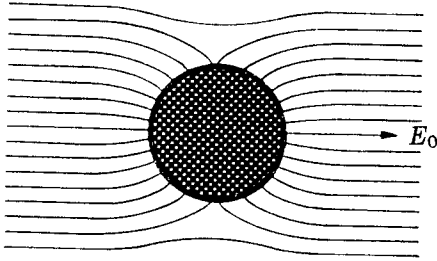
Den endelige løsning til Laplaceligningen bliver herefter en superposition af funktioner af formen $\varphi_n(r, \theta) = Z_n(r)P_n(\cos \theta)$, der undertiden betegnes som *zonal harmoniske funktioner*. Superpositionen bliver

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^N (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta), \quad (2.131)$$

Brug geometri!

hvor N angiver den højeste grad af polynomier, det er nødvendigt at inddrage i superpositionen. Geometri og symmetri af et forelagt problem viser ofte uden omfattende analyse, at kun nogle få zonal harmoniske funktioner kan bidrage. Identifikation af disse på forhånd kan spare mangan besværlig beregning, når koefficienterne A_n og B_n skal bestemmes ud fra randbetingelserne.

▷ Ledende kugle i homogent felt: Som eksempel på brugen af zonal harmoniske funktioner ved beregning af et elektrostatisk felt skal vi se på en uladet metalkugle, som anbringes i et elektrisk felt, som oprindeligt var homogent med feltstyrken E_0 . Vi skal se, at kuglen som forventeligt forstyrrer denne homogenitet i sin nærhed.



Figur 2.18: Ledende kugle i homogent felt.

Vi lægger polaraksen (z -aksen) i det oprindelige felts retning, se fig. 2.18. Den ledende kugle med radius a vil være et ekvipotentielt område, hvis potential vi kalder φ_0 . Efter 2.131 bliver potentialet uden for kuglen

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta) = & (A_0 + B_0 r^{-1}) 1 \\ & + (A_1 r + B_1 r^{-2}) \cos \theta \\ & + (A_2 r^2 + B_2 r^{-3})(3 \cos^2 \theta - 1) \\ & + \dots\end{aligned}\quad (2.132)$$

Konstanterne bestemmes nu på følgende måde: Da kuglen er uladet, må vi have $B_0 = 0$, sml. monopolfeltet i afsnit 2.8. I store afstande r er feltet kun lidt forstyrret. Potentialt må der være af formen $\varphi(r, \theta) = -E_0 z + \text{const}$, idet der da gælder $-\nabla\varphi = -k\partial\varphi/\partial z = E_0 k$ hvor k er enhedsvektoren i z -retningen. Men $z = r \cos \theta$, hvilket efter 2.132 medfører $A_1 = -E_0$. Koefficienterne $A_2 = A_3 = \dots = A_N = 0$, da vi ellers får et voksende E -felt i det fjerne. På kuglens overflade skal potentialt være uafhængigt af vinklen θ . Vi kan fjerne θ -afhængigheden i $n = 1$ leddet ved at sætte koefficienten til nul. Dvs. $-E_0 a + B_1 a^{-2} = 0$ hvoraf $B_1 = E_0 a^3$. Koefficienterne $B_2 = B_3 = \dots = B_N = 0$, da vi ellers får et vinkelafhængigt potential på kuglen. Det eneste yderligere led, som bidrager til potentialt, er det konstante led A_0 , hvorfor $A_0 = \varphi_0$.

Konstanter bestemmes

Det samlede potential uden for kuglen bliver hermed

Potential og

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_0 - E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (2.133)$$

mens potentialt inden for kuglen er φ_0 . Vi kan beregne den elektriske feltstyrke som $-\nabla\varphi$ i polære koordinater. Feltstyrken får komponenterne

feltstyrke om ledende kugle

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = E_0 \left(1 + 2\frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} = -E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta, \quad (2.134)$$

hvor man bemærker, at E_θ korrekt forsvinder på kuglens overflade. Ladningstætheden bliver jfr. 2.52

Nul ladning

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta, \quad (2.135)$$

hvoraf man finder kuglens totale ladning

$$q = a^2 \int_0^\pi \sigma(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta = 0, \quad (2.136)$$

som altså ikke overraskende er nul. Derimod får kuglen et elektrisk dipolmoment, se opgave 2.24. <

2.9.5 Konform afbildning

En generel
metode
- næsten

Den metode til løsning af Laplacialigningen, som kommer nærmest til at fortjene betegnelsen generel, bygger på kompleks funktionsteori. Vi skal derfor kort beskrive denne metode, som kan skaffe en mængde løsninger, omend ikke altid til et forelagt problem. Metoden er desuden kun anvendelig på todimensionale tilfælde.

Vi ser på et potential $\varphi(x, y)$, som kun afhænger af de to cartesiske koordinater (x, y) . Laplacialigningen er her

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.137)$$

Vi betragter nu det todimensionale rum som den komplekse z -plan, idet vi definerer den komplekse variable

$$z = x + iy. \quad (2.138)$$

Analytisk funk-
tion defineret

En kompleks funktion $f(z)$, som er entydig og differentiabel i ethvert punkt af et område i z -planen, siges at være *analytisk* eller *holomorf*. Vi skriver en sådan funktion

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (2.139)$$

Afbildning

hvor u og v er reelle funktioner af (x, y) . Man siger, at $f(z)$ afbilder (x, y) -planen på (u, v) -planen, idet der til ethvert (x, y) svarer et (u, v) og omvendt. Betingelsen for, at $f(z)$ er analytisk, kan vises at være de såkaldte Cauchy-Riemann relationer

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.140)$$

Cauchy-
Riemann

Vi differentierer den første af relationerne med hensyn til x og den anden med hensyn til y og udfører dernæst de omvendte differentiationer og får

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (2.141)$$

Masser af
løsninger til
Laplace

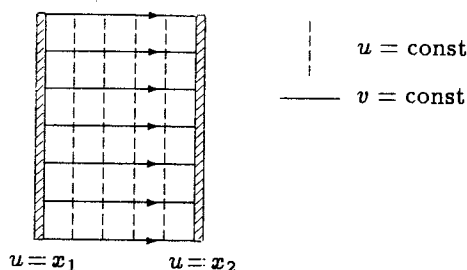
Både realdelen u og komplexdelen v af en vilkårlig analytisk funktion er således løsninger til Laplacialigningen og dermed løsninger til et elektrostatisk problem. Dette er en stor styrke ved metoden. Der er yderligere den fordel, at lader man eksempelvis $u(x, y) = \text{const}$ repræsentere en skare af ekvipotentialkurver, da er $v(x, y) = \text{const}$ kurverne ortogonale herpå, og repræsenterer således feltlinierne. Ortogonaliteten bevises let ved at beregne skalarproduktet af gradienterne, som jo er kurvesystemernes normaler, og dernæst udnytte Cauchy-Riemann relationerne:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (2.142)$$

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.143)$$

hvormed det ønskede er bevist.

Ekstragevinst!



Figur 2.19: Felt i pladekondensator ved konform afbildning.

▷ Pladekondensator: Som et meget simpelt eksempel kan vi se på den analytiske funktion

$$f(z) = z = x + iy, \quad (2.144)$$

hvor altså $u = x$ og $v = y$. Vi kan nu opfatte $u_1 = x_1$ og $u_2 = x_2$ som lederoverflader (se fig. 2.19). Linierne $u = \text{const}$ vil da repræsentere ekvipotentialflader og linierne $v = \text{const}$ feltlinier. Vi genkender feltet i en udstrakt pladekondensator, men lærer ikke noget nyt, ud over, at metoden fungerer. ◁

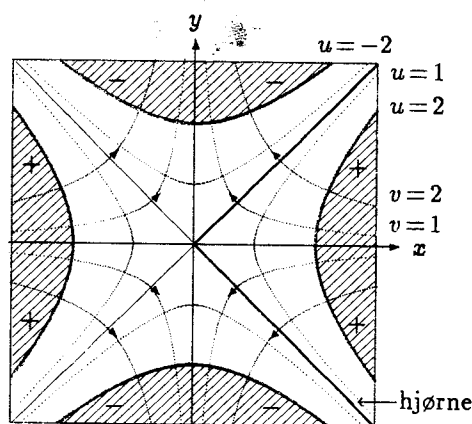
▷ Elektrisk quadrupollinse: Der er mere kød på eksempelvis afbildningen

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy. \quad (2.145)$$

Lader vi igen $u = x^2 - y^2$ være potentialet og $v = 2xy$ være feltet, får vi, ved at vælge forskellige værdier for v og u , to ortogonale skarer af hyperbler

En gammel kending

-og en ny type felt



Figur 2.20: Feltlinier og ekvipotentiallinier i elektrisk quadrupollinse vist som et snit i en lang linse med akse vinkelret på (x, y) planen. En fjerdedel af feltet kan opfattes som feltet i et retvinklet hjørne over for en hyperbolsk elektrode.

som illustreret på fig. 2.20. Man kan lægge ledere med de rigtige potentialer i potentialfladerne og får da en såkaldt elektrisk quadrupollinse. ◁

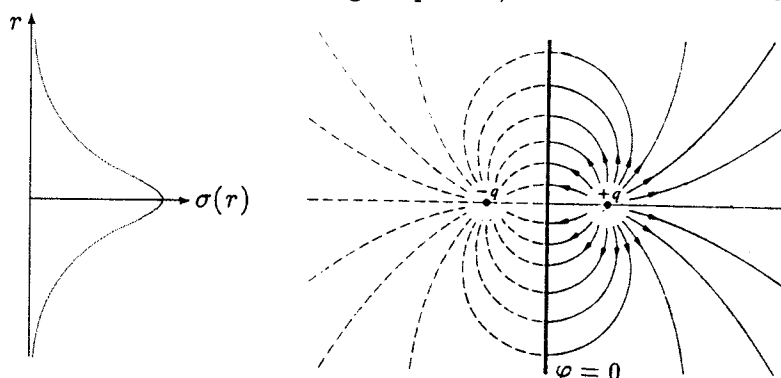
Disse eksempler må række til at vise, at man ved konform afbildning beregner virkelige fysiske felter. Metodens svaghed er, at man ikke på forhånd ved, hvilken fysisk situation en given analytisk funktion fremstiller. Man kan sige, at mens man normalt møder problemer, som søger en løsning, så giver den konforme afbildning løsninger, som søger et problem.

2.9.6 Elektrostatiske billeder

*Et trick
som virker*

Man er i stand til at løse visse elektrostatiske problemer ved en metode, der godt kan tage sig ud som et trick. Metoden kaldes *elektrostatiske billeder*, og illustreres bedst med et eksempel:

▷ Punktladning over for ledende plan: Figur 2.21 viser en punktladning $+q$ i afstanden a fra en udstrakt ledende plan, som er jordforbundet. Punktladningen vil tiltrække frie ladninger i planen, således at der over for punkt-



Figur 2.21: a) En punktladning anbragt ved en ledende plan vil over for sig samle en overfladeladning. b) Punktladningen $+q$ i afstanden a fra planen vil sammen med sin billedladning $-q$ i afstanden $-a$ skabe et potential med en ekvipotentialflade, som falder sammen med den ledende plan.

ladningen skabes en overfladetæthed. Tætheden kan beskrives ved en art klokkeformet funktion $u = \sigma(r)$, hvor $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ angiver den radiale afstand i xy -planen fra et centrum umiddelbart over for punktladningen.

*Løs et andet
problem*

At bestemme $\sigma(r)$ ved direkte løsning af Laplaceligningen ville være en kompliceret opgave. I stedet løser vi et andet, meget simplere problem, nemlig at finde potentialet omkring to modsatte punktladninger. Den ene er punktladningen $+q$ i punktet $(0, 0, a)$, den anden punktladningen $-q$ i punktet $(0, 0, -a)$, se fig. 2.21 b). Den ledende plan tænker vi os for øjeblikket borte, men man kan forestille sig, at ladningen $-q$ er opstået ved en art 'elektrostatisk spejling' i (x, y) -planen. Man kalder $-q$ for q 's *billedladning*.

Billedet

Vi kan let beregne potentialet i et vilkårligt punkt i rummet som summen af potentialerne fra de to ladninger. Da potentialet er rotationssymmetrisk om z -aksen, kan vi bruge cylinderkoordinater (r, z) og finder da

$$\varphi(r, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{(z-a)^2 + r^2}} + \frac{-q}{\sqrt{(z+a)^2 + r^2}} \right). \quad (2.146)$$

Dette potential er en superposition af potentialer som tilfredsstillere Laplaceligningen og må derfor også selv gøre det. Yderligere er potentialet, som man let ser af 2.146, konstant ($= 0$) i hele (x, y) -planen. Vender vi tilbage til det oprindelige problem i fig. 2.21 a) og ser på halvrummet $z > 0$, så gælder det her om potentialet 2.146 at, i) det er en løsning til Laplaceligningen, ii) det opfylder randbetingelsen $\varphi = 0$ på den ledende plan, iii) det går mod nul for store afstande. Men da må ifølge entydighedssætningen potentialet 2.146 være den søgte løsning til vores problem.

*Laplace +
randbetingelser*

Man kan gå videre og beregne feltstyrken i rummet. Feltliniebilledet bliver som den ene halvdel af fig. 2.5a. Endvidere kan man beregne ladningstætheden på den ledende plan, som bliver

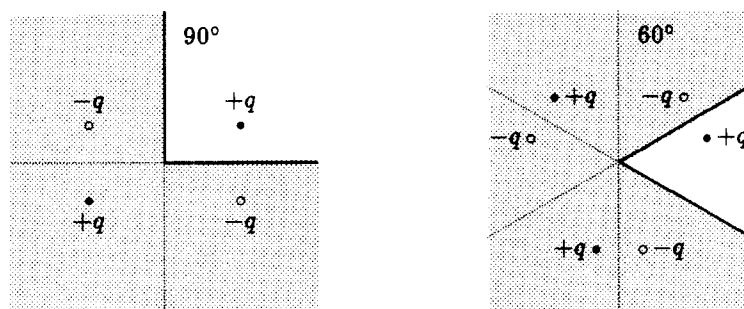
$$\sigma(r) = \epsilon_0 E_z|_{z=0} = -\frac{qa}{2\pi(a^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (2.147)$$

Dette udtryk har, som man let efterviser, integralet $-q$ hen over planen.

Det er oplagt, at den samlede negative ladning på den ledende plan udøver en tiltrækning på punktladningen q . Tiltrækningskraften er den kraft, som q påvirkes af fra sin billedladning, altså $-q^2/16\pi\epsilon_0 a^2$. $\triangleleft$

Metoden, som blev anvendt ovenfor, bygger på, at man finder en simpel konfiguration af ladninger, der har en ekvipotentialflade, som falder sammen med lederen. Der er en række andre problemer, som kan løses med samme

Billedmetodens grundlag



Figur 2.22: Punktladning i to forskellige ledende hjørner og de ekvivalente konfigurationer af billedladninger.

metode. Fig. 2.22 viser således en punktladning i et 90° og et 60° ledende hjørne og den konfiguration af henholdsvis 4 og 6 ladninger, som giver det ekvivalente felt.

▷ Punktladning over for ledende kugle: Uden bevis skal vi anføre, at også en punktladning over for en jordforbundet ledende kugle kan behandles med billedmetoden. Er punktladningen q anbragt i afstanden d fra centrum af den ledende kugle med radius a , skal billedladningen have størrelsen $q' = -aq/d$ og anbringes mellem q og centrum i afstanden $b = a^2/d$ fra dette. $\triangleleft$

Kugle og punktladning

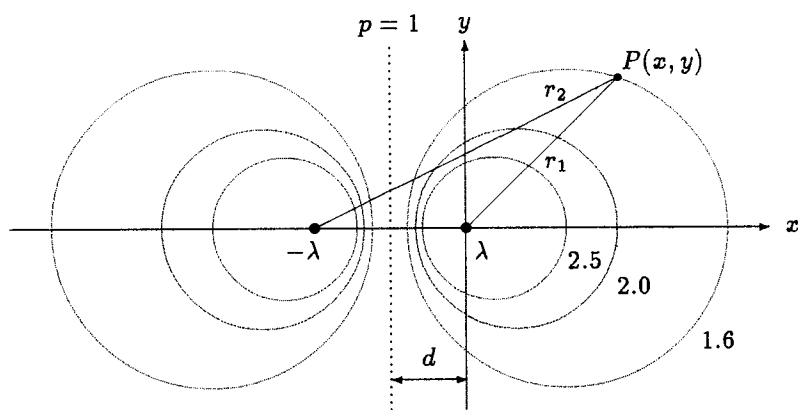
▷ Linieladninger og ledende cylindre: Billedmetoden kan også anvendes på visse problemer med linieladninger og ledende cylindre. Vi skal her se på et eksempel, som er af betydelig praktisk interesse (kabler).

Vi har tidligere i 2.61 fundet et udtryk for feltstyrken omkring en linieladning med ladningstæthed λ . Dette udtryk kan vi nu integrere, jvf. 2.35, for at finde potentialet. Da dette bliver logaritmisk divergent i det uendelig fjerne, giver vi arbitrært potentialet 0 til et referencepunkt i afstanden b fra linien og finder

En og to lange ledere

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Rightarrow \varphi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_r^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{r}. \quad (2.148)$$

Et mere interessant tilfælde er to parallelle linieladninger $\pm\lambda$ med afstand $2d$ (fig. 2.23). Potentialet bliver her differensen af to potentialer af typen 2.148.



Figur 2.23: To parallelle linieladninger. Potentialfladerne er cirkulære cylindre omkring hver linieladning. Enhver cylinder kan erstattes af en cylindrisk leder.

Vi vælger potentialet 0 for $b = d$ for begge linieladninger og finder

$$\varphi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [-\ln r_1 + \ln r_2] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.149)$$

Vi bemærker, at potentialet bliver konstant = 0 på planen midt mellem lederne, idet det her gælder, at $r_1 = r_2$, således, at $\ln(r_2/r_1) = 0$. Erstattes planen med en isoleret ledende flade, vil denne antage potentialet 0, og intet vil ændres. Linieladningen $-\lambda$ er således det elektrostatiske billede af linieladningen $+\lambda$ over for en ledende plan.

*Cylindriske
ekvipotential-
flader*

Ekvipotentialfladerne er bestemt af $r_2/r_1 = p$, hvor p er en konstant. For midterplanen er $p = 1$ og i halvrummet til højre for denne gælder $1 < p < \infty$. Ekvipotentialfladerne er cylindre, som skærer xy -planen i cirkler. Dette følger umiddelbart af, at det geometriske sted for de punkter, hvis afstande til to faste punkter har et givet forhold, er en cirkel. Vi kan eftervise dette ved regning i koordinater: Vi lægger nulpunktet for et xy -system i den positive linieladning og har da

$$r_1^2 = x^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x + 2d)^2 + y^2. \quad (2.150)$$

Af disse udtryk følger ved indsætning i $r_2^2 = p^2 r_1^2$, at

$$\left(x - \frac{2d}{p^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{4p^2 d^2}{(p^2 - 1)^2}, \quad (2.151)$$

som ses at fremstille en ret cylinder med centrum (x_0, y_0) og radius R bestemt ved

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{2d}{p^2 - 1}, 0\right), \quad R = \frac{2dp}{p^2 - 1}. \quad (2.152)$$

*Andre løselige
problemer*

Enhver af de cylindriske ekvipotentialflader kan erstattes med en tynd leder, som vil antage ekvipotentialfladens potential, men hvor alt iøvrigt er uændret. Erstatte vi en potentialflade om hver linieladning med ledende cylindre, som kan være tynde eller massive, vil potentialet i ethvert punkt uden for cylindrene være uændret. Man er dermed i stand til at løse mange forskellige problemer vedrørende ledende cylindre, planer og linieladninger, men vi skal ikke her komme nærmere ind derpå. <

2.10 Capacitans

Lad os betragte et antal ladede ledere, som er anbragt i nærheden af hinanden. Som det fremgår af de forrige afsnit, er det i almindelighed en meget vanskelig opgave at beregne den ladningsfordeling, som derved induceres på lederne og det potential, der findes i rummet omkring dem.

I mange tilfælde er man imidlertid ikke interesseret i et detaljeret kendskab til det elektriske felt og til ladningsfordelingerne, men kun i sammenhængen mellem potentialerne af de enkelte ledere og deres totale ladninger. Det er denne sammenhæng, vi skal undersøge i dette afsnit.

Ledere som ser hinanden

2.10.1 Kondensatorer

I praksis er der størst interesse for konfigurationer med kun to ledere, som gives lige store, men modsatte ladninger $\pm Q$. Dette er ikke så svært at realisere, som man måske kunne tro: Forbindes den ene leder til jord og gives den anden en spænding, bliver ladningerne lige store helt af sig selv. Et sådant system af to ledere kaldes en *capacitor* i nyere terminologi og en *kondensator* i ældre. Vi skal anvende begge betegnelser i flæng.

En kondensator er en capacitor

Vi tænker os de to ledere nær hinanden og fjernt fra andre ledere og ladninger. Der vil være en vis potentialforskel $V = \varphi_1 - \varphi_2$ mellem lederne. Forøges ladningen til λQ bliver potentialforskellen λV . Potentialet $\lambda \varphi$ vil jo også være løsning til Laplaceligningen og vil på lederfladerne give ladningstætheder proportionale med $-\nabla \varphi$. Ladningstæthederne og dermed ladningerne øges derfor også med en faktor λ , og randbetingelsen er opfyldt.

Denne proportionalitet mellem ladning og potential udtrykkes ved

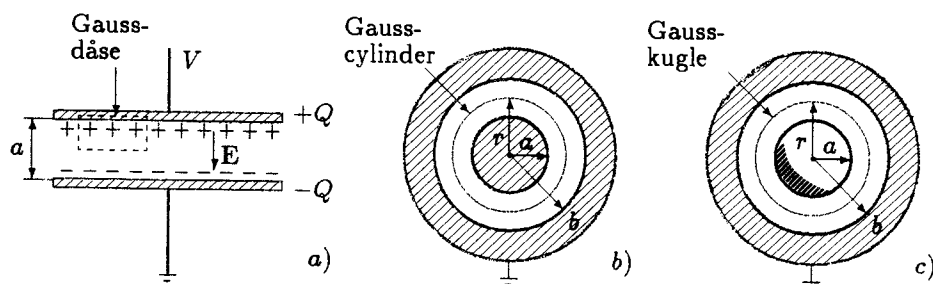
$$Q = CV, \quad (2.153)$$

hvor størrelsen C er en konstant, som kaldes systemets *capacitans*. Capacitans måles i CV^{-1} der kaldes farad, F, efter Michael Faraday.

Capacitans defineret

Vi har allerede i afsnit 2.9.2 diskuteret potentialerne i tre praktisk vigtige kondensatorer. Vi skal nu udlede udtryk for capacitansen af de samme tre kondensatorer. Efter 2.153 kræver dette, at vi for hver kondensatortype beregner sammenhørende værdier af kondensatorens ladning Q og potentialforskellen V over den. Denne type beregning forekommer ofte i elektrostatikken, og vi skal derfor her gennemføre den helt fra bunden af med udnyttelse af Gauss' lov.

Typisk beregning



Figur 2.24: a) Pladekondensator. b) Cylinderkondensator. c) Kuglekondensator.

*Plade-
kondensator*

▷ Capacitans af pladekondensator: Vi kan se bort fra de afvigende feltforhold nær pladekanterne, hvis pladeafstanden er lille i forhold til pladernes udstrækning. Ladningerne $\pm Q$ fordeler sig da jævnt på pladernes indadvendte sider, sådan at feltet E bliver homogent og af symmetrigrunde vinkelret på pladerne. Vi lægger en Gauss-dåse med toppen i den øverste plade med potentialet V og bunden i plademellemrummet. Har dåsen arealet S , giver Gauss' lov $ES = \sigma S/\epsilon_0$ hvoraf fladeladningstætheden $\sigma = \epsilon_0 E$. Er pladearealet A , har vi $Q = \sigma A = \epsilon_0 EA$. Med pladeafstanden a er $E = V/a$ sådan, at $Q = \epsilon_0 AV/a$. Efter 2.153 har vi da for pladekondensatoren

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{a}. \quad \triangleleft \quad (2.154)$$

*Cylinder-
kondensator*

▷ Capacitans af cylinderkondensator: Vi ser igen bort fra feltafvigelserne nær enderne. Af symmetrigrunde må feltet da overalt være radiale. Lad inderlederens radius være a og dens potential V og yderlederens inderradius b og dens potential 0. Kondensatorens længde er L . Som Gauss-flade anvender vi en coaxial cylinderflade med længde L og radius r , hvor $a < r < b$. Gauss' lov giver da $2\pi r L E(r) = Q/\epsilon_0$, hvoraf feltstyrken i mellemrummet $E(r) = Q/2\pi\epsilon_0 L r$. Inderlederens potential er efter 2.35 fastlagt ved integralet

$$V = \int_a^b E(r) dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}. \quad (2.155)$$

Efter 2.153 har vi da for cylinderkondensatoren (eller et coaxialkabel)

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}. \quad \triangleleft \quad (2.156)$$

*Kugle-
kondensator*

▷ Capacitans af kuglekondensator: Da den ene kugle helt omslutter den anden, er der her ingen randproblemer, og feltet er af symmetrigrunde overalt radiale. Lad inderkuglens radius være a og dens potential V og yderkuglens inderradius b og dens potential 0. Som Gauss-flade anvender vi en koncentrisk kugleflade med radius r , hvor $a < r < b$. Gauss' lov giver da $4\pi r^2 E(r) = Q/\epsilon_0$, hvoraf feltstyrken i mellemrummet $E(r) = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Inderlederens potential er efter 2.35 fastlagt ved integralet

$$V = \int_a^b E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \quad (2.157)$$

Efter 2.153 har vi da for kuglekondensatoren

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}. \quad (2.158)$$

Fri kugle

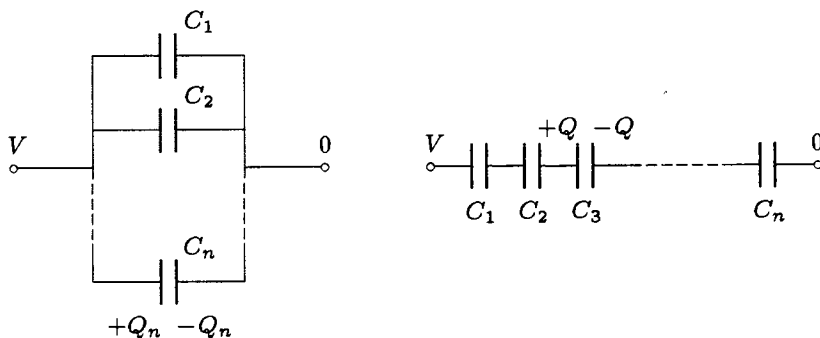
Bliver den yderste kugle meget stor, altså $b \rightarrow \infty$, bliver capacitansen

$$C = 4\pi\epsilon_0 a, \quad (2.159)$$

der kan betragtes som capacitansen af en frit ophængt kugle. Denne er altså proportional med kuglens radius. $\triangleleft$

Tabel 2.2 sammenfatter de her udledte og andre udtryk for capacitans for tilfælde, der ofte mødes i praksis.

I elektriske diagrammer angives kondensatorer ved signaturen ||| . De forbindes ofte flere sammen i parallel eller serie, se fig. 2.25.



Figur 2.25: Capacitanser i parallel og i serie.

I parallelforbindelse er der samme potentialforskel V over alle kondensatorer $C_1, C_2, \dots, C_n$, som får ladninger $Q_1 = C_1V, Q_2 = C_2V, \dots, Q_n = C_nV$. Den totale ladning Q på kondensatorerne er da bestemt ved

*Capacitanser
i parallel*

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)V = CV. \quad (2.160)$$

Den samlede capacitans C af n parallelforbundne capacitanser bliver altså

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (2.161)$$

I serieforbindelse kræver bevarelse af ladning, at alle kondensatorerne får samme ladning Q . Spændingen over de enkelte kondensatorer bliver da $V_1 = Q/C_1, V_2 = Q/C_2, \dots, V_n = Q/C_n$. Den samlede spænding V over alle kondensatorerne er da bestemt ved

*Capacitanser
i serie*

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) Q = \frac{Q}{C}. \quad (2.162)$$

Den samlede capacitans C af n serieforbundne capacitanser bliver altså

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (2.163)$$

For to serieforbundne kondensatorer benytter man med fordel udtrykket

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (2.164)$$

2.10.2 Capacitanskoefficienter og potentialkoefficienter

Betragtningerne over sammenhængen mellem ladninger og potentialer kan udvides til at omfatte mere end to ledere. Lad $1, 2, \dots, n$ være oprindeligt uladede ledere anbragt i vacuum og i faste positioner. Giver vi den første leder en ladning Q_1 , mens alle de andre forbliver uladede, vil der i rummet opstå et potentialfelt $\varphi_1(\mathbf{r})$. På hver lederoverflade er dette felt konstant, og ladningstætheden i ethvert punkt af en lederflade bestemmes ved

*Mere end to
ledere*

$$\sigma = -\epsilon_0 \nabla \varphi_1(\mathbf{r}). \quad (2.165)$$

Integrerer vi 2.165 over den første leders overflade, får vi Q_1 , mens integralet over alle andre ledere vil være nul. Tilsvarende vil en ladning Q_i på den i 'te leder alene give et potentialfelt $\varphi_i(\mathbf{r})$, der bestemmer en overfladeladningstæthed på samtlige ledere. Leder i får ladningen Q_i og alle andre ledere ladningen nul. På den måde har vi til en række ladninger på de respektive ledere

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_n \quad (2.166)$$

tilordnet en række potentialfelter i rummet:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n. \quad (2.167)$$

*Potentialer
superponerer*

Vi skal nu bevise følgende superpositionsprincip: Giver vi samtidigt lederne $1, 2, \dots, n$ ladningerne $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, da vil potentialet overalt i rummet være bestemt ved

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r}) + \dots + \varphi_n(\mathbf{r}). \quad (2.168)$$

Laplace igen

Men dette er jo en simpel følge af, at $\varphi(\mathbf{r})$ opfylder betingelserne

- i) $\nabla^2 \varphi = 0$ i alle punkter af rummet bortset fra ledernes overflader.
- ii) φ er konstant på lederoverfladerne, og ladningen på den i -te leder er

$$-\epsilon_0 \oint_i \nabla \varphi \cdot d\mathbf{a} = Q_i.$$

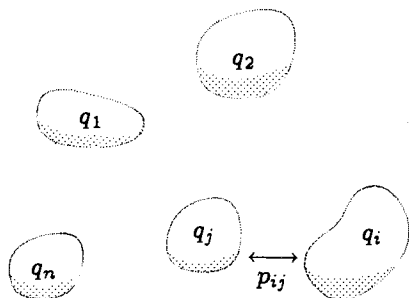
- iii) For $r \rightarrow \infty$ vil $\varphi \rightarrow 0$ mindst som $1/r$.

Ifølge den tidligere omtalte entydighed af potentialet, hvis alle ladninger er specificeret, vil $\varphi(\mathbf{r})$ være potentialfunktionen, når ledernes ladninger er givet ved 2.166.

*Potential-
koefficienter
defineret*

Vi giver nu leder j ladningen 1, mens alle andre ledere holdes uladede. Den i 'te leder får herved et potential, som vi skal kalde p_{ij} . Giver vi j ladningen q_j vil i få potentialet $p_{ij}q_j$. Efter superpositionsprincippet 2.168 vil en samtidig anbringelse af ladningerne $q_1, q_2, \dots, q_n$ på de respektive ledere give lederne potentialer, som er bestemt ved det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= p_{11}q_1 + p_{12}q_2 + \dots + p_{1n}q_n \\ \varphi_2 &= p_{21}q_1 + p_{22}q_2 + \dots + p_{2n}q_n \\ &\vdots \\ \varphi_n &= p_{n1}q_1 + p_{n2}q_2 + \dots + p_{nn}q_n \end{aligned} \quad (2.169)$$



Figur 2.26: Ladningen på hver enkelt leder vil påvirke potentialerne af samtlige ledere. Dette problem kan behandles ved en udvidelse af kapacitetsbegrebet.

der kort kan skrives

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} q_j. \quad (2.170)$$

Koefficienterne p_{ij} kaldes *potentialkoefficienter*. De er udelukkende bestemt af systemets geometriske forhold og afhænger ikke af ladninger eller potentialer. Vi skal senere vise, at matricen p_{ij} er symmetrisk.

Løses ligningssystemet 2.169 med hensyn til ladningerne, får vi et nyt lineært ligningssystem

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 + \cdots + c_{1n}\varphi_n \\ q_2 &= c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2 + \cdots + c_{2n}\varphi_n \\ &\vdots \\ q_n &= c_{n1}\varphi_1 + c_{n2}\varphi_2 + \cdots + c_{nn}\varphi_n \end{aligned} \quad (2.171)$$

eller

$$q_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_j. \quad (2.172)$$

Dette er en lineær relation mellem ladning og potential på samme måde, som 2.153 er det. Koefficienterne c_{ii} kaldes følgelig for *capacitanskoefficienter*, mens koefficienterne c_{ij} kaldes *influenskoefficienter*. Også matricen c_{ij} er symmetrisk. Capacitanskoefficienterne er alle positive, altså $c_{ii} > 0$, mens influenskoefficienterne er negative eller nul, altså $c_{ij} \leq 0$.

*Capacitans-
koefficienter
defineret*

I praksis vil man ofte ønske at sætte ladningerne i relation til de potentialforskelle $V_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$, som findes mellem lederne, og til ledernes potentialforskelle $V_{i0} = \varphi_i - \varphi_0 = \varphi_i$ til jord. Jordpotentialen $\varphi_0 = 0$ er her angivet ved index 0. Vi omformer derfor 2.172 til direkte at indeholde potentialforskellene. For den i -te leder gælder eksempelvis:

$$\begin{aligned} q_i &= c_{i1}\varphi_1 + c_{i2}\varphi_2 + \cdots + c_{in}\varphi_n \\ &= -c_{i1}(\varphi_i - \varphi_1) - c_{i2}(\varphi_i - \varphi_2) - \cdots - c_{in}(\varphi_i - \varphi_n) \\ &\quad + (c_{i1} + c_{i2} + \cdots + c_{in})\varphi_i. \end{aligned} \quad (2.173)$$

Dette udtryk kan skrives som

$$q_i = \sum_{j=0}^n C_{ij}(\varphi_i - \varphi_j). \quad (2.174)$$

Her har vi (bemærk de store C -er) indført de indbyrdes *delcapacitanser* C_{ij} ($j \neq i$) og *delcapacitanserne til jord* $C_{i0} \equiv C_{ii}$ bestemt ved

*Del-
capacitanser*

$$C_{ij} = -c_{ij} \quad (j \neq i) \quad \text{og} \quad C_{i0} = \sum_{j=1}^n c_{ij}. \quad (2.175)$$

Det gælder, at $C_{ij} = C_{ji}$ og, at $C_{i0} \geq 0$. Vi kan anvende disse begreber på nogle eksempler:

▷ Kun én leder (1): Her optræder kun delcapacitansen C_{10} til jord, og 2.174 giver, med $\varphi_0 = 0$

*Capacitans af
enkelt leder*

$$Q_1 = C_{10}\varphi_1. \quad (2.176)$$

Dette er i overensstemmelse med vores hidtidige opfattelse af capacitans, jvf. 2.153, idet jord opfattes som den anden leder. Sammenlign også med capacitansen 2.159 af en ensom kugle.◁

Capacitans af
to ledere

▷ To ledere (1 og 2) med modsatte ladninger $\pm Q$: Her giver 2.174

$$\begin{aligned} Q &= C_{10}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) \\ -Q &= C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{20}\varphi_2, \end{aligned} \quad (2.177)$$

idet $C_{12} = C_{21}$. Ved addition fås for potentialerne

$$C_{10}\varphi_1 + C_{20}\varphi_2 = 0 \Rightarrow \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{C_{20}}{C_{10}}. \quad (2.178)$$

Af den første ligning i 2.177 kan vi finde forholdet mellem ladningen og potentialforskellen for de to ledere. Dette forhold er det naturligt at opfatte som systemets capacitans C :

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = C_{10} \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_2} + C_{12}, \quad (2.179)$$

som med udnyttelse af 2.178 kan skrives

$$C = C_{12} + \frac{1}{1/C_{10} + 1/C_{20}}. \quad (2.180)$$

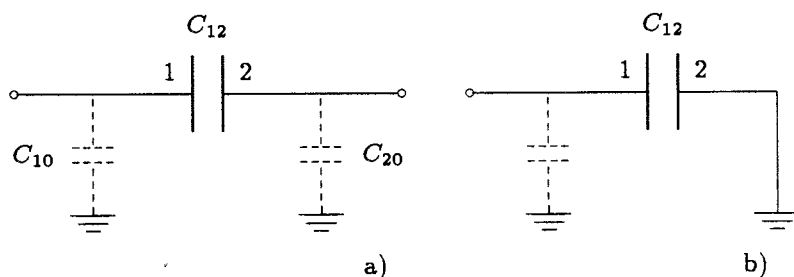
Capacitans til
jord skal med

Capacitansen af de to ledere er altså kun C_{12} , hvis deres delcapacitanser over for jord er små i sammenligning med C_{12} .◁

▷ To ledere (1 og 2), hvoraf en er jordforbundet: I dette tilfælde giver 2.177 med $\varphi_2 = 0$:

$$C' = \frac{Q}{\varphi_1} = C_{10} + C_{12}. \quad (2.181)$$

Formlerne 2.180 og 2.181 er lette at huske, hvis vi tænker på formlerne 2.161 og 2.163 for sammensætning af capacitanser. Indtegner vi nemlig (se fig.



Figur 2.27: a) I en kondensator vil der normalt være delcapacitans til jord for begge ledere. b) Er den ene leder jordforbundet, indgår kun den anden leders delcapacitans.

2.27) delcapacitanserne til jord, er der i tilfælde a) en serieforbindelse af C_{10} og C_{20} i parallel med C_{12} , mens der i tilfælde b) er en parallellforbindelse mellem C_{10} og C_{12} .◁

Tabel 2.2: Capacitans

Enkelt legeme langt fra jord:

- 1) Kugle med radius
- a
- :

$$C = 4\pi\epsilon a.$$

- 2) Flad omdrejningsellipsoide med halvakser
- a
- og
- c
- ,
- $a > c$
- :

$$C = \frac{4\pi\epsilon(a^2 - c^2)^{1/2}}{\operatorname{arctg}(a^2/c^2 - 1)^{1/2}}.$$

- 3) Lang omdrejningsellipsoide med halvakser
- a
- og
- b
- ,
- $a > b$
- :

$$C = \frac{4\pi\epsilon(a^2 - b^2)^{1/2}}{\operatorname{arctgh}(1 - a^2/b^2)^{1/2}}.$$

- 4) To kugler med radius
- a
- i kontakt:

$$C = 8\pi\epsilon a \ln 2.$$

- 5) Cirkulær cylinder med radius
- a
- og længde
- $2b$
- :

$$C = 8\epsilon a \left[1 + 0.869 \left(\frac{b}{a} \right)^{0.76} \right].$$

- 6) Flad cirkulær skive med radius
- a
- :

$$C = 8\epsilon a.$$

- 7) Kubus med side
- a
- :

$$C \approx 8.225\epsilon a.$$

To legemer med lige store modsatte ladninger fjernt fra alt:

- 8) To ens kugler med radius
- a
- og centerafstand
- D
- :

$$C = 2\pi\epsilon a \sinh \beta \sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{cosech} (2n-1)\beta + \operatorname{cosech} 2n\beta],$$

hvor $\cosh \beta = D/2a$.

- 9) To ens planparallelle og coaxiale cirkulære plader med tykkelse
- t
- , radius
- r
- og afstand
- d
- mellem de mod hinanden vendte flader:

$$C = \epsilon \left[\frac{\pi r^2}{d} - r + r \ln \frac{16\pi}{d} (1 + t/d) + 4\pi \frac{tr}{d} \ln(1 + d/t) \right].$$

To legemer hvor det ene omslutter det andet:

- 10) Koncentriske kugler med radius
- a
- og
- b
- ,
- $a < b$
- :

$$C = 4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a}.$$

- 11) Kugler med radier
- a
- og
- b
- og centerafstand
- c
- :

$$C = 4\pi\epsilon ab \sinh \alpha \sum_{n=0}^{\infty} [b \sinh n\alpha + a \sinh (n-1)\alpha]^{-1},$$

hvor $\cosh \alpha = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab$

- 12) Lille kugle med radius a midt mellem ledende planer med afstand $2d$:

$$C = 4\pi\epsilon \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d} \ln 2 \right)^{-1}.$$

Capacitans per længde af uendelig lange ledere:

- 13) Coaxiale cirkulære cylindre med radier a og b , $a < b$:

$$C_l = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}.$$

- 14) To cirkulære cylindre med radier a og b og centerafstand c (cylindrene kan ligge både externt og internt):

$$C_l = \frac{2\pi\epsilon}{\operatorname{arcosh} \frac{|c^2 - a^2 - b^2|}{2ab}}.$$

- 15) Cylinder med radius a og centrum i afstanden c fra en ledende plan:

$$C_l = \frac{2\pi\epsilon}{\operatorname{arcosh} \frac{c}{a}}.$$

Kilde: American Institute of Physics Handbook (1972).

Kapitel 3

Dielektrika

Navnet *dielektrikum*, flertal *dielektrika*, stammer fra latin og betyder en adskiller af elektricitet. I praksis anvendes betegnelsen om en isolator der, som tidligere omtalt, ideelt set, er et materiale, uden frie elektroner.

*Dielektrikum
defineret*

Der er intet elektrisk felt inde i en leder, fordi de frie elektroner arrangerer sig sådan på lederens overflade, at feltet overalt i dens indre bliver nul. Sådan er det ikke i et dielektrikum, hvor der meget vel kan eksistere indre felter. Disse felter er imidlertid reducerede i forhold til situationen uden dielektrikum. Denne effekt skyldes elektronerne i dielektrikets molekyler. Selv om disse elektroner ikke frit kan vandre rundt i materialet, forskydes de dog en smule fra deres uforstyrrede positioner under indvirkning af feltet. Den ændring, som derved opstår i ladningsfordelingen i de enkelte molekyler, kan addere op til en betydelig reduktion af feltet i dielektrikets indre.

*Feltet
reduceres*

I dette afsnit skal vi, ud fra meget forenklede forestillinger om elektronsystemets egenskaber, nå frem til en *makroskopisk* teori for de elektrostatiske felter, når der er dielektrika tilstede.

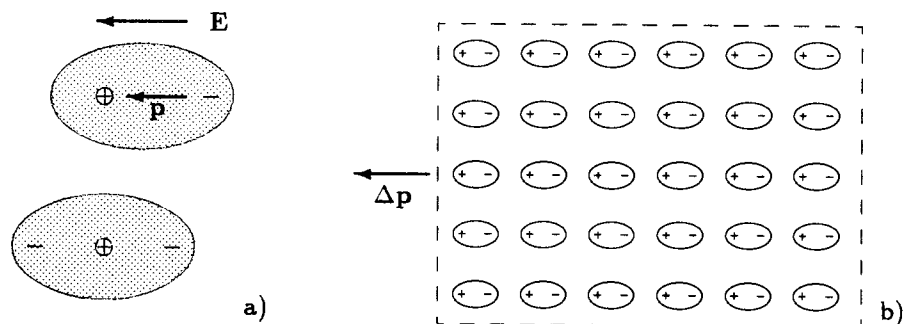
3.1 Polarisation

Et dielektrikum er opbygget af molekyler, som igen er opbygget af atomer med positive kerner og en sky af negative elektroner. I et ydre felt skubbes de positive partikler i feltretningen. De negative trækkes modsat feltretningen, men løsrives normalt ikke. Som helhed er molekylet elektrisk neutralt og påvirkes ikke af nogen ydre elektrisk kraft. Tyngdepunktet flyttes derfor ikke, og de tunge atomkerner forskydes kun lidt, de lette elektroner væsentligt mere. De kræfter, som binder partiklerne i molekylet sammen, kan med tilnærmelse opfattes som elastiske og søger at bringe elektronerne tilbage. Resultatet af kræfternes spil bliver en ny ligevægt med elektronskyen forskudt en smule fra sin oprindelige position. Der sker altså i molekylet en delvis separation af positive og negative ladninger, som vist på figur 3.1. Derved får molekylet et *elektrisk dipolmoment*. Man siger, at det er blevet *polariseret*. Det skal nævnes, at et materiale også kan polariseres, hvis dets molekyler i sig selv har et dipolmoment, som normalt er tilfældigt orienteret, men som, modvirket af molekylernes termiske bevægelser, mere eller mindre kan ensrettes af et ydre felt. Sådanne molekyler kaldes *polare*.

*Molekyler får
dipolmoment*

Overfladeladning fra polarisation

Med henvisning til figuren 3.1 er det ikke vanskeligt at forstå, at polarisationen af materialets molekyler vil påvirke det ydre felt. På materialets overflade vil der jo opstå ukompenserede ladninger, idet molekylerne stikker den positive ladning frem i feltets retning og den negative imod feltets retning. Dette giver en regulær makroskopisk overfladeladning, som inde i



Figur 3.1: a) Under indflydelse af et ydre elektrisk felt vil de enkelte molekyler i et dielektrikum polariseres således, at de får et elektrisk dipolmoment. b) Et stykke af et polariseret dielektrisk materiale vil selv få et dipolmoment på grund af de ukompenserede ladninger på overfladen.

dielektriket skaber et felt modsat rettet af det ydre felt, som altså svækkes. Vi skal siden vise, at hvis feltet i dielektriket er inhomogent, så vil der desuden opstå makroskopiske volumenladninger, som også ændrer det påtrykte ydre felt.

Et dilemma

Under indflydelse af det elektriske felt polariseres hvert enkelt molekyle. Den totale elektriske feltstyrke er sammensat af det kendte påtrykte ydre felt E_0 og feltstyrken E_m fra molekylerne. Vi kan beregne E_m , hvis vi kender dipolmomentet p_m af det enkelte molekyle, men dette forudsætter jo kendskab til E_m . Det er denne løften sig selv ved håret situation vi i det følgende afsnit skal lære at håndtere. Som en foreløbig antagelse vil vi gå ud fra, at p_m er kendt.

Betragter vi et lille volumen $\Delta v'$ af et polariseret dielektrikum, har det, blandt andet på grund af overfladeladningerne, et elektrisk dipolmoment Δp . Generelt er dette dipolmoment vektorsummen af momenterne af alle de molekyllære dipoler:

$$\Delta p = \sum_{\Delta v'} p_m, \quad (3.1)$$

hvor summen udstrækkes over de molekyler, der befinder sig inden for $\Delta v'$.

Polarisation defineret

I det følgende skal vi betragte det polariserede materiale som en kilde til feltet. I overensstemmelse med vores konvention med mærkning af kildepunkter skal vi, til beskrivelse af materialets polarisationstilstand i punktet r' , indføre en vektor $P(r')$, som er *dipolmomentet per volumen* på dette sted:

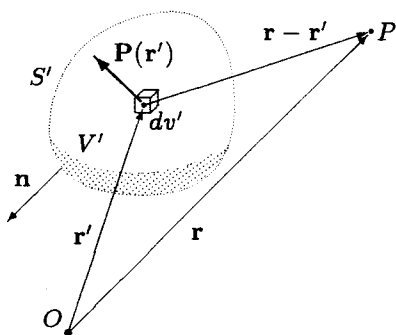
$$P(r') = \frac{\Delta p}{\Delta v'}. \quad (3.2)$$

Vektoren P angiver en *dipolmoment-tæthed* og kaldes den *elektriske polarisation*. Den har dimensionen Cm^{-2} .

3.2 Makroskopisk teori for dielektrika

Vi betragter nu et afgrænset stykke polariseret dielektrikum uden nettoladning. Dielektrikumet er polariseret ved et ydre felt, som eksempelvis stammer fra ladningsfordelinger på passende ledere i nærheden. Dem ser vi i øje-

Potentialet uden for dielektrikumet



Figur 3.2: Ved beregning af det elektriske felt i og om et dielektrikum er det vigtigt at skelne mellem kildepunkt og målepunkt.

blikket bort fra. Vi søger således kun det bidrag til potentialet *uden for* dielektrikumet, som stammer fra polarisationen. Dette bidrag kan beregnes ved hjælp af dipolpotentialet 2.76.

Her må vi først notere, at udtrykket 2.76 gælder under forudsætning af, at dipolen ligger i nulpunktet. I den situation vi nu betragter, se fig. 3.2, kan dipolen være placeret overalt i dielektrikumet, og det er vigtigt nøje at angive kildepunkter og målepunkter. Bidraget til potentialet fra den infinitesimale dipol $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \Delta v'$ skriver vi derfor efter 2.76 udførligt på formen

Dipolpotentialet udførligt

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Delta v'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (3.3)$$

Det samlede potential i punktet $\mathbf{r}$ er integralet af bidragene fra alle dele af dielektrikumets volumen V , altså

Sum af dipolpotentialer

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (3.4)$$

Dette udtryk angiver fysisk en superposition af dipolpotentialer i målepunktet. Vi kan imidlertid give udtrykket en anden fortolkning, hvis det omformes ved hjælp af vektorrelationerne i appendix A.

Hertil bemærker vi først, at der efter A.40 gælder

$$\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (3.5)$$

hvor der afledes efter de mærkede koordinater. Integranden i 3.4 kan derfor skrives

$$\mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.6)$$

Dette udtryk kan omskrives yderligere ved brug af tabel A2:7 på formen

$$\mathbf{F} \cdot \nabla' \varphi = \nabla' \cdot (\varphi \mathbf{F}) - \varphi \nabla' \cdot \mathbf{F}, \quad (3.7)$$

hvor vi sætter $\varphi = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ og $\mathbf{F} = \mathbf{P}$. Integranden bliver da

$$\frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P}. \quad (3.8)$$

Hermed bliver det endelige udtryk for potentialet 3.4

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(-\nabla' \cdot \mathbf{P}) dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.9)$$

Potential fra
dielektriket

Vi har her brugt divergensteoremet til at omforme volumenintegralet af $\nabla' \cdot (\mathbf{P}/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ til et integral over dielektrikets overflade S med den udad rettede normal $\mathbf{n}$.

Det er nu lykkedes at omskrive et enkelt volumenintegral 3.4 til en sum 3.9, som omfatter både et overfladeintegral og et volumenintegral. Det ser ikke ud som en forenkling og kan synes at være et sløjt resultat af anstrengelserne. Sagen er dog, at udtrykket 3.9 direkte kan fortolkes fysisk. Ved sammenligning med 2.33 ser man nemlig, at det helt svarer til potentialet fra en overfladeladningstæthed $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ og en volumenladningstæthed $-\nabla' \cdot \mathbf{P}$. Disse skalare størrelser bestemmes af polarisationen $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$ og ses let at have de rigtige dimensioner Cm^{-2} og Cm^{-3} .

Polarisations-
ladninger

Man kan understrege ladningsaspektet ved at indføre betegnelserne

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}, \quad \rho_P = -\nabla' \cdot \mathbf{P}. \quad (3.10)$$

Størrelserne σ_P og ρ_P kaldes *polarisations-ladningstætheder*. Vi kan umiddelbart forbinde σ_P med de ukompenserede ladninger på figur 3.1. Det forekommer også plausibelt, at der ved inhomogen polarisation kan optræde en volumenladningstæthed ρ_P .

Fri og bunden
ladning

Polarisationsladningerne er reelle fysiske ladninger. De adskiller sig fra de frie ladninger på en leder ved at være knyttet til bestemte molekyler. Polarisationladninger omtales derfor ofte som *bundne ladninger*. En isolator kan dog godt, udover polarisationsladning, have en 'fri' nettoladning, som ikke er særlig bevægelig.

Den totale polarisationsladning Q_P af et dielektrikum er nul. Dette er selvindlysende ud fra det molekylære billede, men følger også af

$$Q_P = \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da' - \int_V \nabla' \cdot \mathbf{P} dv', \quad (3.11)$$

idet volumenintegralet med divergensteoremet omskrives til et overfladeintegral, som netop annullerer det første.

Det samlede
potential

Det samlede potential i punktet $\mathbf{r}$ uden for dielektriket er summen af bidragene fra polarisationsladningerne $\sigma_P(\mathbf{r}')$ og $\rho_P(\mathbf{r}')$ og bidragene fra kendte ydre ladningsfordelinger $\sigma(\mathbf{r}')$ og $\rho(\mathbf{r}')$ (idet vi overser, at det kan være et problem, hvorfra disse er 'kendte'). Vi finder altså

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma + \sigma_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho + \rho_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (3.12)$$

Overfladeintegralet kan her gå over alle flader og volumenintegralet over hele rummet. Der kommer jo intet bidrag, hvor ladningstæthederne er nul.

Tilsvarende kan vi beregne den samlede feltstyrke i $\mathbf{r}$ i analogi med 2.17:

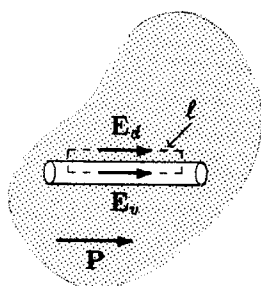
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{(\sigma + \sigma_P)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\rho + \rho_P)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'. \quad (3.13)$$

Udtrykkene 3.12 for φ og 3.13 for $\mathbf{E}$ har indtil nu kun været gyldige i punkter uden for dielektriket. Søger vi feltet inde i dielektriket, kommer vi i vanskeligheder. På grund af stoffets molekyllære struktur vil feltet være voldsomt fluktuerende, højt i nærheden af atomkernerne, lavt ude i atomernes elektronskyer. For elektrostatik i makroskopisk skala har disse fluktuationer ingen interesse, og vi definerer derfor feltstyrken $\mathbf{E}_d$ inde i dielektriket som en *middelværdi* taget over makroskopiske dimensioner.

For at omsætte denne definition til praksis, hefter vi os ved, at det statiske elektriske felt i dielektriket må være konservativt, som det var det i vacuum. Dette udtrykkes ved, at cirkulationen af $\mathbf{E}$ er nul

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0. \quad (3.14)$$

Vi forestiller os nu et homogent polariseret, isotropt dielektrikum. I et sådant, se afsnit 3.4, er feltstyrken $\mathbf{E}_d$ parallel med polarisationen. I dielektriket udskærer vi et langt, tyndt rør i polarisationens retning (fig. 3.3). Et punkt inde i røret ligger uden for dielektriket, og feltstyrken $\mathbf{E}_v$ (v for



Figur 3.3: Det elektriske feltstyrke inde i et polariseret isotropt dielektrikum er identisk med feltstyrken inde i et tyndt rør udskåret i polarisationens retning.

vacuum) i punktet kan følgelig beregnes af 3.13. Hvis røret er langt, kan vi se bort fra polarisationsladningerne på endefladerne, og $\mathbf{E}_v$ bliver overalt den samme og på grund af symmetrien om rørets akse parallel med denne. Vi udnytter nu cirkulationsbetingelsen 3.14 på den i fig. 3.3 viste rektangulære vej, hvis langsider er $\pm \ell$ og hvor kortsiderne ikke bidrager til cirkulationen. Ude i dielektriket fluktuerer feltstyrken som sagt voldsomt, men bidrager i middel til cirkulationen med $\mathbf{E}_d \cdot \ell$. For hele cirkulationen finder vi

$$\mathbf{E}_d \cdot \ell - \mathbf{E}_v \cdot \ell = (\mathbf{E}_d - \mathbf{E}_v) \cdot \ell = 0, \quad (3.15)$$

som, da $\ell \parallel \mathbf{E}$ er ensbetydende med, at

$$\mathbf{E}_d = \mathbf{E}_v. \quad (3.16)$$

Hermed har vi vist, at middelfeltstyrken i materialet er identisk med den feltstyrke, vi ville beregne med 3.13, og som vi derfor kan anse for at være gyldig både uden for og inden i et dielektrikum.

Den samlede feltstyrke

Feltet inde i dielektriket

Feltet stadig konservativt

Middelfeltet måles i et tyndt rør

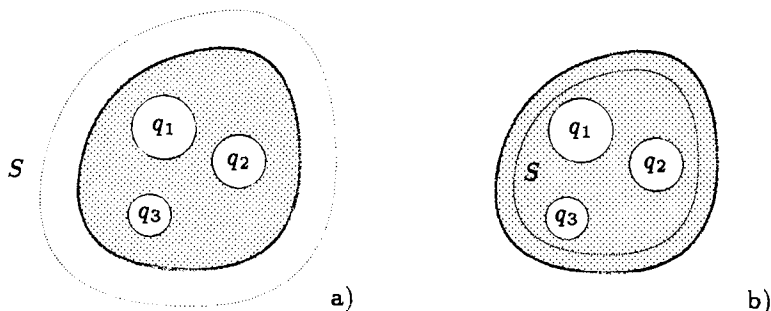
Beregning af middelfeltet

3.3 Gauss lov i et dielektrikum

*Et dilemma
løses*

Som allerede nævnt er det en vanskelighed ved formalismen i forrige afsnit, at beregning af det elektriske felt ved 3.12 eller 3.13 forudsætter, at polarisationen $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$ er kendt. Dette er normalt ikke tilfældet, da polarisationen afhænger af det samlede elektriske felt, altså inklusive feltet fra dielektriket, som vi netop behøver for at beregne $\mathbf{P}$ osv. Vi skal i dette afsnit anviser en metode til at komme uden om dette problem.

Hertil vender vi tilbage til Gauss' lov 2.45, som anvendt i vacuum og på ledere gav værdifulde oplysninger om den elektriske feltstyrke. Vi kan også



Figur 3.4: a) I et dielektrikum er der indesluttet ledere, som hver bærer fri ladning. En Gaussflade S er lagt helt uden for dielektriket. b) Samme situation, men med Gaussfladen lagt helt inden for dielektriket.

anvende Gauss' lov, når der er dielektrika tilstede, hvis blot vi medregner polarisationsladningerne i den totale ladning inden for en Gaussflade.

*Gauss' lov og
polarisations-
ladninger*

Vi betragter først situationen vist i fig. 3.4, hvor der i et dielektrikum er indesluttet frie ladninger $q_1, q_2, \dots$, som vi kan antage sidder på overfladerne $S_1, S_2, \dots$ af visse ledere. Vi lægger nu en Gaussflade S , se fig. 3.4a, som helt omgiver dielektriket. Lad $Q = q_1 + q_2 + \dots$ være den totale indesluttede frie ladning og Q_P tilsvarende polarisationsladningen. Gauss' lov giver da

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q + Q_P}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (3.17)$$

idet den samlede polarisationsladning Q_P på dielektriket efter 3.11 er nul. Det kan godt tænkes, at dielektriket har påvirket feltstyrken i rummet, men det er sket på en sådan måde, at overfladeintegralet i 3.17 bliver, som det ville være uden dielektrikum tilstede.

Det er anderledes i situationen fig. 3.4b, hvor Gaussfladen ligger inde i dielektriket, men hvor alt ellers er som før. Vi finder igen

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q + Q_P}{\epsilon_0}, \quad (3.18)$$

men nu kræver det en særlig overvejelse at bestemme polarisationsladningen. Vi kan uden skade undlade at mærke kildepunkterne og 3.11 giver:

$$Q_P = \oint_{S_1 + S_2 + \dots} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dv. \quad (3.19)$$

Gaussfladen S er en matematisk flade. Der er således ikke nogen fysisk overflade med polarisationsladning ved S , som derfor ikke bidrager til integralet over overfladeladningstæthederne.

Volumenintegralet i 3.19 går over dielektrik特 inden for Gaussfladen. Vi kan vi rent matematisk transformere til et overfladeintegral af $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ over de flader som begrænser V . Dvs. $S_1, S_2, \dots$ og S . Det er oplagt, at integralerne over $S_1, S_2, \dots$ vil kansellere de tilsvarende i det første integral. Men tilbage bliver integralet over S således, at

$$Q_P = - \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (3.20)$$

Indføres denne polarisationsladning i 3.18, finder vi efter rearrangement

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} \, da = Q. \quad (3.21)$$

Vektoren $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ i integranden er en betydningsfuld ny feltvektor, som kaldes den *elektriske fluxtæthed* og betegnes med symbolet $\mathbf{D}$. Altså

En ny feltvektor $\mathbf{D}$

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.} \quad (3.22)$$

Enheden for elektrisk fluxtæthed $\mathbf{D}$ er den samme som enheden for polarisation $\mathbf{P}$, altså Cm^{-2} . Ligningen 3.21 kan nu skrives

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q,} \quad (3.23)$$

som er den endelige formulering af *Gauss' lov* på integral form. Den er generelt gyldig og altså ikke begrænset til situationer som dem, der er vist på fig. 3.4

Man betegner strømmen af $\mathbf{D}$ gennem en flade S som den *elektriske flux* med symbolet Ψ , altså

$$\Psi = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a}. \quad (3.24)$$

Udtrykt i ord siger Gauss' lov da, at *den samlede elektriske flux gennem en lukket flade, er lig den frie ladning, som er indesluttet af fladen.*

Gauss' lov på endelig form

Betragter vi en rumladningstæthed $\rho(\mathbf{r})$ kan Gauss' lov skrives

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \, dv. \quad (3.25)$$

I lighed med den omskrivning vi foretog i afsnit 2.5, kan vi heraf med divergensteoremet udlede den differentielle form af Gauss' lov:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}),} \quad (3.26)$$

som er den 1. Maxwell ligning i sin endelige form.

Fordelen ved at indføre vektoren $\mathbf{D}$ i Gauss' lov 3.23, 3.25 eller 3.26, er helt klart, at kun den frie ladning Q eller den frie ladningstæthed ρ optræder i disse ligninger. Feltet $\mathbf{D}$ afhænger således kun af de frie ladninger, mens $\mathbf{E}$ og $\mathbf{P}$ afhænger af både frie ladninger og polarisationsladninger.

I praksis forekommer mange situationer, hvor fordelingerne af fri ladning er kendt. Den elektriske fluxtæthed $\mathbf{D}$ kan da ofte bestemmes ved brug af ovennævnte ligninger. Hvordan man derefter finder også felterne $\mathbf{E}$ og $\mathbf{P}$ fremgår af næste afsnit.

3.4 Dielektriske materialer

Materialers
dielektriske
egenskaber

Et dielektrikum polariseres, når det udsættes for et elektrisk felt. Hvor meget og hvordan afhænger af feltstyrken, men også af det dielektriske materiales egenskaber. Fundamentalt er det selvfølgelig materialets opbygning og dets molekyler, der bestemmer egenskaberne, men til makroskopiske formål er det tilstrækkeligt at kende nogle få relationer mellem feltstørrelserne, såkaldte *materialeligninger*, som kan bestemmes eksperimentelt.

Der findes stoffer, som kan bevare en elektrisk polarisation efter at det ydre felt, som frembragte den, er fjernet. Et sådant stof kaldes et *elektret* i analogi med en *magnet*. Men sædvanligvis forsvinder polarisationen, når det elektriske felt fjernes, idet der for mange stoffer er tale om en simpel proportionalitet mellem $\mathbf{P}$ og $\mathbf{E}$ uanset retningen. Egenskaberne af sådanne *lineære, isotrope* dielektrika kan vi udtrykke ved materialeligningen

$$\boxed{\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}}, \quad (3.27)$$

hvor den dimensionsløse konstant χ kaldes den *elektriske susceptibilitet*. Ligning 3.22 giver os da en materialeligning, som forbinder $\mathbf{D}$ og $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}. \quad (3.28)$$

Vigtigt!

Denne overordentlig vigtige relation skrives oftest på formen

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}}, \quad (3.29)$$

hvor konstanten

$$\boxed{\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi)} \quad (3.30)$$

Permittivitet
defineret

kaldes materialets *permittivitet*. Permittivitet har samme enhed som ϵ_0 , altså Fm^{-1} . Af bekvemlighedsgrunde anvender man hyppigt den *relative permittivitet* ϵ_r , som er dimensionsløs og defineret ved

$$\boxed{\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi}, \quad (3.31)$$

der også kaldes stoffets *dielektricitetskonstant*. Når χ og ϵ her omtales som konstanter menes, at de ikke afhænger af $\mathbf{E}$ -feltets størrelse. Kun for de allerhøjeste feltstyrker kan der optræde en slags mætning sådan, at parametrene må opfattes som funktioner $\chi(E)$ eller $\epsilon(E)$ af feltets størrelse. For høje feltstyrker, for gode isolatorer typisk omkring 10^7Vm^{-1} , kan det også ske, at elektroner helt løsnes fra molekylerne, og stoffet bliver ledende, hvilket ytrer sig ved et *elektrisk gennemslog*. Desuden skal det understreges, at de dielektriske parametre kan afhænge af temperatur og tryk. For højfrekvente elektriske svingninger kan de dielektriske parametre desuden variere betydeligt med frekvensen, hvilket spiller en stor rolle for mange optiske fænomener. Tabel 3.1 giver den relative permittivitet for nogle få materialer.

I denne bog møder vi fortrinsvis isotrope, lineære dielektrika. Det skal dog nævnes, at der findes mange stoffer, fortrinsvis krystaller, hvis elektriske egenskaber afhænger af retningen, altså *anisotrope* stoffer. For dem gælder der imidlertid ofte andre lineære sammenhænge, idet

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (3.32)$$

Temperatur,
tryk og
frekvens
spiller ind

Her er χ og ϵ nu tensorer

ϵ og χ som
tensorer

$$\chi = \begin{Bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{Bmatrix}. \quad (3.33)$$

Disse tensorer, der kan vises at være symmetriske, er forbundet ved ligningen

$$\epsilon = \epsilon_0(\mathbf{1} + \chi). \quad (3.34)$$

hvor $\mathbf{1}$ er enhedstensoren. Tensorerne χ og ϵ kaldes henholdsvis *susceptibilitetstensoren* og *permittivitetstensoren*.

Tabel 3.1: Relative permittiviteter

Materiale	ϵ_r	Materiale	ϵ_r
Gasser, 0°, 10⁵ Pa:		Plastic:	
Luft	1.00059	Nylon	3.33
Carbondioxid	1.00099	Polyethylen	2.35
Methan	1.00094	Polyvinylchlorid	3.3
		Teflon	2.2
Væsker:		Faste stoffer:	
CCl ₄	2.4	Kvarts	4.3
Ethanol	24.3	Glas	4-7
Methanol	32.6	Porcellæn	6-8
Vand, 20°	80.2	Calcium carbonat	6.2
Vand, 100°	55.7		

Kilde: Handbook of Chemistry and Physics (1980).

3.5 Feltet i dielektrika

Dette afsnit viser nogle eksempler, hvor den formelle teori for dielektrika anvendes i situationer, som ofte mødes i praksis. Vi begrænser os her til materialer, som er lineære og isotrope.

E -felt
reduceres

▷ Punktladning: Det er instruktivt at se på felterne omkring en punktladning q , som er anbragt i et udstrakt dielektrikum med permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Af symmetri Grunde er feltet radiale og en Gauss-kugle med radius r og centrum i q giver umiddelbart

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}, \quad (3.35)$$

hvoraf

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{q}{4\pi \epsilon r^2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2}, \quad P = \chi \epsilon_0 E = \frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi \epsilon_r r^2}. \quad (3.36)$$

Som det ses er E -feltet reduceret en factor ϵ_r i forhold til vacuumtilfældet. Denne svækkelse kan vi anskueliggøre ved følgende argument: Der er ikke nogen volumenladningstæthed da $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ undtagen i centrum, hvor feltet divergerer. Omkring punktladningen udskærer vi derfor et lille kugleformet hulrum med radius r . På kuglefladen opstår der da en overfladetæthed $\sigma = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P$ hvor $\mathbf{n}$ er den bort fra centrum rettede normal. Kuglefladens

samlede ladning bliver $-q(\epsilon_r - 1)/\epsilon_r$ og den samlede ladning som mærkes udefra er da

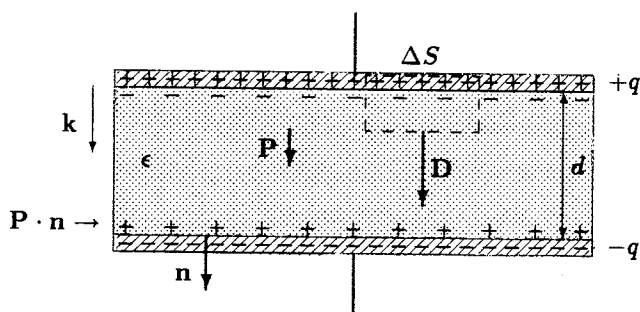
$$q' = q - q \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} = \frac{q}{\epsilon_r}. \quad (3.37)$$

Argumentet viser altså, at den samlede ladning (fri + polarisationsladning) reduceres med faktoren $1/\epsilon_r$ i overensstemmelse med E -feltets reduktion efter 3.36. ◁

Pladekonden-
sator med
dielektrikum

▷ Pladekondensatoren: Vi ser dernæst på en pladekondensator, hvor plademellemrummet helt er udfyldt med dielektrikum med permittivitet ϵ . Kondensatoren er udstrakt med pladearealet A og pladeafstanden d er lille sådan, at der kan ses bort fra randeffekter. Pladerne har ladninger $\pm q$. Vi ønsker at bestemme felterne $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ og $\mathbf{P}$ overalt i dielektrikum.

Af symmetri Grunde må felterne være vinkelrette på pladerne. Vi angiver denne retning med en enhedsvektor $\mathbf{k}$, se fig. 3.5. Nedenstående betragtninger gælder dielektrikets øverste flade, men kan, med de nødvendige fortegnssændringer, gennemføres analogt for den nederste.



Figur 3.5: Kondensator med dielektrikum.

Vi bestemmer først $\mathbf{D}$, idet vi lægger en Gauss-dåse med låget i den øverste metalplade og bunden i dielektrikum. Er arealet af top og bund ΔS giver Gauss' lov 3.23:

$$D\Delta S = \frac{q}{A}\Delta S \Rightarrow \mathbf{D} = \frac{q}{A}\mathbf{k} = \sigma\mathbf{k}, \quad (3.38)$$

hvor $\sigma = q/A$ angiver overfladetætheden af fri ladning på metalpladen. Vi bemærker, at dåsen kan gøres høj eller lav $< d$ uden at påvirke dette resultat. $\mathbf{D}$ er således uafhængig af, hvor mellem pladerne den bestemmes, hvilket var venteligt, da feltet er homogent.

Feltstyrken $\mathbf{E}$ kan nu bestemmes af 3.29, altså

$$\mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon A}\mathbf{k} = \frac{\sigma}{\epsilon}\mathbf{k}, \quad (3.39)$$

hvor man bemærker, at E er en faktor $1/\epsilon_r$ mindre end hvis der, med samme ladning q , var vacuum mellem pladerne.

Feltet $\mathbf{P}$ bestemmes af eksempelvis 3.22

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0\mathbf{E} = \mathbf{E}(\epsilon - \epsilon_0) = \frac{q}{A}\mathbf{k} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right). \quad (3.40)$$

E -felt
reduceres

Da feltet er homogent, er der ikke nogen volumentæthed af polarisationsladning. Derimod opstår der på dielektrikets overflade en fladetæthed $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ af polarisationsladning. Her er $\mathbf{n}$ rettet ud af dielektriket, dvs. $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ på den øverste flade. Heraf følger

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{k} = -\frac{q}{A} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right). \quad (3.41)$$

Polarisationsladningen er negativ, som den skal være. Den ligger fysisk umiddelbart op ad metalpladens ladning, men der er selvfølgelig ikke tale om, at fri og bunden ladning forenes og neutraliserer hinanden. De forbliver på deres respektive materialer. Men beregner man E -feltet fra den samlede ladning, jvf. 3.18, finder man

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma + \sigma_p}{\epsilon_0} \mathbf{k} = \frac{\sigma - \sigma(1 - \epsilon_0/\epsilon)}{\epsilon_0} \mathbf{k} = \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{k}, \quad (3.42)$$

i overensstemmelse med 3.39.

Da E -feltet er reduceret en faktor ϵ_r i forhold til vacuumtilfældet, reduceres også kondensatorens spænding V for samme ladning Q med denne faktor. Efter 2.153 bliver capacitansen da

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_v/\epsilon_r} = \epsilon_r C_v, \quad (3.43)$$

hvor index v refererer til vacuumværdierne. Indskydning af et dielektrikum i en kondensator forøger altså capacitansen med faktoren ϵ_r , et forhold som har stor praktisk betydning. ◁

▷ Feltet i hulrum: Vi har tidligere nævnt, at det makroskopiske elektriske felt inde i et dielektrikum er middelværdien af det fluktuerende mikroskopiske felt og, at det kan bestemmes ved at benytte udtrykket 3.13 i et tyndt rør udskåret i polarisationens retning.

For yderligere at belyse begrebet feltstyrke inde i et dielektrikum, skal vi undersøge, hvad der sker, når vi udskærer et vilkårligt formet hulrum omkring punktet $\mathbf{r}$, og derefter lader hulrummets volumen gå mod nul. Vi forenkler problemet ved at antage, at dielektriket er homogent polariseret. Inde i hulrummet kan vi beregne feltstyrken $\mathbf{E}_c$ ved hjælp af 3.13. Men da vi har udskåret et stykke af dielektriket, er dettes overflade forøget med inderfladen S af hulrummet. Feltstyrken i hulrummet må følgelig sammensættes af et bidrag $\mathbf{E}_o$ fra de frie externe ladninger, et bidrag $\mathbf{E}_d$ fra polarisationsladninger på dielektrikets ydre overflade og endelig et bidrag $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ fra hulrummets inderflade, idet normalen $\mathbf{n}$ peger ind i dette:

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_d + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da'. \quad (3.44)$$

Når fladen S trækker sig sammen om punktet $\mathbf{r}$, vil integralet i almindelighed ikke forsvinde, og $\mathbf{E}_c$ vil derfor afhænge af hulrummets form. ◁

▷ Cylindriske hulrum: Som allerede omtalt i afsnit 3.2 forsvinder det sidste led i 3.44, når hulrummet er et snævert rør lagt i polarisationens retning. Bidragene fra de krumme flader forsvinder, fordi $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = 0$, og bidragene fra

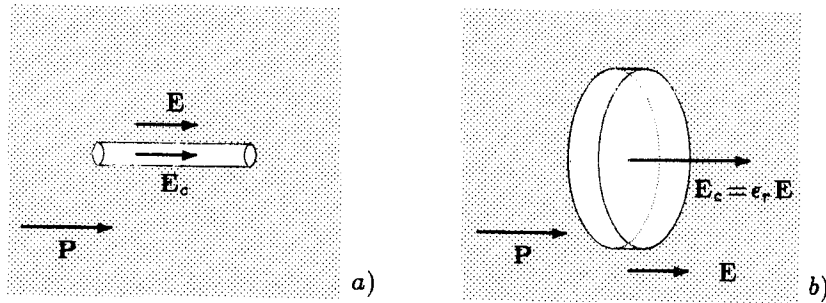
*Polarisations-
ladning på
overfladen*

*E-felt fra
samlet ladning*

*Capacitansen
forøges*

*Felt i vilkårligt
hulrum*

*Felt i tyndt
rør*



Figur 3.6: Feltet i cylindriske hulrum i dielektrika. Med de viste orienteringer gælder: a) I et langt tyndt rør er feltstyrken lig feltstyrken i dielektriket. b) I en flad dåse, er feltstyrken ϵ_r gange feltstyrken i dielektriket.

endefladerne kan gøres vilkårligt små ved at gøre røret langt og snævert. Af 3.44 følger da

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_d = \mathbf{E}, \quad (3.45)$$

hvor $\mathbf{E}$ betegner det makroskopiske felt i dielektriket i overensstemmelse med 3.16.

*Felt i flad
dåse*

Har hulrummet i stedet form som en flad dåse, med endefladerne vinkelrette på $\mathbf{P}$ (se fig. 3.6b), vil polarisationsladningerne $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ give et væsentligt bidrag. Inde i dåsen kan man opfatte polarisationsladningerne som et elektrisk dobbeltlag (sml. p. 24) og efter 3.44 finder man

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_d + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \mathbf{E} = \epsilon_r \mathbf{E}. \quad (3.46)$$

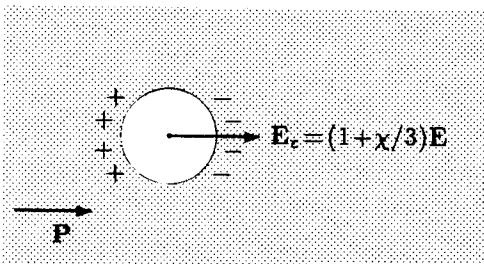
Polarisationsladningerne forstærker altså i dette tilfælde feltet i hulrummet med faktoren ϵ_r . <

*Felt i kugle-
formet hulrum*

▷ Kugleformet hulrum: Her må man direkte udregne fladeintegralet i 3.44. Af hensyn til en senere anvendelse (se afsnit 3.8) skal vi gennemføre denne beregning for det tilfælde, hvor polarisationen i dielektriket kan betragtes som fastfrosset, dvs. upåvirket af hulrummets tilstedeværelse. Vi lægger nulpunktet i kuglens centrum sådan, at integralet bliver

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} da'. \quad (3.47)$$

Ladningsfordelingen er rotationssymmetrisk omkring en akse i $\mathbf{P}$'s retning, og kun feltkomponenten i denne retning bidrager til integralet. Med $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} =$



Figur 3.7: Beregning af feltet i et sfærisk hulrum.

$-P \cos \theta$, projektfaktoren $\cos \theta$ og arealelementet $da' = 2\pi r'^2 \sin \theta d\theta$ bliver

$$E_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \int_0^\pi 2\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (3.48)$$

Det samlede felt i kuglens centrum bliver da efter 3.44

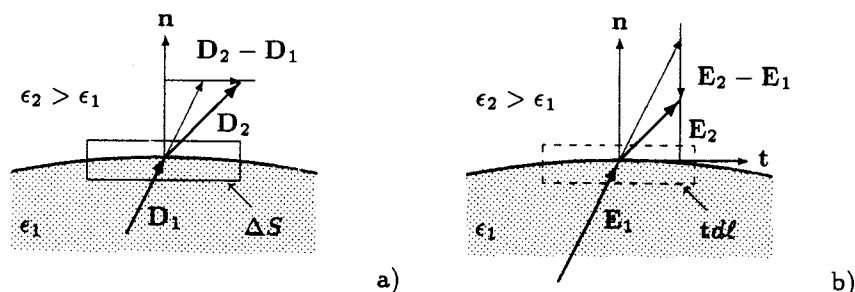
Felt i kugle

$$E_c = E_o + E_d + \frac{P}{3\epsilon_0} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (3.49)$$

I afsnit 3.7 skal vi beregne feltet i det sfæriske hulrum, når polarisationen er påvirket af dets tilstedeværelse. ◁

3.6 Grænsebetingelser for det elektriske felt

Man møder, eksempelvis inden for elektrotekniken eller optiken, ofte problemer, hvor man må vide, hvordan feltvektorerne E og D ændrer sig, når man passerer en grænseflade mellem to medier. Disse kan være to dielektrika med forskellig permittivitet eller en leder og et dielektrikum. Det ene medium er ofte vacuum, der kan betragtes som et dielektrikum med permittivitet ϵ_0 .



Figur 3.8: a) En Gauss-dåse på grænsen mellem to dielektrika. b) En lukket vej på grænsen mellem to dielektrika.

Grænsefladen mellem de to medier behøver ikke at være plan. Vi vil dog gå ud fra, at tilstrækkelig små stykker af grænsefladen kan betragtes som plane. Grænsebetingelserne for D og E udledes af henholdsvis den første og tredje Maxwell ligning på integral form, altså udtrykkene 3.23 og 3.14

Grænseflader

$$\oint_S D \cdot da = Q, \quad \oint E \cdot d\ell = 0. \quad (3.50)$$

For at finde grænsebetingelsen for D ser vi på et lille stykke af skillefladen mellem de to dielektrika, 1 og 2. Vi vil antage, at der på grænsefladen kan forekomme en fladetæthed σ af fri ladning. I overfladen lægger vi en meget flad Gauss-dåse (se fig. 3.8a) sådan, at toppen er i medium 2 og bunden i medium 1. Top og bund har begge areal ΔS og normalvektorer $n_2 = n$ og $n_1 = -n$, hvor n er grænsefladens normal rettet fra 1 mod 2.

En eventuel fri volumenladning i medierne inden for dåsen kan gøres vilkårlig lille ved at gøre dåsen tilstrækkelig tynd. Tilbage kan der imidlertid være en fri ladning $\sigma \Delta S$ fra overfladen. Gauss' lov giver da

$$D_2 \cdot n_2 \Delta S + D_1 \cdot n_1 \Delta S = \sigma \Delta S, \quad (3.51)$$

der også kan skrives

$$\boxed{(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma.} \quad (3.52)$$

D: Normalkomponent uændret for $\sigma = 0$

Ligning 3.52 udtrykker, at springet i *normalkomponenten* af $\mathbf{D}$, når vi bevæger os fra medium 1 til medium 2, er tætheden af fri ladning på grænsefladen. Er der, som det ofte vil være tilfældet, ingen fri overfladeladning, er normalkomponenten af $\mathbf{D}$ uændret ved passage af overfladen.

Grænsebetingelsen for $\mathbf{E}$ findes tilsvarende ved at benytte, at feltets cirkulation er nul. Vi indlægger en rektangulær vej, der krydser grænsefladen som vist på fig. 3.8b. Rektanglets lange sider med længden dl er parallelle med grænsefladen og har en retning, som vi kan angive med en (enheds)tangentvektor $\mathbf{t}$. Bidragene til cirkulationen fra rektanglets korte sider kan vi gøre forsvindende ved at gøre rektanglet smalt med den supplerende, fysisk rimelige antagelse, at feltet ikke bliver uendeligt på grænsefladen. Vi kan derfor skrive cirkulationen langs den rektangulære vej som

$$\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t} dl + \mathbf{E}_1 \cdot (-\mathbf{t}) dl = 0, \quad (3.53)$$

eller

$$\boxed{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{t} = 0.} \quad (3.54)$$

E: Tangentialkomponent uændret

Ligning 3.54 udtrykker, at *tangentialkomponenten* af $\mathbf{E}$ er uændret, når vi bevæger os fra det ene medium til det andet. Udtrykket skal gælde for ethvert rektangel, og derfor også for enhver tangentvektor til grænsefladen. Differensen $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)$ må derfor være vinkelret på grænsefladen, dvs. parallel med dennes normalvektor $\mathbf{n}$. Grænsebetingelsen 3.54 kan derfor også skrives

$$\boxed{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0.} \quad (3.55)$$

Vi har tidligere fundet, at den elektriske feltstyrke inde i en leder er nul, og at den lige uden for lederen er vinkelret på dennes overflade. Hvis det ene af de to dielektriske medier betragtet her, eksempelvis medium 1, erstattes med en leder, har vi allerede i afsnit 2.6 konkluderet, at $\mathbf{E}$ -feltet her er nul. Grænsebetingelsen 3.55 siger da, at $\mathbf{E}_2 \times \mathbf{n} = 0$, altså at $\mathbf{E}$ -feltet er vinkelret på lederens overflade, i overensstemmelse med diskussionen i afsnit 2.6. Om $\mathbf{D}$ -feltet i lederen kan vi ikke umiddelbart udtale os, men vi vil antage, at det er proportionalt med $\mathbf{E}$ -feltet og derfor nul. Grænsebetingelsen 3.52 giver da $\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} = \sigma$, hvilket for et isotropt materiale er ensbetydende med $D_2 = \sigma$.

Potential kontinuert

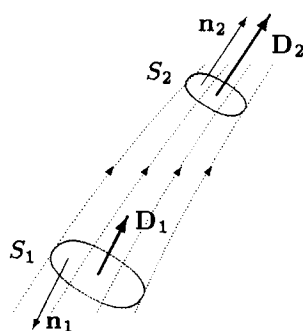
Det elektriske potential φ må være kontinuert gennem en grænseflade. Var dette ikke tilfældet ville $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ betyde uendelig høj feltstyrke ved grænsefladen, hvilket er ufysisk. Ved grænsefladen gælder altså

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2.} \quad (3.56)$$

Elektrisk flux bevaret

Vi har tidligere ved 3.24 defineret elektrisk flux som strømmen af $\mathbf{D}$ gennem en flade. Vi skal nu illustrere, at elektrisk flux er bevaret i områder af rummet, hvor der ikke er nogen fri ladning. Hertil tegner vi feltlinier for $\mathbf{D}$ -feltet med en passende høj tæthed, sådan at vi med dem som frembringere kan afgrænse et *fluxlinierør* (se fig. 3.9). Af røret udskæres et stykke, idet det afsluttes med endefladerne S_1 og S_2 . Af Gauss' lov 3.23 følger da

$$\int_{S_1} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_1 da + \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_2 da = 0. \quad (3.57)$$



Figur 3.9: Et fluxlinierør. Den elektriske flux ind i røret er lig fluxen ud af røret.

Integralet omfatter kun endefladerne, idet der ikke er fluxlinier, som krydser rørets sider. Dets værdi er nul, fordi den af røret indesluttede fri ladning efter forudsætningen er nul. I 3.57 angiver n_1 og n_2 de ud af røret rettede normaler til endefladerne. Vi kan erstatte n_1 med den indad rettede normal $n'_1 = -n_1$ og finder da

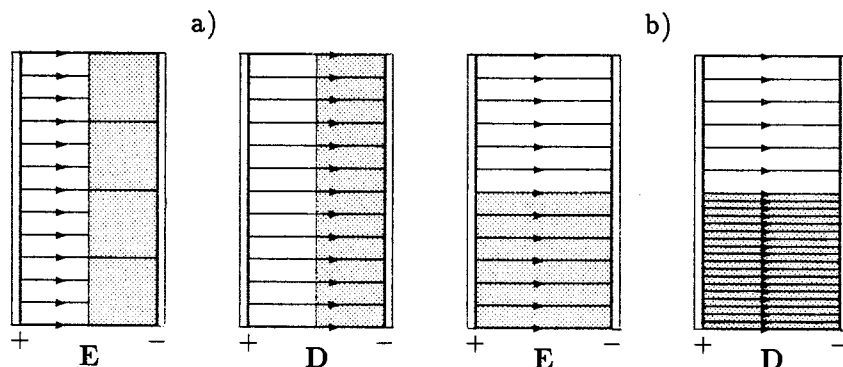
$$\int_{S_1} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}'_1 da = \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_2 da, \quad (3.58)$$

dvs. at den elektriske flux ind i røret er den samme som den elektriske flux ud af røret.

Er der fri nettoladning tilstede, vil fluxen ind være forskellig fra fluxen ud. $\mathbf{D}$ -linierne kan således ende og begynde på frie ladninger, men eksempelvis ikke i et ladningsfrit dielektrikum. Dette til forskel fra $\mathbf{E}$ -linierne, som kan ende og begynde på både frie ladninger og på polarisationsladninger.

D-linier og E-linier

▷ Dielektrikum mellem kondensatorplader: Forskellen mellem $\mathbf{E}$ -liniernes og $\mathbf{D}$ -liniernes opførsel ved en grænseflade kan studeres på fig. 3.10, som viser en pladekondensator delvis fyldt med dielektrikum. I tilfælde a) er felterne vinkelrette på grænsefladen, og $\mathbf{D}$ -linierne passerer i uændret antal. Antallet af $\mathbf{E}$ -linier i dielektrikumet er ϵ_r gange mindre end i vacuum, da $E = D/\epsilon_r$. I tilfælde b) er felterne parallelle med grænsefladen og efter 3.54 er $\mathbf{E}$ -feltet det samme på begge sider af grænsefladen. Her løber $\mathbf{D}$ -linierne i dielektrikumet ϵ_r gange tættere end i vacuum. ◁



Figur 3.10: $\mathbf{E}$ -linier og $\mathbf{D}$ -linier ved grænseflader.

3.7 Laplaces ligning med dielektrika

Med den teori, som er fremstillet i det foregående afsnit, kan man i princippet behandle meget almene elektrostatiske problemer, hvor der på én gang forekommer frie ladninger, ledere og isolatorer. For en fastlagt geometri kræves af yderligere oplysninger kun materialeligningerne $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ for hvert dielektrikum.

Brug Gauss' lov hvis muligt!

De grundligninger, som bestemmer det elektrostatiske felt, er den 1. og den 3. Maxwell ligning. I mange tilfælde med en passende symmetri og simpel geometri med planer, cylindre eller kugler anvendes ligningerne med fordel på integral form. Altså

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q, \quad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0. \quad (3.59)$$

Sammen med materialeligningerne

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) && \text{vacuum} \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) && \text{dielektrika} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 && \text{ledere} \end{aligned} \quad (3.60)$$

bestemmer disse ligninger fuldstændigt det elektriske felt.

Differential-ligninger plus randbetingelser

I andre tilfælde er det mere hensigtsmæssigt at anvende Maxwell ligningerne på differentiell form, altså

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}), \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.61)$$

men disse ligninger må suppleres med deres overfladeformer 3.52 og 3.55, altså

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} &= \sigma \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ lederoverflader} \quad \left. \begin{aligned} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ isolatoroverflader.} \quad (3.62)$$

Gæt og prøv metoden

Man kan vise, at det her præsenterede problem kun har én løsning, i lighed med det simplere problem uden dielektrika, som blev behandlet i afsnit 2.9. Dette har stor betydning, da man ofte er henvist til at gætte og prøve sig frem til denne eneste løsning.

I mange tilfælde har man den simplifikation, at ϵ er en skalar, som er konstant i hvert dielektrikum. Med $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ har man

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (3.63)$$

og, da $\mathbf{E}$ er rotationsfri,

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi. \quad (3.64)$$

Disse ligninger medfører, at

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (3.65)$$

Dette er Poissons ligning 2.101, hvor blot ϵ_0 til forskel fra vacuumtilfældet er erstattet med ϵ . Det understreges igen, at ρ er tætheden af fri ladning. I de fleste tilfælde er der ikke nogen fri ladning i et dielektrikum, sådan at

$\rho = 0$. Der kan være fri ladning i form af isolerede punktladninger eller på overfladen af ledere, men inde i dielektrik特et gælder overalt Laplanceligningen

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0.} \quad (3.66)$$

Ved løsningen af denne type af elektrostatiske problemer kan man da i hvert dielektrikum søge løsninger til Laplanceligningen, som så sammenføjes på grænsefladerne ved hjælp af grænsebetingelserne fra forrige afsnit. Vi skal nedenfor se et eksempel på anvendelsen af denne metode.

*Laplace
genfundet!*

▷ Dielektrisk kugle i homogent felt: En dielektrisk kugle med radius a er fremstillet af et homogent, isotropt og lineært materiale 2 med permittivitet ϵ_2 . Kuglen er anbragt i et andet, udstrakt dielektrisk medium 1, eksempelvis vacuum eller olie, med permittivitet ϵ_1 . I dette medium var der før kuglens anbringelse et ydre elektrisk felt, som oprindeligt var homogent med feltstyrke E_0 . Kuglen har ingen nettoladning. Vi ønsker at bestemme potentialet i og omkring kuglen.

Hertil anvender vi sfæriske koordinater (r, θ, ϕ) med origo i kuglens centrum og med z -aksen i den oprindelige feltretning. Inspireret af behandlingen af den ledende kugle i et homogent felt, som vi gennemførte i afsnit 2.9, gætter vi på, at potentialet kan udtrykkes som en sum af funktioner af typen

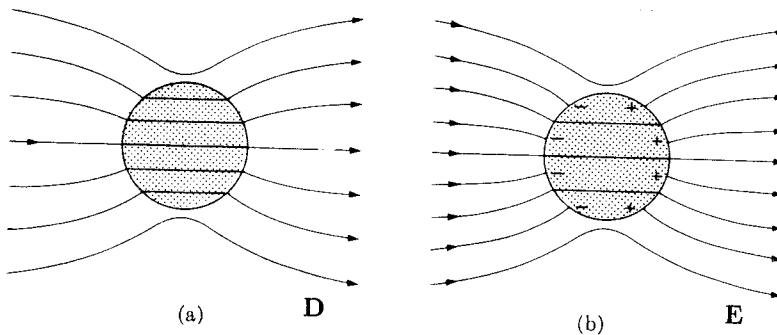
$$\varphi_n(r, \theta) = A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad \text{og} \quad \varphi_n(r, \theta) = C_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta), \quad (3.67)$$

idet rotationssymmetrien omkring z -aksen medfører, at potentialet ikke afhænger af azimuth-vinklen ϕ . Disse funktioner er fødte løsninger til Laplanceligningen, og problemet er løst, hvis vi kan finde en linearkombination af funktionerne 3.67, som opfylder problemets randbetingelser. Vi gætter yderligere på, at dette kan gøres ved blot at anvende funktionerne af lavest mulig orden, dvs. $n = 1$. Funktionerne med $n = 0$ bidrager kun med et uinteressant konstant potential eller med et potential $\sim r^{-1}$, som ville medføre, at kuglen var ladet.

Et godt gæt

Vi antager altså en løsning af formen

$$\begin{aligned} \varphi_e(r, \theta) &= A_1 r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta && \text{uden for kugle,} \\ \varphi_i(r, \theta) &= A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta && \text{inden i kugle.} \end{aligned} \quad (3.68)$$



Figur 3.11: Et oprindeligt homogent elektrisk felt forstyrres af en dielektrisk kugle. I det viste tilfælde har kuglen højere permittivitet end omgivelserne. Bemærk, at kuglen "suger" feltet til sig. a) Fluxlinier, som fortsætter i uændret antal. b) Kraftlinier, som udtyndes i kuglen.

Konstanter
bestemmes

For at bestemme de fire konstanter A_1 , A_2 , C_1 og C_2 benytter vi tre grænsebetingelser, nemlig, at feltet i store afstande skal være det oprindeligt homogene felt E_0 , at potentialet skal variere kontinuert gennem kuglens overflade og at normalkomposanten $D_n = -\epsilon(\partial\varphi/\partial r)$ skal være kontinuert ved overfladen. Som fjerde betingelse skal vi antage, at potentialet overalt i kuglen forbliver endeligt. Et uendeligt potential ville ganske ufysisk medføre uendelig feltstyrke i dielektriket. Bestemmelsen af konstanterne sker da således:

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi_e \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos \theta \Rightarrow \boxed{A_1 = -E_0}$$

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi_i \rightarrow \infty \text{ medmindre } \boxed{C_2 = 0}$$

$$\varphi_e(a) = \varphi_i(a) \Rightarrow -E_0 a + C_1 a^{-2} = A_2 a$$

$$D_{n1}(a) = D_{n2}(a) \Rightarrow \epsilon_1 E_0 + 2\epsilon_1 C_1 a^{-3} = -\epsilon_2 A_2$$

Løses de to sidste ligninger sammen for A_2 og C_1 findes

$$\boxed{A_2 = -\frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_0} \quad \boxed{C_1 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} a^3 E_0.} \quad (3.69)$$

Potentialer
fundet

Heraf findes altså potentialerne

$$\begin{aligned} \varphi_e(r, \theta) &= -E_0 r \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \right) \cos \theta && \text{uden for kugle} \\ \varphi_i(r, \theta) &= -E_0 r \left(\frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \right) \cos \theta && \text{inden i kugle.} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Af udtrykkene 3.70 kan der drages flere interessante konklusioner. Potential inde i kuglen er således proportionalt med $r \cos \theta = z$. Dvs. at feltstyrken her er homogen med størrelsen

$$\mathbf{E}_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \mathbf{E}_0. \quad (3.71)$$

Felt svækkes
i tæt kugle

Hvis $\epsilon_2 > \epsilon_1$ (eksempelvis en dielektrisk kugle i vacuum) sker der altså en reduktion af feltstyrken i forhold til det oprindelige felt. Denne *depolarisation* skyldes oplagt polarisationsladningerne på skillefladen mellem de to dielektrika.

Vi kan også bruge 3.71 til at beregne feltstyrken i et sfærisk hulrum. Vi skal blot sætte $\epsilon_2 = \epsilon_0$ og finder

$$\mathbf{E}_c = \frac{3\epsilon_r}{1 + 2\epsilon_r} \mathbf{E}_0. \quad (3.72)$$

Dette felt er forskelligt fra feltet 3.78 som, efter indsættelse af $\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}$, giver

$$\mathbf{E}_c = \frac{\epsilon_r + 2}{3} \mathbf{E}_0. \quad (3.73)$$

Forskellen på de to udtryk skyldes, at 3.72 tager hensyn til hulrummets deformation af feltet, mens 3.73 er beregnet under forudsætning af fastfrosset polarisation. For $\epsilon_r \approx 1$ er der iøvrigt ikke stor forskel på udtrykkene. <

3.8 Molekylær teori for dielektrika

Alle isolatorer, hvad enten de er faste stoffer, væsker eller gasser, viser dielektriske egenskaber. I dette afsnit skal vi som eksempel se på et fast, krystallinsk stof med et kubisk krystalgitter. Her kan vi på simpel måde beregne den mikroskopiske feltstyrke, som virker på et atom i gitteret. Vi skal dernæst vise, hvordan en stærkt forenklet model af atomet fører til, at polarisationen er proportional med den makroskopiske feltstyrke i dielektrikket. I dette tilfælde kan vi altså begrunde den linearitet, som blev omtalt i afsnit 3.4, og vi kan beregne et teoretisk udtryk for susceptibiliteten.

*Felt i kubisk
gitter*

Vi tænker os, at dielektrikket har en homogen polarisation, eksempelvis opnået ved, at det er placeret mellem et par kondensatorplader. I materialet findes da det homogene makroskopiske felt $\mathbf{E}$ og polarisationen $\mathbf{P} = \chi\epsilon_0\mathbf{E}$, som vi indledningsvis forudsætter bekendt. For at finde den mikroskopiske feltstyrke $\mathbf{E}_m$, som påvirker et atom i et gitterpunkt, omgiver vi dette med en lille tænkt kugle (se fig. 3.12) med centrum i gitterpunktet. Materialet uden for kuglen vil vi betragte som kontinuert. Det bidrager, sammen med de frie ladninger uden for dielektrikket, til det makroskopiske felt. Feltet i kuglens centrum kan da opfattes som sammensat af dette makroskopiske felt $\mathbf{E}$, af et bidrag $\mathbf{E}_s$ fra polarisationsladninger $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ på kuglens inderflade og endelig feltet $\mathbf{E}'$ fra de øvrige atomer i det kubiske gitter inden for kuglen. Altså

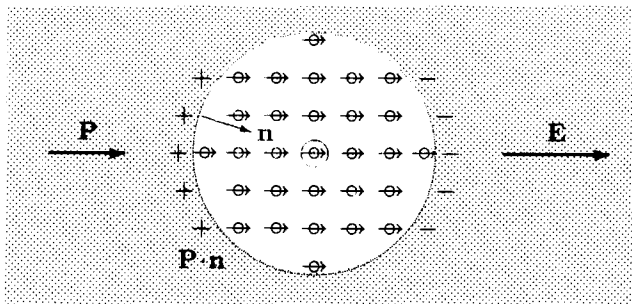
*Tre bidrag til
feltet*

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}'. \quad (3.74)$$

Feltet $\mathbf{E}$ antages bekendt. Da der ikke er noget fysisk hulrum, er feltet i dielektrikket uændret. Overfladens bidrag kan derfor beregnes efter 3.48, som netop tager højde for denne situation og giver $\mathbf{E}_s = \mathbf{P}/3\epsilon_0$. Om det atomare bidrag $\mathbf{E}'$ skal vi nu vise, at det er nul.

Vi går ud fra, at alle atomerne har samme dipolmoment $\mathbf{p}$. Det resulterende dipolfelt i kuglens centrum beregnes ved summation over alle atomer inden for kuglen af udtrykket 2.78. Vi lægger et koordinatsystem med begyndelsespunkt i gitterpunktet og akserne langs kubernes kanter. De individuelle atomers stedvektorer betegnes $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Vi finder da

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i - r_i^2\mathbf{p}}{r_i^5}. \quad (3.75)$$



Figur 3.12: Det mikroskopiske felt, som virker på et atom i et gitterpunkt, er sammensat af det makroskopiske felt, et bidrag fra polarisationsladningen på en tænkt kugleflade omkring gitterpunktet og et bidrag fra de øvrige atomer i kuglen.

Vi betragter nu atomer, som alle har samme afstand r fra centrum. På grund af krystallens symmetri finder man følgende summer:

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i y_i^2 = \sum_i z_i^2 = \frac{1}{3} \sum_i r_i^2 \quad (3.76)$$

og

$$\sum_i x_i y_i = \sum_i x_i z_i = \sum_i y_i z_i = 0. \quad (3.77)$$

*Naboernes
bidrag er null!*

Udskrives tælleren i 3.75 i koordinater, ser man, for hver koordinat, at de led som ikke er 0, netop ophæver hinanden, hvormed påstanden $\mathbf{E}' = 0$ er bevist.

Hermed bliver den mikroskopiske feltstyrke, som påvirker et atom i et gitterpunkt efter 3.75

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}. \quad (3.78)$$

Det er dette felt, som polariserer atomet sådan, at det får et dipolmoment.

Lad os antage, at dette dipolmoment $\mathbf{p}$ er proportionalt med den mikroskopiske feltstyrke og skriv

$$\mathbf{p} = \alpha\epsilon_0\mathbf{E}_m \quad (3.79)$$

Polarisabilitet

hvor α er en for atomet karakteristisk konstant, med enheden m^3 , som kaldes *polarisabiliteten*. Ved hjælp af 3.78 kan vi finde det oprindelig ubestemte $\mathbf{P}$. Er der n atomer per volumen gælder der jo

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha\epsilon_0\mathbf{E}_m, \quad (3.80)$$

som anvendes til at eliminere $\mathbf{E}_m$ fra 3.78. Løses for $\mathbf{P}$ findes

$$\mathbf{P} = \frac{n\alpha\epsilon_0}{1 - n\alpha/3} \mathbf{E} = \chi\epsilon_0\mathbf{E}, \quad (3.81)$$

hvor det sidste lighedstegn skyldes relationen 3.27. Derved har vi etableret forbindelsen mellem den mikroskopiske polarisabilitet α og den makroskopiske susceptibilitet χ ,

$$\chi = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3}. \quad (3.82)$$

Tilsvarende kan vi finde det mikroskopiske felt, som efter 3.80 og 3.81 bliver

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{1 - n\alpha/3} \mathbf{E}. \quad (3.83)$$

*Beregning
af p*

En realistisk beregning af det inducerede dipolmoment $\mathbf{p}$ ud fra atomare egenskaber må være kvantemekanisk. En sådan vil her føre for vidt, men vi kan få væsentlige træk frem ved at anvende en klassisk model af atomet, hvor elektronerne anses for bundet til kernen med elastiske kræfter. For at få et indtryk af susceptibilitetens frekvensafhængighed, betragter vi situationen dynamisk, idet vi antager, at det ydre felt varierer harmonisk med tiden. Efter 3.83 gælder det da også det mikroskopiske felt. Da alle felter er parallelle, kan vi droppe vektorangivelserne, og antage, at alle felter er i x -aksens retning.

Lad os se på en enkelt elektron i et atom med kernen ved $x = 0$. Den elastiske kraft på elektronen, når den er forskudt stykket x i forhold til kernen, vil vi angive som $-kx$. Elektronens uforstyrrede bevægelse er da en harmonisk svingning med egenfrekvensen ω_0 bestemt ved $k = m_e \omega_0^2$, hvor m_e er elektronmassen. Som det oscillerende mikroskopisk felt med frekvensen ω tager vi $E = E_0 \exp i\omega t$. Under indflydelse heraf udfører elektronen en udæmpet, tvungen svingning efter bevægelsesligningen

Oscillerende elektron

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - eE_0 e^{i\omega t}, \quad (3.84)$$

hvor det sidste led er kraften på elektronen fra det oscillerende felt. Vi kan antage en løsning af formen $x = a \exp i\omega t$, som indsat i 3.84 bestemmer amplituden til $a = -eE_0 / m_e(\omega_0^2 - \omega^2)$. Løsningen for x bliver derfor

Tvungen svingning

$$x = -\frac{eE_0 e^{i\omega t}}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (3.85)$$

Den oscillerende elektron giver et oscillerende elektrisk dipolmoment

Dipolmoment

$$p = -ex = \frac{e^2 E_0 e^{i\omega t}}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (3.86)$$

Sammenholder vi dette med 3.79, kan vi tale om en 'dynamisk' polarisabilitet af atomet, som bliver

Polarisabilitet beregnet

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (3.87)$$

Indsættes dette i 3.82 finder man den dynamiske *susceptibilitet*.

I et statisk felt ($\omega = 0$) svinger elektronen med sin egenfrekvens omkring et forskudt ligevægtspunkt. Hertil svarer den statiske polarisabilitet

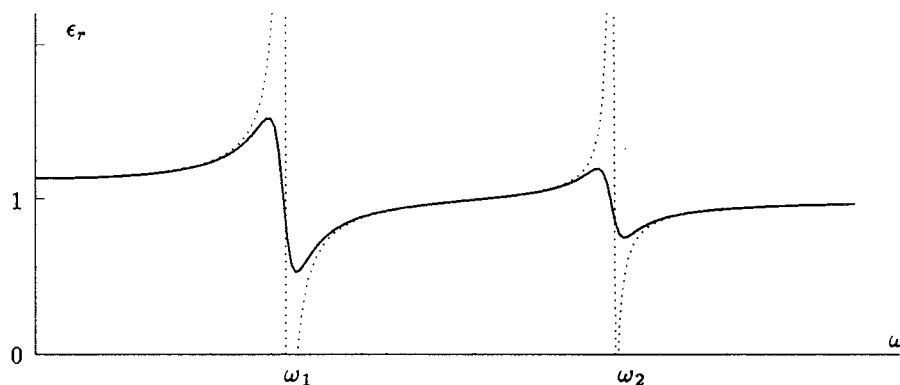
$$\alpha_s = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2}. \quad (3.88)$$

I et virkeligt atom vil der ikke være en enkelt egenfrekvens, men et helt sæt af frekvenser $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ som svarer til frekvenserne af den elektromagnetiske stråling, som atomet kan udsende eller absorbere. I kvantemekanikken finder man et udtryk for den dynamiske polarisabilitet, som stærkt minder om det ovenfor udledte 3.87:

Kvanteteori

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{(\omega_i^2 - \omega^2)}. \quad (3.89)$$

hvor summationen udstrækkes over alle frekvenser som bidrager til emission eller absorption. Størrelserne f_i kaldes *oscillatorstyrker* og udtrykker de vægte hvormed de enkelte frekvenser bidrager til dipolmomentet. Der gælder $0 \leq f_i \leq 1$ og $\sum_i f_i = 1$.



Figur 3.13: Permittiviteten afhænger af frekvensen af det elektriske felt.

*Permittivitet
som funktion
af frekvens*

Vi bemærker, at polarisabiliteten divergerer når $\omega = \omega_i$. Dette skyldes, at der er set bort fra den *dæmpning*, som er forbundet med strålingsudsendelse fra elektronerne. Beregner man den relative permittivitet som funktion af frekvensen ud fra udtrykkene for α og χ , finder man den stiplede kurve på fig. 3.13, hvor det ufysiske forløb nær egenfrekvenserne tydeligt træder frem. Tages dæmpningen i betragtning udjævnes kurven, men der tilbagestår tydelige anomalier omkring egenfrekvenserne. Disse forhold er af stor betydning for de elektriske og optiske egenskaber (dispersion) af et materiale og understreger, at 'dielektricitetskonstanten' i det dynamiske område på ingen måde er en konstant.

▷ Numerisk overslag: Af 3.82 og 3.87 ser man, at den statiske susceptibilitet er af størrelsesordenen

$$\chi \approx \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2} = 3.183 \times 10^3 n \frac{1}{\omega_i^2}. \quad (3.90)$$

*Det stemmer
pænt*

For de fleste faste dielektrika er n omkring $5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Betragter vi egenfrekvenser i det optiske område er $\omega \approx 5 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$. Formel 3.90 giver da $\chi \approx 6$, hvilket stemmer meget godt med de i tabel 3.1 opgivne relative permittiviteter ($\epsilon_r = 1 + \chi$). For gasser er tilsvarende $n \approx 3 \times 10^{25}$ hvilket, igen for egenfrekvenser i det optiske område, giver $\chi \approx 3 \times 10^{-3}$, som er af den rigtige størrelsesorden. ◁

Kapitel 4

Elektrostatisk energi

Energi er et fundamentalt begreb i fysiken, og det er ikke overraskende, at den elektromagnetiske teori på mange områder gør udstrakt brug af energibetragtninger. Da teorien er en feltteori, er der her behov for at udvide energibegrebet således, at det på konsistent måde kan beskrive energi og energitransport, når der er tale om elektromagnetiske felter. Ved en sådan udvidelse er det naturligt at tage udgangspunkt i det *mekaniske* energibegreb og derfra gradvis søge frem til definitioner og metoder, som egner sig til anvendelse på felter. Ved videregående undersøgelser, især dem som vedrører materialernes elektromagnetiske egenskaber, får man dog brug for det fulde *thermodynamiske* energibegreb.

Energi i den elektromagnetiske teori

Som et første skridt mod at indføre energibegreber i den elektromagnetiske teori skal vi i dette afsnit diskutere energi inden for elektrostatikken. Til dette formål rækker det mekaniske energibegreb, som omfatter potentiel og kinetisk energi. Men i elektrostatikken er alle ladninger og materialer i hvile, og en udvidelse af energibegrebet forenkles derfor ved, at vi kan se bort fra kinetiske bidrag til energien. I elektrostatikken er al energi potentiel.

4.1 Energi af et system af punktladninger

I afsnit 2.4 diskuterede vi den potentielle energi af en punktladning i et ydre elektrisk felt. Udgangspunktet var en beregning, jvf. 2.36, af det arbejde W vi må udføre *mod* feltekraften for at flytte punktladningen fra et referencepunkt med potentialet 0 til positionen $\mathbf{r}$ med potentialet $\varphi(\mathbf{r})$:

Punktladning i ydre felt

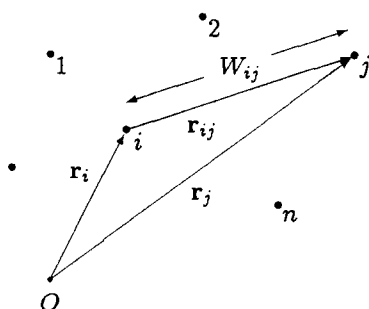
$$W = \int_{ref}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -q \int_{ref}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = q \int_{ref}^{\mathbf{r}} \nabla \varphi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = q \int_{ref}^{\mathbf{r}} d\varphi = q\varphi(\mathbf{r}). \quad (4.1)$$

Bemærk, at her er $\varphi(\mathbf{r})$ det *ydre* potential på det sted, hvor punktladningen anbringes. Potentialet omfatter således *ikke* potentialet skabt af punktladningen selv, som jo divergerer på ladningens position.

Det udførte arbejde W er efter mekanikken punktladningens tilvækst i potentiel energi i det ydre felt. Sætter vi den potentielle energi U til 0 i referencepunktet har vi altså

Potentiel energi

$$\boxed{U = W.} \quad (4.2)$$



Figur 4.1: Vekselvirkning mellem n punktladninger.

Definition

Denne lighed bruger vi til at definere *elektrostatisk energi* for flere punktladninger: Den elektrostatiske energi af et system af punktladninger i et op-rindelig feltfrit rum er lig det arbejde, som skal udføres mod det tilhørende felts kræfter for at bringe punktladningerne sammen fra det uendelig fjerne.

System af punktladninger

Lad n punktladninger være placeret langt borte fra hinanden i det uendelig fjerne. Målet er at placere de n punktladninger i bestemte positioner $\mathbf{r}_i$ i rummet, hvor $i = 1, 2, \dots, n$ angiver de enkelte punktladninger q_i . Efter 4.1 kan vi beregne arbejdet ved at bringe ladningerne på plads, én efter én:

Arbejdet beregnes

Det går nemt med at bringe q_1 på plads, da den er helt alene på scenen, og derfor ikke føler nogen kraft fra de andre ladninger. Vi har således udført arbejdet

$$W_1 = 0.$$

Den anden ladning q_2 må bringes på plads under påvirkning af den første. Idet vi benytter udtrykket 2.30 for potentialet fra en punktladning, bliver det udførte arbejde

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{21}},$$

hvor vi har benyttet betegnelsen $r_{21} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. For den tredje ladning finder vi tilsvarende

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_3 q_1}{r_{31}} + \frac{q_3 q_2}{r_{32}} \right].$$

og beregnes

Arbejdet med at bringe ladning i ind, mens der allerede sidder $j = i - 1$ ladninger og venter, bliver analogt

$$W_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_i q_1}{r_{i1}} + \frac{q_i q_2}{r_{i2}} + \dots + \frac{q_i q_{i-1}}{r_{i(i-1)}} \right]. \quad (4.3)$$

Vi indfører betegnelsen

$$W_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

for arbejdet med at bringe den i -te ladning i position over for den j -te. Udtrykket 4.3 kan dermed skrives

$$W_i = \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij}$$

og det samlede arbejde med at bringe alle n ladninger på plads bliver

Samlet arbejde

$$U = \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij}. \quad (4.4)$$

Denne sum er lidt besværlig på grund af betingelsen $j \leq i-1$. Opgives denne betingelse, således at alle mulige par ij tages med, vil alle vekselvirkninger $W_{ij} (= W_{ji})$ tælles dobbelt og desuden medtages W_{ii} som divergerer. Denne vanskelighed omgås dog let ved at benytte følgende udtryk med bibetingelsen $i \neq j$:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij}, \quad (i \neq j). \quad (4.5)$$

Faktoren $\frac{1}{2}$ sikrer, at vekselvirkningen mellem et par af partikler kun medregnes én gang, og bibetingelsen udelukker de divergente led W_{ii} . Den potentielle energi af systemet af punktladninger kan da skrives

Elektrostatisk energi af n punktladninger

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad (i \neq j). \quad (4.6)$$

På dette sted kan vi tage et første forsigtigt skridt hen mod en feltteori for elektrostatisk energi. Vi noterer nemlig, at udtrykket 4.6 kan skrives

Hen mod en feltteori

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}}, \quad (i \neq j). \quad (4.7)$$

Men den inderste sum er jo ikke andet end potentialet på den i -te ladningsplads hidrørende fra de øvrige ladninger i systemet, altså

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}}, \quad (i \neq j). \quad (4.8)$$

Hermed bliver den samlede elektrostatiske energi af systemet

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (4.9)$$

hvor vi nu har fået indført feltstørrelsen φ_i i et udtryk for energien.

Til slut skal det bemærkes, at var de n punktladninger placeret i et homogent og lineært dielektrikum med permittivitet ϵ , så kunne de tilsvarende regninger gennemføres helt som her. I 4.6 og 4.8 erstattes blot ϵ_0 med ϵ , mens 4.9 af form er uændret. Den elektrostatiske energi i et dielektrikum reduceres altså med faktoren $1/\epsilon_r$ i forhold til energien af samme konfiguration af ladninger i vacuum.

Energi i dielektrikum

4.2 Energi af en kontinuert ladningsfordeling

Generalisation

Det er ikke vanskeligt at gætte, hvordan udtrykket 4.9 kan almindeliggøres til at gælde for den elektrostatiske energi af en kontinuert ladningsfordeling. For en volumenladningstæthed $\rho(\mathbf{r}')$ erstattes punktladningerne med differentielle ladninger $dq' = \rho dv'$ og summationen med en integration. De mærkede størrelser skal, jvf. afsnit 2.1, minde om, at ladningstætheden selv er kilde til feltet. Vi forventer altså følgende udtryk for den elektrostatiske energi:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') dv', \quad (4.10)$$

idet potentialet $\varphi(\mathbf{r})$ skal tages i det punkt $\mathbf{r}'$, hvor volumenelementet dv' er placeret. Dette udtryk skal vi nu nå frem til på en lidt anden måde, som illustrerer, hvorledes ladningsfordeling og felt bygges op samtidigt.

Situationen

Vi ser på en vilkårlig, begrænset ladningsfordeling med ladningstæthed $\rho(\mathbf{r}')$. Der kan være overfladeladninger tilstede, men dem tænker vi os indledningsvis smurt en smule ud, sådan at hele fordelingen kan beskrives ved en volumentæthed. Er der dielektrika i systemet, antager vi, at de er lineære. Ellers kan vi ikke være sikre på, at arbejdet, der kræves for at nå en given sluttilstand af ladningen, er uafhængigt af den måde, den nås på.

Opbygning af ladning

Ladningsfordelingen tænkes nu opbygget på ligedannet måde fra en oprindeligt uladet tilstand til sluttilstanden. Dette skal forstås sådan, at vi til ethvert tidspunkt har en ladningsfordeling $\alpha\rho(\mathbf{r}')$, hvor α er et tal mellem 0 og 1. Det tilsvarende potential vil da være $\alpha\varphi(\mathbf{r})$. Ved at bringe ladning ind fra referencepotentialet 0 forøges ladningstætheden nu med $d\alpha\rho(\mathbf{r}')$. Herefter forøges energien af volumenelementet dv' med $d\alpha\rho(\mathbf{r}') dv' \alpha\varphi(\mathbf{r}')$ jvf. 4.1. Integreret over ladningsfordelingen bliver den tilsvarende energitilvækst

$$dU = \int_{V'} \alpha d\alpha \rho(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') dv'. \quad (4.11)$$

Heraf følger, at fordelings totale elektrostatiske energi, når opbygningen er færdig, er

$$U = \int_0^1 \alpha d\alpha \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') dv'. \quad (4.12)$$

Energien bestemt

Altså, i overensstemmelse med vores oprindelige forventning 4.10

$$U = \frac{1}{2} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') dv'. \quad (4.13)$$

Det volumen V' , der integreres over i 4.13, er hele det volumen, hvor der findes ladninger. Da vi har forudsat, at ladningsfordelingen er begrænset, sådan at $\rho(\mathbf{r}')$ forsvinder uden for et vist område, kan vi roligt lade integralet gå over hele rummet. De ladningsfrie områder bidrager jo ikke.

I mange tilfælde, specielt når der er ledere tilstede, kan det være hensigtsmæssigt at synliggøre overfladebidragene til energien. Med et argument helt analogt til det, som førte frem til 4.13, finder man

$$U = \frac{1}{2} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') dv' + \frac{1}{2} \int_{S'} \sigma(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') da'. \quad (4.14)$$

Overfladeintegralet her går over alle flader S' , der har en ladningstæthed σ . Potentialet $\varphi(\mathbf{r}')$, som indgår i 4.14, er et potential, som skabes af ladningsfordelingen selv. Det må bestemmes ved anvendelse af de metoder, som er beskrevet i kapitel 2 og kapitel 3. Er ladningsfordelingen givet, anvender man 2.33.

Ladninger i fælles potential

I mange situationer møder man ledere indesluttet i et enkelt, homogent dielektrikum med permittivitet ϵ . Udtrykket for potentialet bliver da af formen

Ledere i dielektrikum

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S_i} \frac{\sigma(\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (4.15)$$

hvor vi specifikt har inkluderet bidraget fra overfladen S_i af lederne. Her optræder der imidlertid en simplifikation ved beregningen af den elektrostatiske energi, fordi lederoverfladerne er ekvipotentialflader. Er S_i en sådan lederoverflade med potential φ_i , finder vi af 4.14, at den bidrager til den elektrostatiske energi med

$$U_i = \frac{1}{2} \oint_{S_i} \sigma \varphi da' = \frac{1}{2} \varphi_i \oint_{S_i} \sigma da' = \frac{1}{2} Q_i \varphi_i, \quad (4.16)$$

hvor Q_i er lederens samlede ladning. Det endelige udtryk for den elektrostatiske energi bliver da af formen

Lederbidrag udskilt

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dv' + \frac{1}{2} \oint_{S_d} \sigma \varphi da' + \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi_i. \quad (4.17)$$

Af de tre led i 4.17 giver det første den elektrostatiske energi fra volumenet mellem lederne, det andet led bidraget fra eventuelle frie ladninger på isolatoroverflader S_d , mens det sidste led er bidraget fra alle ledere. Det understreges, at ρ og σ her refererer til frie ladninger. Virkningen af et eventuelt tilstedeværende dielektrikum er indeholdt i potentialet φ jvf. 4.15.

4.3 Energi af ladede ledere

I praksis vil der ofte forekomme systemer, hvor al fri ladning sidder på ledere. Udtrykket 4.17 for energien bliver da særlig simpelt idet

Al fri ladning til lederne

$$U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi_i, \quad (4.18)$$

hvor Q_i er ladningen på den enkelte leder og φ_i dens potential.

4.3.1 Energi i en kondensator

I en kondensator har man to ledere med ladninger $\pm Q$ og potentialer φ_1 og φ_2 . Efter 4.18 bliver energien da

$$U = \frac{1}{2} Q \varphi_1 - \frac{1}{2} Q \varphi_2 = \frac{1}{2} Q (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (4.19)$$

eller, udtrykt ved spændingsforskellen $V = \varphi_1 - \varphi_2$

Elementært, men vigtigt

$$U = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{Q^2}{2C}. \quad (4.20)$$

Simpel beregning af $\frac{1}{2}CV^2$

▷ Forenklet beregning af energi i kondensator: Vi har fundet udtrykkene i 4.20 ud fra den generelle teori. Det kan være nyttigt at notere, at de også kan udledes helt enkelt ved at beregne arbejdet ved at oplade kondensatoren: På et vist tidspunkt under opladningen er ladningen q og spændingen v , hvor $q = Cv$. Vi forøger nu ladningen ved at flytte dq fra den negative leder til den positive. Dertil kræves arbejdet $dU = v dq$. Det samlede arbejde ved opladningen bliver

$$U = \int_0^Q v dq = C \int_0^V v dv = \frac{1}{2}CV^2,$$

i overensstemmelse med 4.20. ◁

ϵ ændrer energien

Er kondensatoren udfyldt med et dielektrikum med permittivitet ϵ , ændres energien i forhold til vacuumtilfældet. For fastholdt Q bliver spændingen og dermed også energien en faktor ϵ_r mindre. Er det i stedet spændingen, der holdes konstant, forøges ladningen og dermed energien med faktoren ϵ_r . Dette stemmer med 4.20 og en tidligere diskussion (sml. 3.43), hvor vi fandt, at dielektriket forøgede capacitansen med en faktor ϵ_r .

4.3.2 Energi af et system af ladede ledere

Vi har i afsnit 2.10.2 indført capacitans- og influenskoefficienterne c_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$ og potentialkoefficienterne p_{ij} for et system af n ledere. Ved hjælp af disse koefficienter kan den potentielle energi af lederne udtrykkes på simpel måde. Efter 4.18 gælder jo

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i,$$

Energien er kvadratisk

hvor q_i er den i -te leders ladning og φ_i dens potential. Men efter 2.170 er

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} q_j,$$

– i q

sådan, at

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i p_{ij} q_j. \quad (4.21)$$

Alternativt kan vi udtrykke lederens ladninger ved deres potentialer, idet der efter 2.172 gælder:

$$q_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_j,$$

– eller φ

som indsat i 4.18 giver

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i c_{ij} \varphi_j. \quad (4.22)$$

Energien er således en kvadratisk form i q 'erne eller φ 'erne.

Vi vil nu vise, at matricen p_{ij} er symmetrisk: Som det ses af 4.21 er $\frac{1}{2}q_i p_{ij} q_j$ den j 'te leders bidrag til den potentielle energi af den i 'te. Dette bidrag kan vi også beregne direkte, idet

Energibetragtning giver

$$q_i p_{ij} q_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_i} \sigma_i da_i \int_{S_j} \frac{\sigma_j da_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\sigma_i da_i \sigma_j da_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (4.23)$$

Vi kunne i stedet have beregnet i 's bidrag til j 's potentielle energi. Det bliver

$$q_j p_{ji} q_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_j} \sigma_j da_j \int_{S_i} \frac{\sigma_i da_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_j} \int_{S_i} \frac{\sigma_j da_j \sigma_i da_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}. \quad (4.24)$$

Men da integrationsordenen er ligegyldig følger heraf

$$\boxed{p_{ij} = p_{ji}} \quad (4.25)$$

Det vil sige, at matricen af potentialkoefficienter er symmetrisk. Da matricen c_{ij} er den reciprokke af matricen c_{ij} er også denne symmetrisk, altså

symmetri af p_{ij} og c_{ij}

$$\boxed{c_{ij} = c_{ji}} \quad (4.26)$$

Ved at sætte forskellige potentialer eller ladninger lig 0 eller 1 kan man uden større besvær vise en række udsagn om disse koefficienters fortegn og indbyrdes størrelsesforhold. Vi skal her blot sammenfatte de vigtigste:

Tabel 4.1: Egenskaber af potential- og kapacitanskoefficienter

Potential-koefficienter	Capacitans-koefficienter	Delkapacitanser
$p_{ij} = p_{ji}$	$c_{ij} = c_{ji}$	$C_{ij} = C_{ji}$
$p_{ij} > 0$	$c_{ii} > 0$	$C_{ij} > 0$
$p_{ii} \geq p_{ij} \ (i \neq j)$	$c_{ij} \leq 0 \ (i \neq j)$	
	$\sum_i c_{ij} > 0$	

4.4 Energi i det elektrostatiske felt

I forrige afsnit udtrykte vi energien af en fordeling af ladninger ved ladningstætheder og potentialer. Her skal vi nu foretage en matematisk omskrivning af udtrykket 4.14 sådan, at energien af en ladningsfordeling helt bliver udtrykt ved feltstørrelserne $\mathbf{E}$ og $\mathbf{D}$.

Felterne indføres

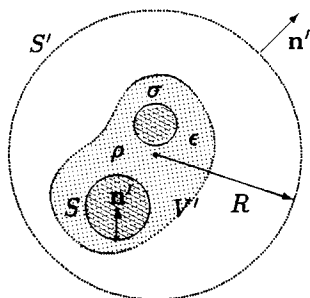
Vi ser igen på en begrænset ladningsfordeling. Fordelingen kan rumme lineære dielektrika med volumenladningstæthed ρ og ledere med fladeladningstæthed σ . Eventuelle fladeladninger på dielektrika tænker vi os smurt lidt ud og indeholdt i ρ . Ladningstæthederne er knyttet til den elektriske fluxtæthed idet

Situationen

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{dielektrika}), \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \sigma \quad (\text{ledere}). \quad (4.27)$$

Vi kan da skrive 4.14 som

Matematik



Figur 4.2: En begrænset ladningsfordeling indesluttet i en kugleflade S' med radius R og udadrettet normal $\mathbf{n}'$. Der kan være volumenladning ρ i dielektriket og overfladeladning σ på lederne.

$$U = \frac{1}{2} \int_{V'} \varphi \nabla \cdot \mathbf{D} dv' + \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da'. \quad (4.28)$$

Volumenintegralet går her over det område V' , hvor der er volumenladninger ρ , dvs. rummet uden for lederne, men vi kan gøre V' så stor, som vi ønsker, da der jo ikke kommer noget bidrag, hvor $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$. Overfladeintegralet går over ledernes samlede overflade S .

Vi omskriver nu integranden i volumenintegralet ved hjælp af Tabel A.2:7 på formen:

$$\varphi \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \nabla \varphi. \quad (4.29)$$

Hermed bliver energien:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V'} (\nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \nabla \varphi) dv' + \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da'. \quad (4.30)$$

Mere matematik

Det første led i volumenintegralet kan vi omforme til et overfladeintegral ved hjælp af divergensteoremet. Som overflade må vi for det første inkludere alle flader S ind mod lederne. For det andet en flade S' som afgrænser V' udadtil. Vi kan gøre S' så stor, som vi ønsker, når blot den indeholder al ladning. I det andet led i volumenintegralet kan vi indføre $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$. Dermed kan 4.30 skrives

$$U = \frac{1}{2} \int_{S+S'} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' da' + \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv' + \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da'. \quad (4.31)$$

Vi er næsten fremme. I det første fladeintegral over lederne S er $\mathbf{n}'$ rettet ud af V' , dvs. ind i lederne. I det andet fladeintegral over S er $\mathbf{n}$ rettet ud af lederne. Disse to integraler vil derfor annullere. Fladeintegralet over den store flade S' vil også forsvinde. Vælger vi S' som en kugleflade med radius $R \rightarrow \infty$ vil potentialet (sml. 2.67) jo forsvinde som mindst $1/R$ og det afledede felt $\mathbf{D}$ som mindst $1/R^2$. Der er altså ingen vanskelighed: integralet forsvinder på kuglefladen hvis areal $\approx R^2$.

Tilbage af 4.31 er nu det bemærkelsesværdige udtryk

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv, \quad (4.32)$$

hvor vi har udeladt alle mærker som overflødige. Meningen er, at der skal integreres over hele rummet.

Udtrykket 4.32 kom til verden efter en lang række matematiske manipulationer. Det interessante er nu, hvordan det kan fortolkes fysisk. Vi begyndte dette kapitel med at beregne energien af et system af punktladninger. Udtrykket 4.6 nedstammer direkte fra Coulombs lov og knytter energien til de enkelte ladninger. Dernæst beregnede vi energien af en kontinuert ladningsfordeling givet ved 4.13. Her optræder en feltstørrelse, nemlig φ , men den indgår rigtignok kun der, hvor ladningstætheden forekommer. Med den nu udledte 4.32 har vi helt taget skridtet ud i rummet, med et udtryk som lokaliserer energien overalt, hvor der findes et felt.

Nu kommer fysiken

Erfaringen har vist, at det er en meget frugtbar tanke, at energien ligger i det elektriske felt. Det er derfor en naturlig fortolkning af 4.32, at der i det elektrostatiske felt er en *energitæthed* u med enheden Jm^{-3} hvor

Energien er i feltet

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (4.33)$$

Det indgik i forudsætningerne for 4.13, og dermed for 4.14, at alle dielektrika var lineære. Denne relation anvendte vi ved udledningen af ligning 4.32, som derfor også *kun er gyldig for lineære dielektrika*. For disse er permittiviteten en proportionalitetskonstant, som forbinder $\mathbf{D}$ og $\mathbf{E}$ (se 3.29). Vi kan derfor udtrykke energitætheden i feltet ved hvert af disse felter alene:

Obs!

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}. \quad (4.34)$$

▷ Pladekondensatoren: Lad os anvende denne nye formalisme på vor hårdt prøvede pladekondensator. Vi antager, at kondensatoren er fyldt med dielektrikum og har ladningen Q . De elektriske felter bliver $D = Q/A$ og $E = D/\epsilon = Q/(A\epsilon)$. Heraf findes energitætheden u og hele kondensatorens energiindhold U :

Variation over et tema

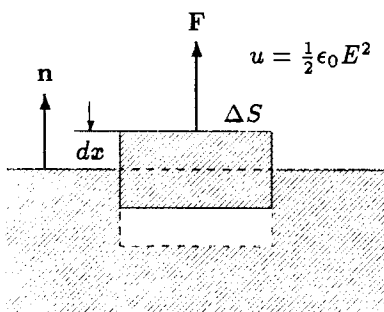
$$u = \frac{1}{2} E D = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A^2 \epsilon}, \quad U = a A u = \frac{1}{2} \frac{Q^2 a}{A \epsilon} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

i overensstemmelse med det tidligere udledte udtryk i afsnit 4.3.1. <

▷ Kraft på leders overflade: Vi kan benytte udtrykket 4.33 til at beregne kraften på en leders overflade ved anvendelse af virtuelle arbejders princip. Vi forskyder virtuelt (dvs. indbildt) fladeelementet ΔS stykket dx i normals retning. Fra feltet forsvinder der da energien

Kraft på leders overflade

$$dU = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Delta S dx.$$



Figur 4.3: Virtuel forskydning af et element af en leders overflade.

Dette skal være det af kraften F_s på ΔS udførte arbejde, som er $dU = F_s dx$ hvoraf

$$F_s = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Delta S = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} \Delta S,$$

idet $E = \sigma / \epsilon_0$ ved lederens overflade. Dette resultat er tidligere fundet på anden måde, sml. 2.55. ◀

4.5 Kræfter og momenter i elektrostatiken

I et elektrostatisk system sammensat af enkeltdele som ledere, isolatorer og punktladninger vil der virke kræfter mellem delene. Disse kræfter kan meget bekvemt beregnes ud fra systemets potentielle energi U , som vi vil gå ud fra, at vi kender som funktion af enkeltdelenes position og orientering i rummet.

1. situation:
Konstant q

Vi ser først på et system, hvor delene er isoleret fra hinanden og fra omgivelserne. Den samlede ladning på hver del er derfor konstant. Vi lader en enkelt del af systemet undergå en forskydning $d\mathbf{r}$ under påvirkning af de elektriske kræfter $\mathbf{F}$, som virker på den. Det arbejde, som herved udføres af systemet på delen, er

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (4.35)$$

Da systemet er isoleret, sker arbejdet på bekostning af dets elektrostatiske energi U sådan, at

$$dW = -dU, \quad (4.36)$$

som sammen med 4.35 giver

$$-dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (4.37)$$

Opfatter vi U som en funktion $U(\mathbf{r})$ af positionen $\mathbf{r}$ af den betragtede enkelt-del, har vi på sædvanlig måde differentialet

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz. \quad (4.38)$$

Ved sammenligning med 4.37 finder man straks kraften

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = - \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right), \quad (4.39)$$

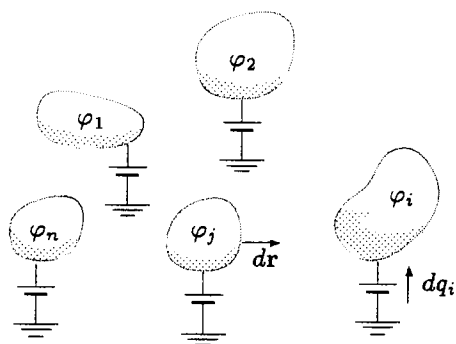
altså

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla U}, \quad q \text{ konstant.} \quad (4.40)$$

Kraftmoment

De elektriske kræfter påvirker også systemets dele med kraftmomenter, der kan beregnes på lignende måde. Hvis en enkelt del af systemet er bundet til rotation om en akse, og kender man systemets energi $U(\theta)$ som funktion af drejningsvinklen θ om akse, bliver kraftmomentet τ om denne

$$\boxed{\tau = -\frac{\partial U}{\partial \theta}}, \quad q \text{ konstant.} \quad (4.41)$$



Figur 4.4: Et elektrostatisk system, hvis ledere holdes på faste potentialer. Kraften på en enkelt del af systemet kan findes som plus gradienten af feltenergien.

Vi ser nu på en anden situation, hvor der i systemet indgår en række ledere, som holdes på bestemte potentialer ved hjælp af ydre energikilder, for eksempel (accumulator)batterier. Vi lader en af systemets dele flytte sig dr under indflydelse af de elektriske kræfter og finder igen arbejdet som kraft gange vej givet ved 4.35. Men i dette tilfælde arbejdes der ikke blot på bekostning af systemets elektrostatiske energi. Der er et tilskud fra batterierne, således at vi i stedet for 4.36 har

2. situation:
Konstant φ

Batterierne
arbejder med

$$dW = -dU + dW_b, \quad (4.42)$$

hvor dW_b er det af batterierne udførte arbejde.

De to bidrag til arbejdet på højre side af 4.42 kan vi sætte i relation til hinanden. Vi ser først på dU , som kan beregnes af 4.18:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i \Rightarrow dU = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i dq_i, \quad (4.43)$$

idet potentialerne jo holdes konstante.

Det er batterierne, som må slæbe i det for at fastholde potentialerne, når en del af systemet forskydes. Batterierne leverer under forskydningen (se fig. 4.4) ladningerne dq_i fra jordpotential til potentialerne φ_i . Men efter 4.1 kræver dette arbejdet

$$dW_b = \sum_i \varphi_i dq_i. \quad (4.44)$$

Efter 4.42 bliver det samlede arbejde af system og batterier

$$dW = -dU + dW_b = -\frac{1}{2} \sum_i \varphi_i dq_i + \sum_i \varphi_i dq_i = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i dq_i = +dU. \quad (4.45)$$

Sammen med 4.35 giver dette

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz. \quad (4.46)$$

hvoraf

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right), \quad (4.47)$$

altså

$$\boxed{\mathbf{F} = +\nabla U,} \quad \varphi \text{ konstant.} \quad (4.48)$$

Arbejdet øger energien!

I denne situation arbejder systemet altså, på grund af tilskud fra batterierne, under *forøgelse* af sin elektrostatiske energi.

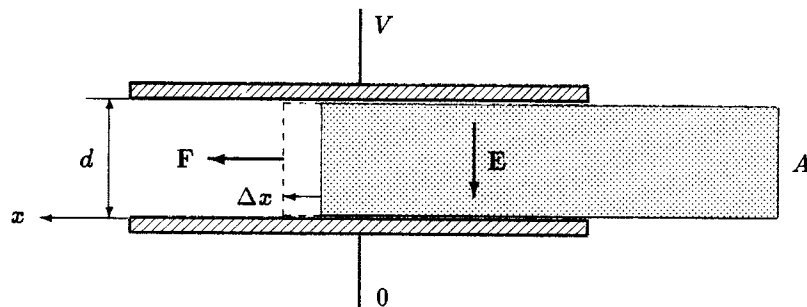
Analogt til 4.41 finder man i dette tilfælde for kraftmomentet om en akse

$$\tau = + \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad \varphi \text{ konstant.} \quad (4.49)$$

Pladekondensator sluger dielektrikum

▷ Dielektrikum i pladekondensator: Som eksempel på anvendelsen af ovenstående kan vi se på en pladekondensator, hvori der delvist er indskudt en dielektrisk klods med permittivitet ϵ . Klodsen passer netop ind mellem kondensatorpladerne, som har afstanden d og holdes fast på en potentialforskel V . På grund af inhomogeniteter i felterne ved kanterne af pladerne og dielektriket vil der være en kraft på klodsen, men en direkte beregning af denne vil være meget kompliceret. Derimod løses problemet let ved en energibetragtning.

Feltstyrken i mellemrummet bliver overalt $E = V/d$, mens energitætheden



Figur 4.5: Kraft på dielektrisk klods i pladekondensator

bliver $\frac{1}{2}\epsilon E^2$ i den indskudte del af klodsen og $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ i plademellemrummet uden for klodsen. Vi giver nu klodsen virtuel forskydning Δx ind i kondensatoren. Har klodsen tværsnitsarealet A , vil et volumen $A\Delta x$ ændres fra at rumme vacuum til at rumme dielektrikum. Den hertil svarende energiændring af systemet er

$$\Delta U = \frac{1}{2} E^2 (\epsilon - \epsilon_0) A \Delta x. \quad (4.50)$$

Da potentialerne holdes fast, skal kraften på dielektriket beregnes efter 4.48, som giver

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} E^2 (\epsilon - \epsilon_0) A. \quad (4.51)$$

Fast φ og fast q giver samme kraft

Kraften er positiv, dvs. den går i retning af x , se figuren. Klodsen vil altså trækkes ind i plademellemrummet. Det samme vil selvfølgelig være tilfældet, dersom pladerne holdes med konstant ladning, selv om kraften her skal beregnes efter 4.40. Se opgave 4.17. ◀

Kapitel 5

Elektrisk strøm

De foregående kapitler har udelukkende drejet sig om elektrisk ladning i hvile. Her skal vi nu behandle elektrisk ladning i bevægelse.

De frie elektroner i en metallisk leder er i tilfældig bevægelse ligesom molekylerne i en gas. De har således ikke nogen foretrukken bevægelsesretning. Lægger vi en plan flade et vilkårligt sted i en sådan leder, er der ikke nogen nettostrøm af elektroner gennem den.

*Elektroner
i tilfældig
bevægelse*

Anderledes vil det være, dersom der er et elektrisk felt i lederen. I elektrostatikken har vi set, at det elektriske felt i en leder er nul. Men dette er slutsituationen, som indtræder, efter at de frie ladninger under påvirkning af hinanden eller af et ydre felt har bevæget sig til ligevægtspositioner, og hele lederen er blevet et ekvipotentielt område. Ligevægt nås normalt meget hurtigt, inden for 1 ns eller mindre, og strømmen ophører. Elektrostatiske kræfter kan ikke alene opretholde varige elektriske strømme.

Der findes imidlertid i naturen processer og inden for tekniken apparater, som kan vedligeholde en elektrisk potentialforskel mellem punkter af en leder og dermed også opretholde et felt i lederen. Vi kalder en sådan mekanisme en *elektromotorisk kraft*. Forbindes en elektromotorisk kraft til punkter af en leder, vil ladningsbærerne, som regel elektroner, sættes i bevægelse, og der opstår en *varig elektrisk strøm*.

*Elektro-
motorisk kraft
-et nyt begreb*

Det hører med til dette forenklede billede, at mens elektronernes tilfældige bevægelse sker med hastigheder på omkring 10^6 ms^{-1} , så er den hastighed, de kan vinde i det elektriske felt, meget ringe. I en almindelig husholdningsledning omkring 10^{-3} ms^{-1} , se opgave 5.1. Det elektriske felt, som virker på elektronerne, giver dem ikke nogen netto acceleration (modsat feltretningen), fordi de ustandselig kolliderer med og afgiver energi til de atomer, som opbygger lederens krystalgitter. Men mellem to kollisioner accelereres en elektron en smule modsat feltretningen og får derfor en ekstra hastighed i denne retning oven i den tilfældige hastighed. Resultatet er en langsom *drift* af elektronerne med en hastighed, som er halvdelen af den ekstra hastighed, en elektron i middel opnår mellem to kollisioner. Man kan sammenligne med en marmorkugle, som hopper ned ad en lang trappe. Hver gang kuglen rammer et trin, mister den det meste af sin erhvervede hastighed ved (uelastiske) stød mod trinnet og må begynde accelerationen forfra. Dens middelhastighed vil være konstant og langt mindre end den, som opnås af en frit faldende kugle over samme faldhøjde.

*Elektroner
i drift*

5.1 Elektrisk strøm og strømtæthed

*Ledning
defineret*

I praksis løber elektrisk strøm ofte i en *ledning*, dvs. en leder, hvis tværsnitsdimensioner er små i forhold til dens længde. Elektronernes drift sker da i ledningens retning, modsat det elektriske felt. Vi kan forestille os en stationær tilstand, hvor der tilføres elektroner i det ene endepunkt og fjernes lige så mange i det andet. De elektrostatiske kræfter forhindrer, at der opbygges ladningsansamlinger eller ladningsunderskud noget sted i ledningen, der forbliver elektrisk neutral. I denne situation vil der per tid transporteres samme ladning gennem alle tværsnit af ledningen.

Den *elektriske strøm* i ledningen defineres som

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [I] = A, \quad (5.1)$$

*Elektrisk
strøm defi-
neret*

hvor dQ er den ladning, som i tidsrummet dt har passeret et vilkårligt ledningstværsnit. Elektrisk strøm er en skalar og måles i *ampere*, der som tidligere nævnt er den fundamentale elektriske SI-enhed, hvoraf alle andre elektriske enheder er afledt. Vi skal i næste kapitel give den gældende definition af ampere.

Hvis vi har en elektrisk strøm i en udstrakt del af rummet, beskrives den ved hjælp af *strømtætheden* $\mathbf{J}(\mathbf{r})$. Strømtætheden er en vektor, som peger i de positive ladningsbæreres bevægelsesretning. Er der per volumen N ladningsbærere af en bestemt type hver med ladning q (regnet med fortegn) og drifthastighed $\mathbf{v}$, defineres strømtætheden som

$$\mathbf{J} = Nq\mathbf{v} = \rho\mathbf{v} \quad [J] = \text{Am}^{-2}, \quad (5.2)$$

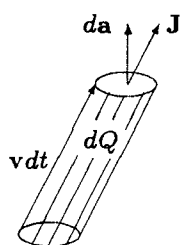
*Strømtæthed
defineret*

hvor $\rho = Nq$ er volumenladningstætheden for den betragtede type ladningsbærer. Er der flere typer ladningsbærere erstattes 5.2 med

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i = \sum_i \rho_i \mathbf{v}_i, \quad (5.3)$$

hvor index i angiver de enkelte typer ladningsbærere (elektroner, positive og negative ioner eller positive "huller" i halvledere). Også en negativ ladningsbærer giver et $\mathbf{J}$ i feltets retning, da både q og $\mathbf{v}$ skifter fortegn.

Vi ser nu på et lille fladeelement $d\mathbf{a}$ placeret i en leder på et sted, hvor strømtætheden er $\mathbf{J}$ (fig. 5.1). Den ladning dQ , som inden for tidsrummet dt strømmer gennem fladeelementet $d\mathbf{a} = n d\mathbf{a}$, rummes i en cylinder med grundflade $d\mathbf{a}$ og frembringere $\mathbf{v}dt$. Denne cylinder har volumen $\mathbf{v} \cdot n d\mathbf{a} dt$ og rummer ladningen $dQ = \rho \mathbf{v} \cdot n d\mathbf{a} dt = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} dt$. Strømmen gennem



$$\begin{aligned} dQ &= \rho N v dt \cdot da \\ &= \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} dt \\ dI &= dQ/dt = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \end{aligned}$$

Figur 5.1: Forbindelsen mellem strøm og strømtæthed.

*Strøm gennem
flade*

fladeelementet er derfor $dI = dQ/dt = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$. Heraf finder vi for strømmen gennem en vilkårlig flade S

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}. \quad (5.4)$$

Ser vi på et lukket område af rummet, kan vi med 5.4 beregne strømmen ud af dette. Men den ladning, som netto strømmer ud, må modsvares af tabet i total ladning inden for fladen. Ladning er jo en bevaret størrelse, som hverken kan skabes eller destrueres, den kan kun flyttes.

*Strøm ud =
tabt ladning*

Strømmen ud af fladen S , som indeslutter volumen V , kan vi skrive

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dv, \quad (5.5)$$

hvor der atter er gjort brug af Gauss' nyttige sætning A.23. Men I skal jo være den ladning, der per tid forsvinder fra volumenet, altså

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv, \quad (5.6)$$

idet vi i fuld almindelighed antager, at $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, mens volumenet V anses for fast. Differentiationen efter tid har derfor kunnet flyttes ind under integraltegnet.

I 5.5 og 5.6 har vi nu to forskellige udtryk for strømmen I ud af volumenet. Vi sætter højresiderne lig hinanden og finder

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right) dv = 0. \quad (5.7)$$

Integralet 5.7 skal være nul for ethvert volumen, også et vilkårligt lille. Dette sker kun, hvis integranden er identisk nul i alle punkter af området. For ethvert strømfelt gælder altså

*Kontinuitets-
ligningen*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (5.8)$$

Ligning 5.8 kaldes *kontinuitetsligningen* og er et lokalt udtryk for den fundamentale egenskab ved universet, at elektrisk ladning er bevaret. Kontinuitetsligningen er ikke en Maxwell ligning. Man kan imidlertid let vise, at den er indeholdt i den 1. og den 4. Maxwell ligning tilsammen.

Vi udledte kontinuitetsligningen for det generelle tilfælde, hvor ladningstætheden ρ afhang af både sted og tid. Begrænser vi os til det stationære tilfælde er ρ konstant, og kontinuitetsligningen reducerer til

*Stationær
strøm er
divergensfri*

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (5.9)$$

Kontinuitetsligningen 5.8 svarer helt til en tilsvarende i teorien for væskers bevægelse, som udtrykker massens bevarelse. For væsker angiver ρ massefylden og $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ væskestrømtætheden. Ligningen 5.9 beskriver da bevægelsen af en usammentrykkelig væske.

5.2 Resistans

Behov for
materiale-
ligning

Det er det elektriske felt i en leder, som giver anledning til den elektriske strøm. Strømmens størrelse er ikke noget, vi kan beregne teoretisk, idet den foruden af feltet afhænger af den pågældende leders egenskaber. Vi har derfor brug for en *materialeligning*, som forbinder strømtæthed og feltstyrke.

5.2.1 Ohms lov

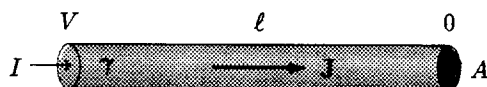
Empirisk har det vist sig, at der for en meget stor gruppe materialer i stationære tilfælde er tale om en simpel proportionalitet mellem strømtæthed og feltstyrke idet

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}. \quad (5.10)$$

Ohms lov?

For et givet materiale og en given temperatur er γ en konstant, som kaldes *konduktiviteten*. Materialer, som følger relationen 5.10, kaldes *ohm'ske* og selve relationen kaldes *Ohm's lov*.

Vi kan give Ohms lov en måske mere velkendt form ved at anvende den på et ledningstykke med konstant tværsnit A og længde ℓ . Vi antager, at det



$$I = JA = \gamma EA = \gamma \frac{V}{\ell} A$$

Figur 5.2: Ohms lov for et lederstykke.

ledende materiale er homogent med konduktivitet γ og, at der opretholdes en spændingsforskel V mellem ledningens endepunkter. Se fig. 5.2.

Efter 5.4 får vi nu for ethvert tværsnit af ledningen

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \gamma \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}. \quad (5.11)$$

Da ledningen er homogen, vil potentialet aftage jævnt langs lederen sådan, at feltstyrken $E = V/\ell$. Af symmetrigrunde må $\mathbf{E}$ være parallel med lederen og konstant over ethvert tværsnit af denne. Heraf følger efter 5.11, at $I = \gamma AE = \gamma AV/\ell$ eller $V = \ell I/\gamma A$. Vi kan skrive denne sammenhæng som

Ohms lov!

$$V = IR, \quad \text{idet} \quad R = \frac{\ell}{\gamma A}, \quad (5.12)$$

Resistans,
resistivitet,
konduktivitet

som er Ohms lov på konventionel form. Her kaldes R den pågældende lednings *resistans* eller *modstand*, som måles i ohm med symbolet Ω . Der gælder $[R] = \Omega = \text{VA}^{-1} = \text{JA}^{-2}\text{s}^{-1}$. Konduktiviteten γ måles i $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. Ofte angives den reciprokke konduktivitet for et materiale. Denne størrelse kaldes *resistiviteten* og måles i Ωm med symbolet ρ (ikke at forveksle med ladningstæthed). Udtrykt ved resistiviteten bliver 5.12:

$$R = \frac{\rho \ell}{A}. \quad (5.13)$$

5.2.2 Konduktivitet og resistivitet

Konduktivitet γ eller resistivitet ρ er materialeegenskaber, som kun mangelfuldt kan beregnes og derfor må fastlægges ved måling. Tabel 5.1 giver resistiviteten for en række almindelige materialer ved rumtemperatur. Tabellen illustrerer det store interval, som resistiviteten spænder over, fra sølv som den bedste leder til typiske isolatorer som kvarts eller plastic.

*Materiale-
egenskaber*

Tabel 5.1: Resistivitet og temperaturkoefficient af materialer

Materiale	Resistivitet 293 K Ωm	Temperatur- koefficient K^{-1}
Rene metaller :		
Sølv	1.59×10^{-8}	3.8×10^{-3}
Kobber	1.72×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Aluminium	2.82×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Wolfram	5.6×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Jern	10×10^{-8}	5.0×10^{-3}
Platin	10×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Kviksølv	95.8×10^{-8}	0.9×10^{-3}
Grafit	1.4×10^{-5}	
Legeringer :		
Stål	$10^{-18} \times 10^{-8}$	4.0×10^{-3}
Messing	7.0×10^{-8}	2.0×10^{-3}
Constantan (Cu60, Ni40)	49×10^{-8}	$\sim 10^{-6}$
Elektrolyter :		
NaCl-opløsning, mættet	0.044	-5×10^{-3}
Havvand	0.25	
Destilleret vand	5×10^5	
Halvledere :		
Silicium, ren	2×10^3	negativ
Germanium, ren	0.46	-48×10^{-3}
Isolatorer :		
Træ	$10^8 - 10^{11}$	
Glas	$10^{10} - 10^{14}$	
Svovl	$\sim 10^{15}$	
Kvarts, smeltet	$> 10^{16}$	
Plastic	$10^{10} - 10^{18}$	

Kilde: Handbook of Chemistry and Physics (1980).

I almindelighed stiger resistiviteten med stigende temperatur. Dette udtrykkes ved *temperatur-koefficienten* α . Nær rumtemperatur T_0 er

*Temperaturens
indflydelse*

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha(T - T_0)), \quad (5.14)$$

hvor T er temperaturen. Det skal bemærkes, at temperaturkoefficienten α for mange rene metaller ligger nær $1/273$ (sml. tabel 5.1), som er rumudvidelseskoefficienten for en ideal gas. Dette er ikke tilfældigt, men kan begrundes ud fra metallernes elektronteori.

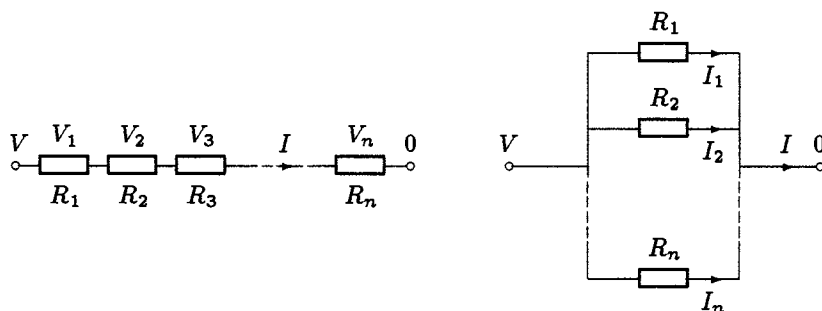
Relationen 5.14 gælder ikke ved meget lave temperaturer, idet resistiviteten for mange metaller dér brat falder til nul. Metallet er da *superledende*, et fænomen som i 1911 blev opdaget af *Kamerlingh Onnes* (1853-1926) $\square$.

5.2.3 Resistorer

Terminologi

I praksis fremstilles resistanser ved bevikling af keramiske kerner med modstandstråd eller ved belægning med tynde lag eller spiraler af kul. En sådan resistans omtales som en *modstand* eller en *resistor*. Den sidste betegnelse er indført for at skelne komponenten en *resistor* fra dens egenskab *resistans*. Tidligere har vi omtalt en kondensator som en *capacitor* med egenskaben *capacitans*. Vi skal siden under induktion møde komponenten en *induktor* med egenskaben *induktans*.

I elektriske diagrammer betegnes resistorer R med symboler som $\square$, $\sim$ og $\square$ for en variabel resistor. Resistorer forbindes ofte flere sammen i serie eller parallel, se fig. 5.3.



Figur 5.3: Resistanser i serie og parallel.

Resistanser i serie

I serieforbindelse af resistorerne $R_1, R_2, \dots, R_n$, løber der samme strøm I gennem dem alle. Spændingen over hver resistor bliver $V_1 = R_1 I$, $V_2 = R_2 I, \dots, V_n = R_n I$. Den totale spænding V over alle resistorerne er da bestemt ved

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = (R_1 + R_2 + \dots + R_n)I = RI. \quad (5.15)$$

Den ekvivalente resistans R af n serieforbundne resistorer bliver altså

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (5.16)$$

Resistanser i parallel

I parallelforbindelse er der samme spænding V over alle resistorer. Gennem resistorerne løber strømmene $I_1 = V/R_1, I_2 = V/R_2, \dots, I_n = V/R_n$. Den samlede strøm I gennem alle resistorerne er da bestemt ved

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) V = \frac{V}{R}. \quad (5.17)$$

Den ekvivalente resistans R af n parallelforbundne resistanser bliver altså

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (5.18)$$

For kun to parallelforbundne resistorer benytter man oftest med fordel udtrykket

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (5.19)$$

5.3 Stationær strøm i et udstrakt medium

Man er ofte interesseret i at kende den stationære strømfordeling i et udstrakt ledende medium, hvor en ydre elektromotorisk kraft opretholder en fast potentialforskel mellem to punkter eller områder inden for mediet. Man kan illustrere strømforholdene med *strømmlinier* i analogi med de feltlinier, vi tidligere har anvendt til at anskueliggøre det elektriske felt (fig. 5.4).

Vi ser først på et udstrakt, homogent ledende medium. Her er der helt normalt et potentialfelt φ , selv om dette opretholdes udefra med den elektromotoriske kraft. Det elektriske felt er rotationsfrit med feltstyrken $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Af 5.9 og 5.10 følger da

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \gamma \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (-\nabla\varphi) = 0. \quad (5.20)$$

Altså igen Laplaceligningen

$$\boxed{\nabla^2\varphi = 0.} \quad (5.21)$$

Laplaceligningen må nu løses med de relevante grænsebetingelser, som kan fastlægge φ eller $\mathbf{J}$ på grænsefladerne af det ledende medium. At fastlægge $\mathbf{J}$ er det samme som at fastlægge $\mathbf{E}$, da de to vektorer er forbundet ved Ohms lov.

Vi betragter dernæst en grænseflade mellem to ledende medier, 1 og 2, med konduktiviteter γ_1 og γ_2 . I det stationære tilfælde er $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ som udtryk for, at der ikke ophobes en voksende ladning på grænsefladen. Ser vi på et lille element $n da$ af denne, giver et Gauss-dåse argument

$$\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{n} da - \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n} da = 0. \quad (5.22)$$

Altså

$$\boxed{(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) \cdot \mathbf{n} = 0.} \quad (5.23)$$

eller, ved brug af Ohms lov 5.10,

$$\boxed{(\gamma_2 \mathbf{E}_2 - \gamma_1 \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = 0.} \quad (5.24)$$

Ligning 5.23 udtrykker, at normalkomposanten af $\mathbf{J}$ er uændret ved passage af grænsefladen.

Lad os endelig se på et udstrakt, moderat ledende medium, hvori der er indfældet en god leder, som med en ledning er forbundet til en elektromotorisk kraft. En sådan leder kaldes en *elektrode*, og vil typisk være af metal med meget større ledningsevne end mediet.

I det stationære tilfælde gælder kontinuitetsligningen 5.9, som på integral form bliver

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0, \quad (5.25)$$

hvor S er en lukket flade inden for det ledende medium. Omslutter den lukkede flade en elektrode, gælder 5.25 stadig, men vi må være omhyggelige med at inkludere tilledningen. Vi kan forestille os, at der i mediet er boret en snæver kanal med tværsnitsareal S' til tilledningen med strømmen I . Efter 5.25 har vi da

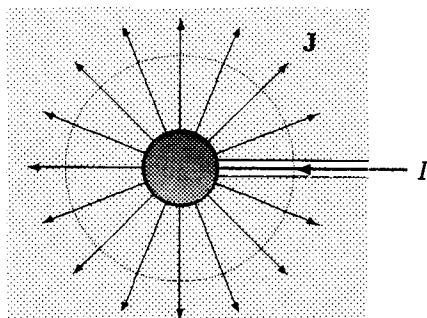
$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S'} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \int_{S-S'} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0. \quad (5.26)$$

Strømfelter og strømmlinier

Laplace igen!

*Stationært:
strøm ind
= strøm ud*

*Tilledningen
skal med*



Figur 5.4: Strømbilledet omkring en elektrode med tilledning.

Strømmens kilde

Da strømtætheden i tilledningen vil være meget større end i mediet, kan vi med god tilnærmelse i det sidste integral erstatte $S - S'$ med hele fladen S . Idet da er rettet ud af S og S' , bliver det første integral $-I$, hvor I er strømmen ind gennem tilledningen. Vi har da

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \gamma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = I. \quad (5.27)$$

Denne ligning er helt af samme form som Gauss' lov i et dielektrikum 3.23, der kan skrives som

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \epsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = Q. \quad (5.28)$$

De ekvivalente størrelser ses at være

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{J}, \quad Q \equiv I, \quad \epsilon \equiv \gamma, \quad (5.29)$$

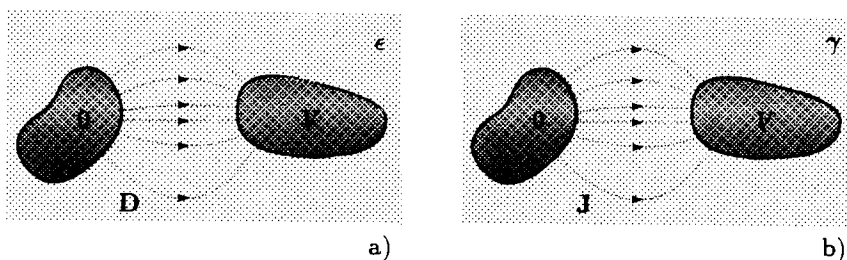
Analogi strømfelt-fluxfelt

hvor I optræder som strømmens kilde. I det hele taget er der en vidtgående analogi mellem det stationære strømfelt omkring elektroder i et ikke for godt ledende medium og det elektriske fluxfelt omkring ledere i et dielektrikum. Denne analogi gør, som vi skal se, at løsninger fra elektrostikken uden videre kan overføres til problemer vedrørende strømme.

På figur 5.5 viser a) et dielektrikum med permittivitet ϵ , hvori der findes to ledere med potentialforskellen V . Dette arrangement har vi tidligere kaldt en kondensator. Tilsvarende viser b) et strømførende, moderat ledende medium med konduktivitet γ , for eksempel en elektrolyt, hvori der findes to elektroder med samme geometri som lederne i a). Elektroderne holdes fast på potentialforskellen V ved hjælp af en ydre elektromotorisk kraft. I det dielektriske tilfælde a) ved vi, at lederne er ekvipotentielle områder med potentialer, som vi kan sætte til henholdsvis 0 og V . Kondensatoren har en kapacitans C og en ladning Q således, at $Q = CV$.

I ledertilfældet b) er der mellem elektroderne en resistans R og en strøm I således, at $I = V/R$. Da hver elektrode har meget høj konduktivitet, er der kun et ringe spændingsfald fra tilledningen til elektrodens overflade. Elektroderne bliver derfor næsten ekvipotentielle områder med samme potentialer som ved dielektrikumet. Potentialfunktionen φ tilfredsstiller derfor i begge tilfælde Laplaceligningen med samme randbetingelser. Det medfører at potentialfunktionerne i de to tilfælde er identiske. For de to tilfælde har vi da i parallelle skridt

To problemer, samme potential



Figur 5.5: a) Elektrisk fluxfelt omkring ledere i et dielektrikum. b) Stationært strømfelt omkring elektroder i et moderat ledende medium.

Dielektrikum	Leder
$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$
$Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a}$	$I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$
$Q = CV$	$I = V/R$

(5.30)

Ud fra disse relationer finder man umiddelbart

$$Q = \epsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = CV \quad \text{og} \quad I = \gamma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{R} V, \quad (5.31)$$

hvorefter division af udtrykket for Q med udtrykket for V giver

$$\boxed{\frac{\epsilon}{\gamma} = RC.} \quad (5.32)$$

Denne relation er meget nyttig ved anvendelsen af resistans-capacitans analogien, som det illustreres med de følgende eksempler. Størrelserne RC og ϵ/γ har dimension af tid. Vi skal møde dem flere gange senere.

*Resistans-
capacitans
relation*

▷ Pladeleder og pladekondensator: Vi har blandt andet i afsnit 2.10 beregnet capacitansen af en pladekondensator. Er kondensatoren fyldt med et dielektrikum med permittivitet ϵ gælder efter 3.43

$$C = \frac{\epsilon A}{d}.$$

Vi erstatter nu dielektriket med et moderat ledende medium med konduktivitet γ . Ved udnyttelse af 5.32 finder vi da resistansen mellem elektroderne

$$R = \frac{1}{C} \frac{\epsilon}{\gamma} = \frac{d}{A\gamma},$$

i overensstemmelse med udtrykket 5.12 for resistansen af en ledning. Udtrykket afhænger altså ikke af, om lederen er tyk eller tynd. Ved at negligere randfeltet i kondensatoren har vi fået et feltliniebillede i dielektriket, som helt korrekt svarer til strømlinebilledet i lederen. Det faktiske feltliniebillede i en kondensator med stor pladeafstand ligner på grund af randfeltet slet ikke strømlinebilledet i en lang leder. Analogiens begrænsning ligger i, at selv en dårlig leder har meget større ledningsevne (∞) end et omgivende vacuum. For et dielektrikum er permittiviteten kun nogle få gange større end vacuumpermittiviteten. ◁

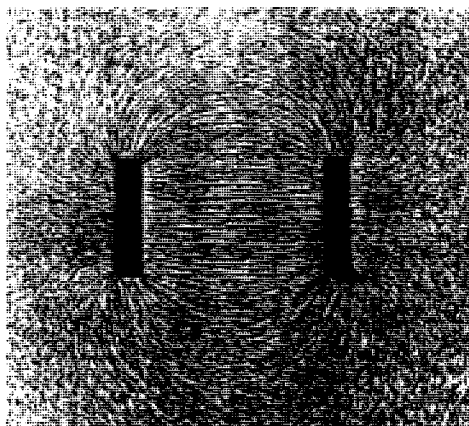
*Analogiens
begrænsning*

Mål kapacitans
med et
 Ω -meter

▷ Elektrolytisk kar: Med komplicerede udformninger af lederne i en kondensator er det vanskeligt at beregne feltet mellem dem og dermed kapacitansen. Nedsænkes elektroderne eller modeller deraf i en tank fyldt med en elektrolyt, er det imidlertid simpelt at måle resistansen mellem dem. Er denne R i en elektrolyt med konduktivitet γ , bliver kapacitansen af elektroderne i et dielektrikum med permittivitet ϵ efter 5.32

$$C = \frac{1}{R} \frac{\epsilon}{\gamma}. \quad \triangleleft$$

▷ Feltlinier gjort synlige: Det elektrolytiske kar kan også bruges til at kortlægge elektriske felter. Eksempelvis kan man med en passende lille målesonde følge ekvipotentialfladerne, hvor spændingen jo skal være konstant. En todimensional variant af det elektrolytiske kar er et stykke filterpapir fugtet med en passende elektrolyt. Trykkes metalelektroder mod papiret vil strømlinierne mellem dem svare til strømlinierne mellem parallelle



Figur 5.6: Strømmlinier om to rektangulære elektroder.

Synlig
iondrift

rette cylindre med samme tværsnit som elektroderne. Strømmlinierne kan synliggøres ved at drysse korn af kaliumpermanganat på papiret. De stærkt farvede negative permanganationer vil da bevæge sig imod strømliniens retning og derved gøre denne synlig. Fig. 5.6 viser feltlinier omkring to rektangulære elektroder opnået på en noget anden måde, hvor man benytter, at små kulstoffibre i en oliesuspension, retter sig ind efter feltet. $\triangleleft$

5.4 Effekt afsat i en leder

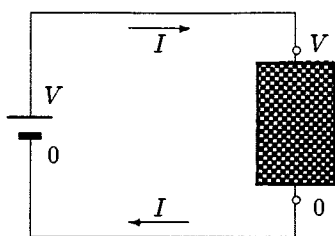
Hvor bliver
energien af?

Den elektriske strøm fører ladning fra et højere potential til et lavere. Derved tabes potentiel elektrisk energi. Som eksempel viser fig. 5.7 en elektromotorisk kraft i form af et batteri, som via ledninger er forbundet til en forbruger antydnet ved en "sort kasse", hvis indhold vi for øjeblikket ikke behøver at redegøre for. Alt vi ved er, at der løber en strøm I gennem tilledningerne, og at batteriet opretholder et potential V over kassen. I tidsintervallet dt transporteres der da en ladning $dq = I dt$ fra potentialet V til potentialet 0. Tabet i potentiel energi er derfor

$$-dU = V dq = VI dt, \quad (5.33)$$

mens effekten bliver $P = -dU/dt$, som overføres til kassen:

$$\boxed{P = IV.} \quad [P] = W \quad (5.34)$$



Figur 5.7: Effekt ved ladningstransport gennem sort kasse.

Energien, Pdt som tilføres kassen, må efter loven om energiens bevarelse, være at finde et andet sted. Hvor og i hvilken form afhænger af kassens indhold. Rummer den en elektromotor, som udfører et mekanisk arbejde, optræder (en væsentlig del af) energien som arbejde. Rummer kassen en elektrolysecelle findes på samme måde (en væsentlig del af) energien som kemisk energi i elektrolyseprodukterne.

Mange muligheder

Her er vi især interesseret i den effekt, der afsættes, når kassen rummer en resistans. Efter det primitive billede vi har dannet os af den elektriske strøm, bevæger elektronerne sig gennem resistansen med en konstant drifthastighed. De vinder altså ikke nogen kinetisk energi. Hele den potentielle energi, de har tabt, er ved kollisioner overført til metalgitterets termiske svingninger. Dette er en termodynamisk set irreversibel proces, der altså viser sig som varme i resistansen. Fænomenet kaldes *Joule-varme*.

*Irreversibel
Joule-varme*

Den til Joule-varmen hørende effekt i en resistans R , kan efter 5.34 og Ohms lov 5.12 skrives på flere måder:

$$P = IV = RI^2 = \frac{V^2}{R}, \quad [P] = W. \quad (5.35)$$

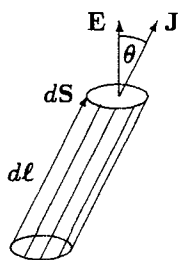
Lad os nu betragte effektforholdene i et kontinuert medium. Vi begrænser os til det stationære tilfælde, men af hensyn til senere anvendelser antager vi helt generelt en strømtæthed $\mathbf{J}$ og en feltstyrke $\mathbf{E}$, som ikke nødvendigvis er proportionale og dermed parallelle. Vi lægger et lille strømlinierør (fig. 5.8) med kantlængde $d\ell$ parallel med $\mathbf{J}$ og endeflader $d\mathbf{S}$ vinkelrette på $\mathbf{E}$. Vinklen mellem $\mathbf{J}$ og $\mathbf{E}$ kaldes θ . Strøm og spænding bliver

Effekt i udstrakt medium

$$I = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J dS \cos \theta, \quad V = \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = E d\ell \cos \theta. \quad (5.36)$$

Effekten dP inden for den betragtede del af strømlinierøret bliver da efter 5.34:

$$dP = IV = JE \cos \theta d\ell dS \cos \theta = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv, \quad (5.37)$$



$$\begin{aligned} I &= \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ V &= \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ dP &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv \end{aligned}$$

Figur 5.8: Beregning af effekt for et strømlinierør.

Effekttæthed

hvor $dv = dldS \cos \theta$ er det af røret indesluttede volumen. I mediet er der altså i hvert punkt en *effekttæthed* (Wm^{-3}) af Joule-varme

$$\boxed{\frac{dP}{dv} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}.} \quad (5.38)$$

Hvis mediet er ohmsk, kan vi skrive effekttætheden som

$$\frac{dP}{dv} = \gamma E^2 = \frac{J^2}{\gamma}. \quad (5.39)$$

5.5 Hen mod elektrostatisk ligevægt

Etablering af
ligevægt

I elektrostatisk ligevægt sidder al elektrisk ladning på en leders overflade. Vi skal nu undersøge, hvor hurtigt en sådan ligevægt opnås. Hertil ser vi på et oprindelig feltfrit, homogent medium med konduktivitet γ og permittivitet ϵ . På en eller anden måde etablerer vi til tiden $t = 0$ en volumenladningstæthed $\rho_0(\mathbf{r})$ i mediets indre. Dette er klart ikke nogen ligevægtssituation, og elektronerne vil straks sættes i bevægelse. Efter kontinuitetsligningen 5.7 har vi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (5.40)$$

Men efter Ohms lov er $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$, som indsat i 5.40 giver

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (5.41)$$

Det elektriske felt skyldes ladningerne i mediet. Efter den 1. Maxwell ligning 3.26 i et dielektrikum er $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ eller $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$. Det indsætter vi i 5.41 og finder differentiaalligningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon} \rho = 0, \quad (5.42)$$

som har følgende løsning for ladningstætheden:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) e^{-\gamma t/\epsilon}. \quad (5.43)$$

Henfald af
ladning

Ladningstætheden vil altså eksponentielt gå mod nul på ligedannet måde. Afladningens tidsforløb bestemmes af tiden

$$\boxed{\tau_r = \frac{\epsilon}{\gamma} = \epsilon \rho,} \quad (5.44)$$

Relaxationstid

som kaldes mediets *tidskonstant* eller *relaxationstid*. Ud fra permittiviteterne i tabel 3.1 og resistiviteterne i tabel 5.1 kan relaxationstiden beregnes for moderat ledende medier. Se tabel 5.2.

Det går hurtigt
men-

For metaller kan der være tvivl om, hvilken permittivitet der skal anvendes. Med skønnet $\epsilon \sim \epsilon_0$ bliver τ_r af størrelsesordenen $10^{-11} \times 10^{-8} = 10^{-19}$ s. Dette skøn imidlertid ikke en realistisk værdi, blandt andet fordi den er mindre end den gennemsnitlige tid mellem to kollisioner af en elektron med metalgitteret, som er af størrelsesordenen 10^{-14} s. For tider kortere end dette kan vi ikke give mening til relationen $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$.

Vi bemærker også, at den beregnede relaxationstid er uafhængig af størrelsen af den klump stof, vi betragter. Har denne en dimension på blot 1 mm, betyder det nævnte skøn, at den hastighed, ladningsjusteringen udbreder sig med, bliver 10^{16} ms^{-1} , altså langt over lyshastigheden. I mikroskopisk skala viser det sig, at den reelle relaxationstid er den nævnte middeltid på 10^{-14} s . I makroskopisk skala er tiderne længere, nemlig udbredelsestiden, som er materialets lineære udstrækning divideret med lyshastigheden. Altså omkring $3 \times 10^{-10} \text{ s}$ for en 10 cm klump.

*Teoriens
begrænsning*

Tabel 5.2: Relaxationstid for forskellige materialetyper

Materiale	Konduktivitet $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$	Permittivitet	Relaxationstid s
Metal	$\approx 6 \times 10^7$	ϵ_0	$(10^{-19}), 10^{-10}, 10^{-14}$
Halvleder	≈ 100	ϵ_0	10^{-13}
Isolator	$\approx 10^{-16}$	ϵ_0	10^5

5.6 Elektromotorisk kraft

For at opretholde en stationær strøm i en leder er det nødvendigt at råde over en elektromotorisk kraft. I de foregående afsnit har vi da også forudsat, at dette var tilfældet. Den elektromotoriske kraft blev imidlertid blot beskrevet ved sin evne til at opretholde en spænding over en leder.

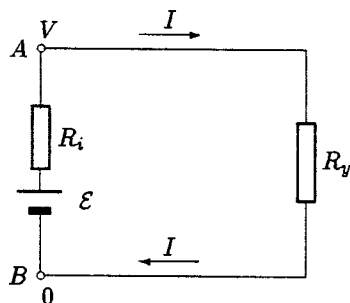
Her skal vi nu nærmere beskrive elektromotoriske kræfter og deres rolle i *lukkede elektriske kredsløb*. Kun dér kan man have en varig, stationær strøm. Som et konkret eksempel kan vi se på kredsen i fig. 5.9, hvor et *batteri* holder en potentialforskel V mellem polerne A og B . For bekvemmelighed giver vi A potentialet V og B potentialet 0.

*Kun varig
strøm i
lukket kreds*

Gennem den ydre resistans R_y vil der da løbe strømmen $I = V/R$ fra A mod B . Den samme strøm må passere batteriet fra B til A , idet der ellers, i modstrid med al erfaring, ville ophobes ladning på batteriets poler. I batteriet sker der altså en ladningstransport *mod* det elektrostatiske felt, som jo også i batteriet er rettet fra polen A med det høje potential mod polen B med det lave potential.

At denne ladningstransport mod feltet er mulig skyldes, at der i batteriet virker andre kræfter end de rent elektrostatiske. Vi venter lidt med at beskrive disse kræfters natur, da den er uvæsentlig for den principielle diskussion. Det er her tilstrækkeligt at sige, at der i batteriet virker kræfter

*Andre kræfter
på ladning*



Figur 5.9: Simpelt elektrisk kredsløb med elektromotorisk kraft og indre og ydre resistans.

af ikke-elektrostatisk art, som bevirker en transport af ladninger. Lad nu E være den elektriske feltstyrke og lad E' betegne summen af alle andre kræfter, som påvirker en enhedsladning. Både E og E' har enheden Vm^{-1} . Det arbejde $\mathcal{E}$, disse felter udfører på en enhedsladning, som i strømmens retning føres en gang rundt i kredsen fra A til A , bliver

$$\mathcal{E} = \oint E \cdot d\ell + \oint E' \cdot d\ell. \quad (5.45)$$

Men da E er et elektrostatisk felt, er dets cirkulation 0. Vi har derfor

$$\mathcal{E} = \oint E' \cdot d\ell, \quad (5.46)$$

Elektromotorisk kraft defineret

som kaldes kredsens *elektromotoriske kraft*. I det betragtede tilfælde er den lokaliseret i batteriet, men vi skal senere se eksempler, hvor elektromotorisk kraft er fordelt langs hele kredsen. Elektromotorisk kraft måles i volt og er altså ikke en kraft, men et arbejde per ladning. Navnet er således misvisende, men det har historisk hævd i mange sprog og skal derfor også anvendes her. Vi skal undertiden benytte forkortelsen *emk* for elektromotorisk kraft.

Indre resistans

Når et ladningselement dq føres én gang rundt i kredsen med strømmen I 's retning, udfører den elektromotoriske kraft arbejdet $\mathcal{E}dq$. Det afsættes i kredsen som Joule-varme. I den ydre kreds afsættes energien $V dq = R_y I dq$. Desuden viser erfaringen, at det for de fleste elektromotoriske kræfter er nødvendigt at tage hensyn til en vis *indre resistans*, som vi skal betegne med R_i . I denne afsættes der da energien $R_i I dq$. Loven om energiens bevarelse giver da, efter division med dq :

$$\mathcal{E} = R_y I + R_i I. \quad (5.47)$$

Polspænding

Efter Ohms lov er $R_y I = V$, hvor V er spændingsfaldet over den ydre resistans. Vi kan derfor skrive *polspændingen* V som

$$V = \mathcal{E} - R_i I. \quad (5.48)$$

For forsvindende indre resistans er den spænding, som opretholdes over den ydre kreds, således $\mathcal{E}$, men for reelle elektromotoriske kræfter gælder det ellers, at den spænding de leverer afhænger af belastningsstrømmen. I praksis kan den elektromotoriske kraft måles med et voltmeter, som kun bruger ringe strøm (har stor indre modstand).

Betegner $R = R_y + R_i$ kredsens samlede resistans, kan 5.47 skrives

$$\mathcal{E} = RI, \quad (5.49)$$

Ohms lov for enkelt kreds

som kaldes Ohms lov for en enkelt strømkreds. Den siger, at i en enkelt lukket strømkreds er den totale elektromotoriske kraft produktet af strømmen i kredsen og dennes samlede resistans.

I elektriske diagrammer angives en konstant elektromotorisk kraft med batterisignaturen $-||-$ eller $-|||I||-$, når det skal være særlig flot. Den lange pind angiver altid den positive pol, den korte den negative. Den indre resistans angives ved en resistor i serie med den elektromotoriske kraft.

5.6.1 Eksempler på elektromotoriske kræfter

Erfaringen viser, at det ofte volder problemer at få hold på begrebet elektromotorisk kraft. Dette kan skyldes, at der som sagt ikke er tale om en kraft, men om et arbejde per ladning. Elektromotorisk kraft måles desuden i volt, på samme måde som spænding. Men dog er der ikke tale om en spænding, selv om spænding undertiden er lig emk. Det kan yderligere virke forvirrende, at de elektromotoriske kræfter, man møder ved anvendelserne, er af mange og meget forskellige typer. Vi skal i dette afsnit se på nogle af dem.

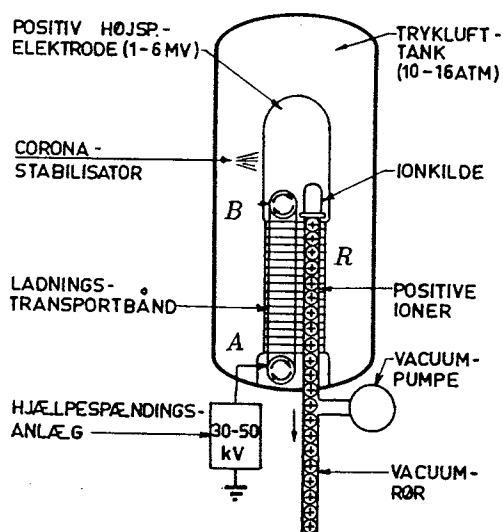
Hvad emk er og ikke er

En arbejdende elektromotorisk kraft omdanner altid energi i en eller anden form til elektrisk energi. I en dynamo omsættes mekanisk energi til elektrisk energi, i et batteri omsættes kemisk energi, i et termoelement omsættes varme, i en fotocelle lys osv. De følgende eksempler illustrerer alle dette.

*Altid energi-
omdannelse*

▷ Elektrostatisk generator: En elektrostatisk generator kan bestå af en isoleret ophængt metalkugle med en åbning i bunden. Ved hjælp af en korona-

*Van de Graaff
generator*



Figur 5.10: Elektrostatisk generator (van de Graaff generator). Isoleret med en passende gas ved højt tryk kan denne type generator bygges til spændinger på over 20 MV.

udladning belægges et transportbånd af gummi med ladning ved punktet A. Når ladningen kommer op til og ind i kuglen, befinder den sig i det indre af en leder, og vil derfor søge ud til overfladen af denne, idet den aftappes ved en ny koronaukladning ved B. Kuglen kan på den måde opnå et meget højt potential. Med en modstand R kan man tappe strøm fra kuglen. Den stationære tilstand nås ved en spænding V , hvor der strømmer lige så megen ladning ned gennem R , som der føres op med båndet. Den elektromotoriske kraft er her det arbejde, som udføres ved at føre en enhedsladning op til kuglen, altså V . ◁

▷ Elektrokemisk celle (batteri): Når to metalliske elektroder anbringes i en elektrolyt, vil der opstå en emk imellem dem. En sådan kombination kaldes en *elektrokemisk celle* og kan bruges til at drive strøm rundt i en ydre kreds. Energien kommer her fra kemiske omdannelser i cellen, hvis slutprodukter har lavere energi end udgangsmaterialerne.

Batteri

Lidt elektro-
kemi

Man får et godt overblik over de elektromotoriske kræfter, der kan opnås i en sådan celle, ud fra de *elektrokemiske normalpotentialer*, hvoraf nogle er samlet i tabel 5.3. Normalpotentialet af en elektrode er dens potential i for-

Tabel 5.3: Elektrokemiske normalpotentialer

Elektrodereaktion				Potential V
Li	$\rightleftharpoons$	Li ⁺	+e ⁻	-3.05
K	$\rightleftharpoons$	K ⁺	+e ⁻	-2.92
Na	$\rightleftharpoons$	Na ⁺	+e ⁻	-2.71
Mg	$\rightleftharpoons$	Mg ⁺⁺	+2e ⁻	-2.38
Zn	$\rightleftharpoons$	Zn ⁺⁺	+2e ⁻	-0.76
Fe	$\rightleftharpoons$	Fe ⁺⁺	+2e ⁻	-0.44
Cd	$\rightleftharpoons$	Cd ⁺⁺	+2e ⁻	-0.40
Co	$\rightleftharpoons$	Co ⁺⁺	+2e ⁻	-0.29
Ni	$\rightleftharpoons$	Ni ⁺⁺	+2e ⁻	-0.23
Sn	$\rightleftharpoons$	Sn ⁺⁺	+2e ⁻	-0.14
Pb	$\rightleftharpoons$	Pb ⁺⁺	+2e ⁻	-0.13
Fe	$\rightleftharpoons$	Fe ⁺⁺⁺	+3e ⁻	-0.04
H ₂	$\rightleftharpoons$	2H ⁺	+2e ⁻	0.00
Cu ⁺⁺ + 2e ⁻	$\rightleftharpoons$	Cu		+0.34
I ₂ + 2e ⁻	$\rightleftharpoons$	2I ⁻		+0.54
Ag ⁺ + e ⁻	$\rightleftharpoons$	Ag		+0.80
$\frac{1}{2}$ Hg ₂ ⁺⁺ + e ⁻	$\rightleftharpoons$	Hg		+0.80
Br ₂ + 2e ⁻	$\rightleftharpoons$	2Br ⁻		+1.07
Cl ₂ + 2e ⁻	$\rightleftharpoons$	2Cl ⁻		+1.36
Au ⁺⁺⁺ + 3e ⁻	$\rightleftharpoons$	Au		+1.42
F ₂ + 2e ⁻	$\rightleftharpoons$	2F ⁻		+1.87

Kilde: Handbook of Chemistry and Physics (1980).

hold til en såkaldt hydrogenelektrode, når begge elektroder er anbragt i en 1 normal opløsning af deres egne ioner. En celles elektromotoriske kraft er med tilnærmelse differensen mellem normalpotentialerne af dens elektroder.

Daniell celle

Som eksempel på en sådan celle kan vi tage den klassiske *Daniell celle*, se fig. 5.11. Den består af en Zn-elektrode i en opløsning af ZnSO₄ og en Cu-elektrode i en opløsning af CuSO₄. De to opløsninger er i ledende forbindelse. For eksempel kan elektroderne være anbragt i hver sin gren af et U-rør adskilt med en porøs prop, som forhindrer, at opløsningerne blander sig. Af Tabel 5.3 ses, at denne celle har en emk på 0.34 - (-0.76) = 1.10 V.

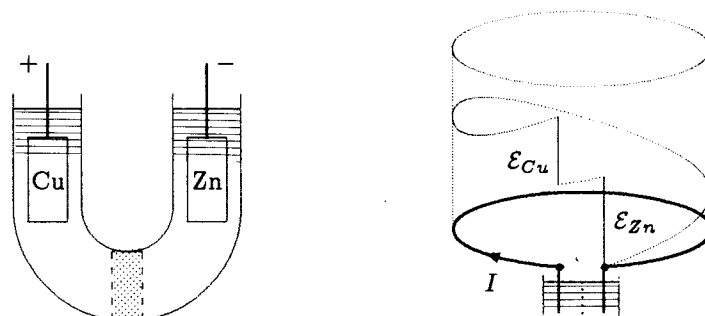
Elektrode-
processerne

De processer, som foregår i cellen, kan løst beskrives sådan: Atomerne i Zn-elektrodens overflade har en vis tendens til at gå i opløsning som Zn⁺⁺-ioner, idet de efterlader to elektroner i Zn-elektroden, som herved bliver negativ i forhold til elektrolyten:



Ved Cu-elektroden er der omvendt en tendens til processen

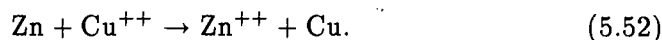




Figur 5.11: Daniell celle med tilhørende potentialforløb når cellen er belastet.

hvorved Cu-elektroden bliver positiv i forhold til elektrolyten. Der indstiller sig en ligevægt, idet de opståede potentialer modvirker processerne. Når imidlertid de to elektroder forbindes gennem en ydre kreds, vil elektroner fra Zn-elektroden strømme mod Cu-elektroden (dvs. en elektrisk strøm fra Cu til Zn), hvorved både 5.50 og 5.51 fremmes. Det vil sige, at Zn opløses og Cu udfældes. Den samlede proces kan kort skrives

Samlet proces



Forskellen i de to elektrodens opløsningstendens giver således anledning til processer, hvor positiv ladning fra Zn-elektroden bevæger sig gennem væsken til Cu-elektroden, selv om dennes potential er højere. Vi kan forstå dette ved at se på potentialforløbet, som skematisk er vist på fig. 5.11. De elektromotoriske kræfter virker i grænselaget metal-elektrolyt. Man kan i overensstemmelse med figuren sige, at vi har delt cellen op i to halv-celler med elektromotoriske kræfter $\mathcal{E}_{\text{Cu}}$ og $\mathcal{E}_{\text{Zn}}$. Cellens indre modstand R_i ligger i elektrolyten. For "polspændingen" V har vi, i overensstemmelse med 5.48,

*Potentialforløb
i celle*

$$V = \mathcal{E}_{\text{Cu}} + \mathcal{E}_{\text{Zn}} - R_i I, \quad (5.53)$$

hvor I er den af elementet leverede strøm. Vi ser, at der er et spændingsfald fra Zn mod Cu i overensstemmelse med ladningernes bevægelsesretning i elektrolyten. Det er kun i grænselagene, hvis tykkelse svarer til nogle få atomlag, at strømmen går mod det elektriske felts retning. <

5.7 Elektriske kredsløb

Ved anvendelserne møder man oftest elektrisk strøm i *elektriske kredsløb*, hvor der indgår forskellige *komponenter*. Disse kan være *aktive*, dvs. kilder til strømme og spændinger i kredsløbet. Komponenterne kan også være *passive*, dvs. at de ikke kan frembringe, men nok modificere en strøm i kredsløbet. I dette kapitel skal vi af aktive komponenter kun betragte konstante elektromotoriske kræfter og af passive komponenter kun resistanser. Tidsvarierende elektromotoriske kræfter og andre typer af passive komponenter behandles i kapitlet om vekselstrøm.

*Aktive
og passive
komponenter*

Vi har tidligere diskuteret kredsen fig. 5.9, som rummer en enkelt resistans R og en enkelt elektromotorisk kraft $\mathcal{E}$. Her skal vi se på mere

Netværk

Jævnstrøm

sammensatte elektriske kredsløb med mange mulige strømveje. Sådanne multi-kredsløb kaldes *elektriske netværk*. Når komponenterne alene er resistanser og konstante elektromotoriske kræfter, kan der i netværket kun forekomme stationære strømme. På dansk kaldt *jævnstrømme*, på engelsk *direct currents* eller *DC*. Selv om der i praksis ofte er tale om rumligt fordelte egenskaber, anses netværkets komponenter for at være *lokaliserede* og forbundet med resistansfri ledninger. Fig. 5.12 viser et eksempel på et sådant netværk.

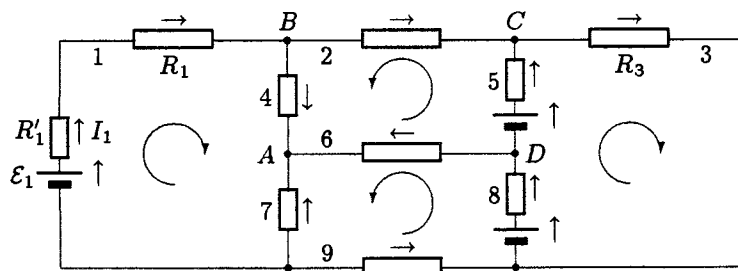
I nogle tilfælde kan et forelagt netværk deles op i kombinationer af simple serie- eller parallelforbindelser af resistanser og et antal elektromotoriske kræfter. I andre tilfælde er en opdeling enten ikke mulig, eller kredsløbet er så kompliceret, at fremgangsmåden bliver uoverskuelig. Man behøver da en kraftigere og mere generel metode, som den der nu skal præsenteres.

Generel metode

Hertil får vi brug for nogle betegnelser, som vi skal indføre med henvisning til fig. 5.12: Et stykke af netværket, sammensat af resistanser og elektromotoriske kræfter i serie uden afgreninger, kaldes en *gren*. For eksempel *CD* på figuren. Punkter, hvor tre eller flere grene mødes, kaldes *knudepunkter*. For eksempel *B* på figuren. Endelig kaldes en mulig lukket strømvej, for eksempel *ABCD* på figuren, for en *maske*. Ved analysen forsynes hver gren med et nummer $j = 1, 2, \dots, g$, hvor g er antallet af grene. Den samlede resistans i gren j kaldes R_j og den samlede elektromotoriske kraft $\mathcal{E}_j$. Hver gren gives desuden en strømretning, markeret ved en pil. Strømretningerne kan vælges helt vilkårligt. Tilsvarende forsynes hver maske med en vilkårlig omløbsretning, f.eks. med uret. En grenstrøm I_j regnes da positiv, hvis den (dvs. pilen) går i retning af den foreskrevne omløbsretning for en given maske. De elektromotoriske kræfters retning markeres med signaturen ---|--- for et batteri, med den positive pol angivet ved en lang streg. En elektromotorisk kraft regnes positiv, hvis den ladt alene ville give en strøm (fra den positive pol ud i grenen) i den foreskrevne omløbsretning. Bemærk, at det er omløbsretningen for masken, som bestemmer fortegnene. En strøm, som i én maske er positiv, kan meget vel være negativ i en anden.

Problemformulering

Den opgave, som skal løses, vil typisk være af typen: Alle resistanser og elektromotoriske kræfter er givne. Bestem de g ubekendte grenstrømme. Metoden til opgavens løsning bygger på følgende to *Kirchhoffs love*, som først blev formuleret af *G.R. Kirchhoff* (1824-1887) i 1845:



Figur 5.12: Elektrisk jævnstrømskredsløb med nummererede grene, strømretninger og omløbsretninger for masker.

1. Summen af alle strømme, som løber mod en knude, er nul, altså

$$\sum_{\text{knude}} I_j = 0, \quad (5.54)$$

hvor j antager værdierne for de grene, som mødes i knuden.

2. Summen af de elektromotoriske kræfter i enhver maske er lig summen af RI -spændingsfaldene i masken, altså

$$\sum_{\text{maske}} \mathcal{E}_j = \sum_{\text{maske}} R_j I_j, \quad (5.55)$$

hvor j antager værdierne for de grene, som indgår i masken.

Den første lov udtrykker, at stationære strømme ikke kan ophobe ladning i et knudepunkt. Den er således netværksformen af kontinuitetsligningen 5.9 for stationær strøm.

*Kirchhoffs
love*

Tilsvarende udtrykker den anden lov, at cirkulationen af det elektrostatisk felt er nul. Det er ekvivalent med, at summen af potentialændringerne i en lukket kreds er nul. Gennem en elektromotorisk kraft vokser potentialet med $\mathcal{E}$, over en resistans falder det med RI . Efter cirkulationsbetingelsen er summen af tilvæksterne lig summen af faldene, hvilket er Kirchhoffs 2. lov. Som det ses, falder Kirchhoffs love helt inden for den almindelige elektriske teori, idet de for et netværk udtrykker de grundlæggende love 5.9 og 2.25:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (5.56)$$

Holder man sig strikt til de givne fortegneregler, vil Kirchhoffs ligninger give den rigtige løsning for grenstrømmene. Vender en strømpil modsat den faktiske strøm, bliver løsningen for denne negativ. Ud fra grenstrømmene kan man så beregne spændingsfald over individuelle resistanser, effekt m.m.

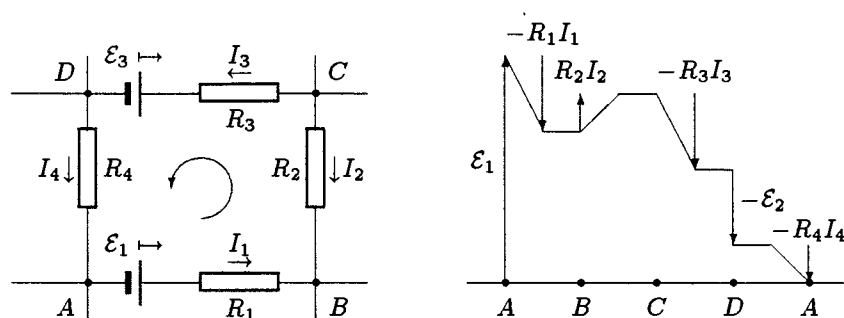
▷ En enkelt maske: Vi kan se på en vilkårlig maske $ABCD A$ med grenene 1,2,3,4, som er en del af et større netværk (fig. 5.13a). Eventuelle indre resistanser i de elektromotoriske kræfter tænkes lagt ud i kredsen. Vi starter vilkårligt i punktet A , som vi kan forestille os jordet, dvs. at A har potentialet 0. Derfra bevæger vi os mod uret rundt i kredsen. Ved passage af den første elektromotoriske kraft, stiger potentialet med $\mathcal{E}_1$. Strømmen i R_1 går i omløbsretningen, så her falder potentialet og potentialændringen er $-R_1 I_1$. For den næste resistans R_2 er strømretningen modsat omløbsretningen, så her ændres potentialet med $+R_2 I_2$. I gren 3 bliver potentialændringen over resistansen $-R_3 I_3$, mens den elektromotoriske kraft vender modsat omløbsretningen, hvilket giver potentialændringen $-\mathcal{E}_3$. Endelig er der i gren 4 et potentialfald, altså en ændring $-R_4 I_4$, hvorpå vi er tilbage i A med potential 0. Potentialforløbet er illustreret på fig. 5.13a. Summation af de fundne potentialændringer giver

En løs maske

$$\mathcal{E}_1 - R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 - \mathcal{E}_3 - R_4 I_4 = 0$$

eller, efter omordning af leddene,

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4.$$



Figur 5.13: a) En maske af et større netværk med påførte strømretninger. b) Potentialforløbet i masken for de faktiske strømretninger.

Dette udtryk ses, med anvendelse af fortegnskonventionerne, at være i fuld overensstemmelse med Kirchhoffs 2. lov 5.55 for den betragtede maske. <

Hvor mange
ligninger?

Ved løsningen af et netværksproblem med g grene vil der typisk være g ubekendte, nemlig grenstrømmene. De kræver g uafhængige ligninger til deres bestemmelse. Som det fremgår af 5.54 og 5.55 er der tale om lineære ligninger. Har netværket k knudepunkter, giver dette efter 5.54 k ligninger. Disse er imidlertid ikke lineært uafhængige. En gren forbinder jo to knuder, og en grenstrøm vil derfor optræde netop to gange i de k ligninger, én gang med positivt fortegn, én gang med negativt. Kaldes førstegradspolynomierne på venstre side af 5.54 for $L_1, L_2, \dots, L_k$ er deres sum $L_1 + L_2 + \dots + L_k$ derfor identisk 0. Enhver af ligningerne kan således udledes af de $k - 1$ andre, som er lineært uafhængige.

Det antal uafhængige maskeligninger, som derefter behøves, bliver da

$$m = g - k + 1, \quad (5.57)$$

altså, det nødvendige antal masker er antallet af grene minus antallet af knuder plus 1. I systemet af maskeligninger kan der også være lineær afhængighed, men man kan som regel uden større besvær finde det nødvendige antal lineært uafhængige ligninger. Fremgangsmåden ved løsning af et netværksproblem kan derfor sammenfattes i:

Den sikre
metode

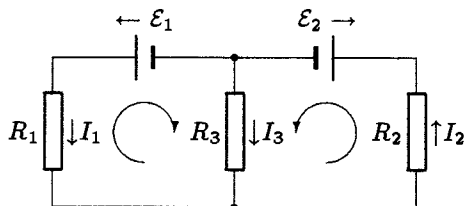
- Sæt nummer på hver gren.
- Sæt retning på hver grenstrøm.
- Opstil $k - 1$ knudeligninger.
- Bemærk retningen af hver elektromotorisk kraft.
- Opstil $m = g - k + 1$ uafhængige maskeligninger.
- Løs ligningerne med en af de dertil egnede metoder.

Indsæt tal
før løsning!

Det sidste punkt går selvfølgelig særlig let, dersom resistanser og elektromotoriske kræfter er givet som talværdier. Algebraiske løsninger med bogstavsymboler har tendens til at blive besværlige, så snart der er tale om mere end to eller tre masker.

▷ To masker: Som et overkommeligt eksempel skal vi algebraisk løse dobbeltkredsen vist på fig. 5.14. Her er $g = 3$ grene og $k = 2$ knuder. Der

To masker



Figur 5.14: Kredsløb med to masker.

er $k - 1 = 1$ uafhængig knudeligning og, efter 5.57, $m = g - k + 1 = 2$ uafhængige maskeligninger. Med de viste retninger bliver ligningerne

$$\begin{aligned} +I_1 & -I_2 & +I_3 & = & 0 \\ -I_1 R_1 & & +I_3 R_3 & = & -\varepsilon_1 \\ & +I_2 R_2 & +I_3 R_3 & = & -\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (5.58)$$

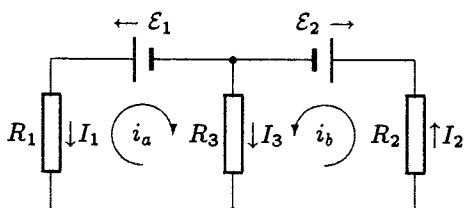
Løses dette system, f.eks. med determinantmetoden, finder man

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varepsilon_1(R_2 + R_3) - \varepsilon_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}, \\ I_2 &= \frac{\varepsilon_1 R_3 - \varepsilon_2(R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}, \\ I_3 &= \frac{-\varepsilon_1 R_2 - \varepsilon_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Bemærk, at strømmen I_3 altid bliver negativ. Det er da også oplagt, at I_3 -pilen på figuren vender 'forkert'. Derimod kan man ikke komme med noget forhåndsudsagn om I_1 og I_2 , som vil afhænge af komponenternes værdier. Man kan prøve løsningen i specielle tilfælde, og kontrollere, at den giver rigtige svar. Er eksempelvis $R_3 = \infty$ bliver $I_1 = I_2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(R_1 + R_2)$ og $I_3 = 0$. ◁

▷ Maskestrømme: Det er ofte fordelagtigt at anvende Kirchhoffs ligninger på en lidt anden måde, idet man efter Maxwell indfører *maskestrømme*. For hver maske er maskestrømmen en lukket cirkulerende strøm. Fordelen

*Maskestrøm
-en anden
metode*



Figur 5.15: Indførelse af maskestrømme.

herved er, at knudeligningerne automatisk er opfyldt.

Metoden illustreres enklest med et eksempel. Vi benytter kredsløbet fig. 5.15, som er identisk med 5.14, men hvor maskestrømmene i_a og i_b specifikt er angivet. Man ser, at grenstrømmene herved er bestemt som $I_1 = -i_a$, $I_2 = i_b$ og $I_3 = i_a + i_b$. Knudeligningen $I_1 - I_2 + I_3 = -i_a - i_b + i_a + i_b = 0$

er således altid opfyldt. De to ubekendte maskestrømme bestemmes da af ligningerne

$$\begin{aligned}i_a R_1 + (i_a + i_b) R_3 &= -\mathcal{E}_1 \\i_b R_2 + (i_a + i_b) R_3 &= -\mathcal{E}_2.\end{aligned}\tag{5.60}$$

der har løsningerne

$$\begin{aligned}i_a &= \frac{-\mathcal{E}_1(R_2 + R_3) + \mathcal{E}_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}, \\i_b &= \frac{\mathcal{E}_1 R_3 - \mathcal{E}_2(R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3},\end{aligned}\tag{5.61}$$

som umiddelbart ses at give grenstrømmene 5.59. $\triangleleft$

Kapitel 6

Det magnetiske felt

6.1 Kræfter mellem strømme

Elektrisk strøm har nogle karakteristiske ydre virkninger, hvorpå den kan kendes. Vi har allerede omtalt udviklingen af varme i en strømførende leder. En anden helt afgørende ydre virkning er det *magnetiske felt*, som findes i og omkring en elektrisk strøm.

*Ydre virkning
af strøm*

Elektrisk strøm og magnetisme blev først forbundet gennem Ørstedes opdagelse i 1820. Straks efter blev den kvantitative analyse af de elektromagnetiske fænomener taget op i Frankrig. Flere fremstående fysikere og matematikere bidrog, men først og fremmest var *Ampères* indsats afgørende. Ampère viste, at der er en magnetisk kraftvirkning mellem to strømme. Heraf drog han den visionære slutning, at *al* magnetisme, også den fra naturlige magneter, skyldes elektriske strømme. I årene 1820-25 gennemførte han en række snedigt udtænkte eksperimenter, hvis resultater kan sammenfattes i følgende love for den magnetiske kraft mellem to strømførende ledninger:

*Ampères
iagttagelser*

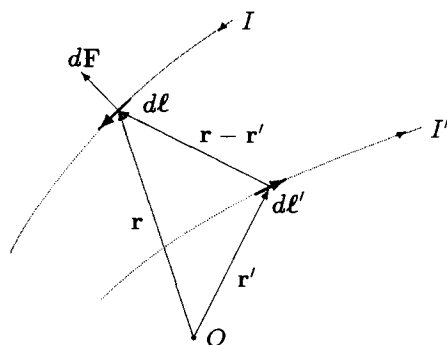
- Den kraft, hvormed én strømførende ledning påvirkes af en anden, er vinkelret på ledningen.
- Kraften aftager med kvadratet på afstanden mellem ledningerne.
- Kraften er proportional med hver af strømmene i de to ledninger.
- Vendes en strøm, skifter kraften retning.

Ampère arbejdede med lukkede strømkredse, men hans resultater gælder også kraften på lederelementer. Ampères observationer er således i overensstemmelse med følgende udtryk i nutidig vektornotation:

*Magnetisk
kraft mellem
strømme*

$$d\mathbf{F} = k_m I I' \frac{d\boldsymbol{\ell} \times [d\boldsymbol{\ell}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (6.1)$$

Her er $d\mathbf{F}$ den kraft (sml. fig. 6.1), hvormed lederelementet $d\boldsymbol{\ell}$ med strømmen I påvirkes af lederelementet $d\boldsymbol{\ell}'$ med strømmen I' . Strømmene regnes med fortegn efter lederelementernes retning. Vektorerne $\mathbf{r}$ og $\mathbf{r}'$ angiver positionen af elementerne $d\boldsymbol{\ell}$ og $d\boldsymbol{\ell}'$ og $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ deres indbyrdes afstand. Faktoren k_m er en konstant, som fastlægger enheden for elektrisk strøm.



Figur 6.1: Kraftvirkning mellem to strømme.

Lighed med
Coulombs lov

Formuleringen og nomenklaturen i 6.1 minder meget om den, vi anvendte i forbindelse med Coulombs lov i afsnit 2.2. Der er da også tydelige fælles træk mellem den magnetiske kraftlov 6.1 og Coulombs lov 2.3. Loven for den magnetiske kraft er dog langt mere kompliceret end Coulombs lov. Det skyldes, at strømmene har retning, som gennem $d\ell$ og $d\ell'$ indgår i et tripelprodukt sammen med afstandsvektoren $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

I den magnetiske kraftlov optræder konstanten k_m . I SI-systemet sættes den *per definition* til 10^{-7} NA^{-2} . Man skriver

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ NA}^{-2}. \quad (6.2)$$

μ_0 defineret

Konstanten μ_0 optræder overalt i teorien, hvor man har med magnetisme at gøre og kaldes *vacuum permeabiliteten*. Der gælder

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} = 1.257 \times 10^{-6} \text{ NA}^{-2} = 1.257 \times 10^{-6} \text{ Hm}^{-1}. \quad (6.3)$$

ϵ_0 og μ_0
forbundet

Enheden H anvendt i 6.3 hedder henry og vil blive indført under induktion.

Det skal indskydes, at vacuum permeabiliteten μ_0 og vacuum permittiviteten ϵ_0 er forbundet med hinanden, idet

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c. \quad (6.4)$$

Her er $c = 2.9979 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ lysets hastighed i vacuum, som i dag er fastsat ved definition. Dette forklarer den tidligere i 2.7 givne værdi af ϵ_0 , som altså dækker over

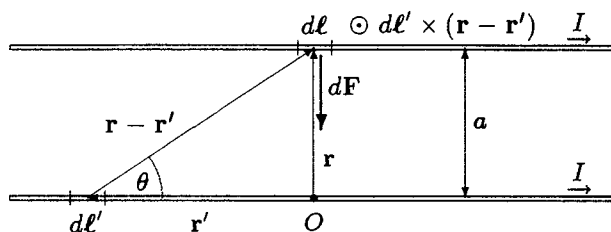
$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}. \quad (6.5)$$

Kraftlov

Med disse vedtægter kan vi da skrive den magnetiske kraftlov

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \frac{d\ell \times [d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (6.6)$$

▷ Kraft mellem parallelle strømme: Med 6.6 kan vi beregne den kraft, hvorved to parallelle ledninger med samme strøm I påvirker hinanden (fig. 6.2). Vektoren $d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ må her være vinkelret på ledernes fælles plan, og kraften på elementet $d\ell$ ligger derfor i denne plan.



Figur 6.2: Kraften mellem to parallelle strømme.

På figuren er θ vinklen mellem $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ og $d\ell'$. Der gælder da $r' = -a \cot \theta$, $d\ell' \equiv dr' = a d\theta / \sin^2 \theta$ og $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = a / \sin \theta$. Kraften på $d\ell$ bliver:

$$dF = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 d\ell \int_0^\pi \frac{1}{(a/\sin \theta)^3} \frac{a d\theta}{\sin^2 \theta} \sin \theta \frac{a}{\sin \theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \frac{d\ell}{a} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} d\ell. \quad (6.7)$$

Man overbeviser sig let om, at strømme i samme retning tiltrækker hinanden, mens modsat rettede strømme frastøder hinanden. ◁

▷ Amperens definition: Med $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$ ser man af 6.7, at to uendelig lange strømme I i en afstand på 1 m vil påvirke hinanden med en kraft på $2 \times 10^{-7} I^2 \text{ N}$ per m leder. Dette er grundlaget for definitionen af den fundamentale SI-enhed ampere, som lyder: En ampere er den konstante elektriske strøm som, hvis den opretholdes i to rette, parallelle ledere med uendelig længde og forsvindende cirkulært tværsnit og placeret 1 m fra hinanden i vacuum, ville skabe en kraft mellem disse ledere lig med $2 \times 10^{-7} \text{ N}$ per m længde.

*Ampere
defineret*

Ekspperimentelt fastlægges 1 A med en *strømvægt*, hvor man med lodder udbalancerer kraften mellem to ledere (i praksis spoler) med tyngdekraften. Da denne enhed ikke kan lægges i en kasse, anvendes den definerede strøm til at bestemme mere distribuerbare standarder for spænding og resistans, som så ved Ohms lov bestemmer strømmen. Siden 1990 defineres volt-standardens ved den såkaldte vekselstrøms Josephson-effekt og ohm ved den såkaldte kvante Hall-effekt. Amperen er dog vedblivende den fundamentale SI-enhed. ◁

6.2 Magnetfeltet fra en strøm

Ud fra det eksperimentelt underbyggede udtryk 6.6 for den kraft, hvormed én leder påvirker en anden, skal vi her udvikle forestillingen om et *magnetisk felt*. Vi kan hertil skrive udtrykket som

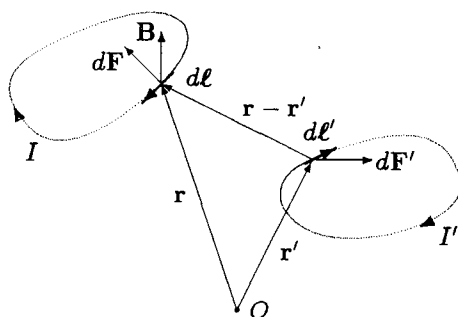
*Feltteori
søges*

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\ell \times \frac{I' d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (6.8)$$

Dette kan nu tolkes på den måde, at kilde-elementet $I' d\ell'$ bidrager til et *felt* $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, idet

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I' d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (6.9)$$

Det er da dette felt, som virker på strømelementet $I d\ell$. I praksis forekommer stationære strømme altid i lukkede kredse, som vist på fig. 6.3.



Figur 6.3: Magnetisk vekselvirkning mellem lukkede strømkredse.

Biot & Savart

Det samlede felt fra kredsen I' i et vilkårligt punkt af rummet uden for ledningen må derfor skrives

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I' d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (6.10)$$

hvor integralet går over hele den lukkede kildekreds. Dette udtryk skal vi kalde *Biot og Savarts lov*.

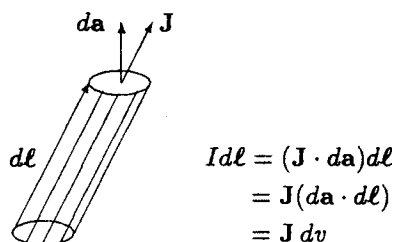
En ny feltvektor B

Hermed har vi indført et nyt vektorfelt $\mathbf{B}$, som kaldes den *magnetiske fluxtæthed*. Magnetisk fluxtæthed har sin egen enhed, som kaldes tesla idet $[B] = \text{T} = \text{Vs m}^{-2}$.

Stammer magnetfeltet fra en kontinuert strømfordeling med strømtæthed $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$, må 6.10 omskrives. Hertil benytter vi den ofte nyttige transformation

$$I' d\ell' = \mathbf{J}' dv', \quad (6.11)$$

som bringer os fra ledningstilfældet til det kontinuerte tilfælde. Vi kan begrunde transformationen ved at opdele den kontinuerte strømfordeling i strømlinierør (se fig. 6.4).



Figur 6.4: Opdeling af strømfelt i strømliinerør.

Felt fra strømfordeling

Den kontinuerte strømfordeling tænkes nu opdelt i lukkede strømliinerør, som helt opfylder lederens volumen. Linieintegralet i 6.10 erstattes da med volumenintegralet

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv', \quad (6.12)$$

et udtryk, der spiller samme centrale rolle i teorien for det magnetiske felt, som udtrykket 2.16 gør i teorien for det elektriske felt.

6.3 Kræfter mellem bevægede ladninger

Udtrykket 6.6 gælder den magnetiske vekselvirkning mellem to strømelementer. Den elektriske strøm består imidlertid af ladede partikler i bevægelse, og det er naturligt at se kraftvirkningen som resultatet af kræfter mellem de ladede partikler.

*Kraft mellem
bevægede
partikler*

For at opnå generelle udtryk antager vi, at hver ledning har sin type ladningsbærer med ladningerne q og q' . Ledningerne må have en vis tykkelse. Ladningsbærerne har da volumentætheder N og N' og drifthastigheder, som i middel er $\mathbf{v}$ og $\mathbf{v}'$. Efter 5.3 er strømtæthederne da $\mathbf{J} = Nq\mathbf{v}$ og $\mathbf{J}' = N'q'\mathbf{v}'$. Indsættes dette i 6.6 bliver udtrykket, efter substitutionerne $I d\ell = \mathbf{J} d\mathbf{v}$,

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} q N d\mathbf{v} \mathbf{v} \times \frac{q' N' d\mathbf{v}' \mathbf{v}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (6.13)$$

Men $N' d\mathbf{v}'$ er antallet af partikler i kildeelementet og $N d\mathbf{v}$ tilsvarende i måleelementet. Vi kan derfor fortolke 6.13 sådan, at hver partikel i elementet $d\mathbf{v}'$ påvirker en partikel i elementet $d\mathbf{v}$ med en magnetisk kraft

$$\boxed{\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} q \mathbf{v} \times \frac{q' \mathbf{v}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}}. \quad (6.14)$$

I lighed med opsplitningen af 6.8 kan vi opfatte

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q' \mathbf{v}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6.15)$$

som et magnetfelt i rummet, skabt af den bevægede ladning q' . Kraften på ladningen q med hastigheden $\mathbf{v}$ kan derfor skrives

$$\mathbf{F}_m = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (6.16)$$

Er der desuden et elektrisk felt $\mathbf{E}$ tilstede, bliver den samlede kraft på q :

$$\boxed{\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}. \quad (6.17)$$

Dette overordentlig vigtige udtryk kaldes *Lorentzkraften* efter H.A. Lorentz (1853-1928)□. På trods af sin fundamentale karakter er Lorentzkraften ikke blandt Maxwell ligningerne og kan heller ikke udledes deraf. Grunden er, at udtrykket 6.17 kan siges at *definere* felterne. Dette er meget klart, når vi tænker på, hvordan $\mathbf{E}$ -feltet med 2.13 blev defineret som kraft per ladning. Tilsvarende fortæller 6.16, omend på en lidt mere besværlig måde, hvordan $\mathbf{B}$ -feltet bestemmes af kraften per ladning og ladningens bevægelse.

Lorentzkraften

Efter 6.14 afhænger den magnetiske kraft mellem to bevægede partikler af begge partiklers hastighed. Går vi til et referencesystem, som følger den ene partikel, bliver den magnetiske kraft altså nul. Det forekommer dog urimeligt, at man f. eks. ved at anstille eksperimenter i et referencesystem, som følger ledningselektronernes langsomme drift, skulle finde drastisk anderledes resultater. Sådanne urimeligheder forsvinder, når man inddrager relativitetsteorien i beskrivelsen af de elektromagnetiske felter.

Kilde- og
målestrømme

Det er, som påpeget i afsnit 2.2, ofte af betydning at skelne mellem kilde-ladninger og måleladninger eller som her mellem kildestrømme og målestrømme. Når denne skelnen er gennemført i dette afsnit, er det af hensyn til senere anvendelser. I de betragtede tilfælde er det uden betydning, da de to strømme er ligestillede. Vi kan derfor med 6.8 også beregne kraften $d\mathbf{F}'$ på et element i kildekredsen fra et element i målekredsen. Ligeledes kan vi med 6.14 beregne kraften $\mathbf{F}'_m$ på en kildepartikel fra en målepartikel. Vi skal blot bytte om på mærkede og umærkede størrelser. Men medmindre lederelementerne eller partikelhastighederne netop er parallelle, er $\mathbf{F} \neq -\mathbf{F}'$. Loven om aktion og reaktion gælder således tilsyneladende *ikke* for den magnetiske kraft mellem strømme eller bevægede partikler.

Fysisk grund-
lov overtrådt?

Hertil skal først bemærkes, at vi ikke møder dette problem for lukkede strømkredse. Den kraft, hvormed kildekredsen påvirker hele målekredsen, kan beregnes ved at integrere 6.6 over de lukkede kredse C og C' , hvilket giver

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} II' \oint_C \oint_{C'} \frac{d\ell \times [d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (6.18)$$

Dette udtryk kan vises at være antisymmetrisk over for en ombytning af mærkede og umærkede størrelser (se opgave 6.15).

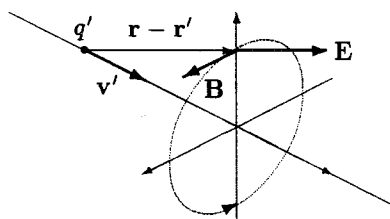
For strømelementer eller partikler i bevægelse er problemet lidt anderledes. Vi skal i kapitel 15 om relativitetsteorien se, at magnetfeltet som udtrykt ved 6.15 er en konsekvens af Coulombs lov og af relativitetsprincippet. Det er altså unødvendigt, som det her er gjort, at benytte nye antagelser eller observationer for at indføre magnetfeltet. Ligning 6.15 er således (næsten) relativistisk korrekt.

Alligevel mangler der åbenbart noget. Loven om aktion og reaktion medfører bevarelse af impuls, impulsmoment og energi for et isoleret partikelsystem. Sådanne lovmæssigheder opgiver man selvsagt ikke uden nøje overvejelse. Det viser sig da også, at der ved bevægelsen af de ladede partikler overføres impuls, impulsmoment og energi *til det elektromagnetiske felt*, som sikrer gyldigheden af bevarelseslovene.

Bevarelseslove
bevaret

▷ Magnetfeltet om en ladning i bevægelse: Efter udtrykket 6.15 er $\mathbf{B}$ -feltet om en bevæget ladning altid vinkelret på ladningens hastighed $\mathbf{v}'$ og på vektoren $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Feltlinierne er cirkler omkring retningen af $\mathbf{v}'$, som vist på fig. 6.5. Med relationen 6.5 kan $\mathbf{B}$ -feltet skrives

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q' \mathbf{v}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (6.19)$$



Figur 6.5: Det elektriske og magnetiske felt omkring en ladning i urelativistisk bevægelse.

Her indgår udtrykket 2.14 for feltstyrken $\mathbf{E}$ af en punktladning som faktor sådan, at

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r})}{c^2}, \quad (6.20)$$

som understreger den nære forbindelse, der er mellem det elektriske og det magnetiske felt fra en ladning i bevægelse. $\triangleleft$

$\triangleright$ Elektriske og magnetiske kræfter sammenlignet: Det er interessant at sammenligne størrelsen af de elektriske og de magnetiske kræfter, der virker mellem to ladninger, som begge bevæger sig. Den elektriske del af Lorentzkraften er $F_e = qE$, mens den magnetiske del efter 6.20 bliver af størrelsesordenen $F_m \approx qvv'E/c^2$. Har de to partikler tilnærmelsesvis samme hastighed v gælder altså

$$\frac{F_m}{F_e} \approx \frac{v^2}{c^2}. \quad (6.21)$$

For de hastigheder, som f.eks. ledningselektroner har, er dette forhold særdeles lille, af størrelsesordenen 10^{-22} . Det betyder dog ikke, at de magnetiske kræfter altid forsvinder i sammenligning med de elektriske. I en leder er situationen jo den, at positive og negative ladninger praktisk talt fuldstændigt neutraliserer hinanden. Det elektriske felt uden for lederen kommer derfor kun fra nogle få ladninger. Det magnetiske felt derimod skyldes alle ladningsbærerne, hvis antal eksempelvis er af størrelsesordenen 10^{23} . Under disse forhold er det de magnetiske kræfter, som træder frem. $\triangleleft$

*Mængden
gør det*

6.4 Kraft og moment på strømkreds

Med Lorentzkraften 6.17 kan vi beregne den magnetiske kraft $d\mathbf{F}$ på et element $d\ell$ af en leder, som bærer strømmen I og befinder sig i et ydre magnetfelt $\mathbf{B}$. Strømmens retning er lederelementets retning, og $d\ell$ er derfor parallel med hastigheden $\mathbf{v}$ af ladningsbærerne i lederen. Er der N ladningsbærere per volumen af lederen, bliver kraften på elementet $d\ell$:

$$d\mathbf{F} = N A d\ell q \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (6.22)$$

hvor A er tværsnitsarealet af lederen og q ladningen af hver bærer. Er der flere typer bærere, må 6.22 erstattes af en sum over disse. Da $\mathbf{v}$ og $d\ell$ er parallelle, kan vi bytte om på vektorkarakteren og skrive

$$d\mathbf{F} = N A q v d\ell \times \mathbf{B}. \quad (6.23)$$

Men $N A q |\mathbf{v}|$ er netop strømmen I for en enkelt type ladningsbærer. Derfor kan vi skrive 6.23 som

$$\boxed{d\mathbf{F} = I d\ell \times \mathbf{B}}, \quad (6.24)$$

som i sig selv er et overordentlig nyttigt udtryk til beregning af kraften på et lederstykke. Udtrykket kan også integreres og derved give kraften på et udstrakt kredsløb. Hvis kredsløbet danner en lukket kurve C , finder vi

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\ell \times \mathbf{B} = I \oint_C d\ell \times \mathbf{B}. \quad (6.25)$$

Situationen

*Kraft på leder-
stykke*

Ingen kraft i
homogent felt

Er der flere vindinger n langs kurven (en tynd spole), skal der multipliceres med n for at finde kraften. Er $\mathbf{B}$ specielt et homogent felt, kan det sættes uden for integralet og kraften skrives

$$\mathbf{F} = I \left\{ \oint_C d\boldsymbol{\ell} \right\} \times \mathbf{B}. \quad (6.26)$$

Integralet $\oint d\boldsymbol{\ell}$ går langs en lukket kurve og er derfor nul. Der er altså ikke nogen kraft på en lukket, strømførende kreds i et homogent magnetfelt:

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} = I \oint_C d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} = 0, \quad (\mathbf{B} \text{ homogen}). \quad (6.27)$$

Kraftmoment
beregnes

Vi skal nu beregne kraftmomentet τ på en lukket strømkreds i et ydre felt. Fra det infinitesimale kraftbidrag 6.24 finder vi bidraget til momentet

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I \mathbf{r} \times (d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}), \quad (6.28)$$

hvoraf man finder momentet på den fuldstændige kreds

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}). \quad (6.29)$$

Hvis $\mathbf{B}$ igen er homogen, kan vi omskrive dette udtryk for τ på en nyttig og interessant måde. Kurveelementet $d\boldsymbol{\ell}$ kan lige så godt skrives $d\mathbf{r}$. Fra 6.29 og A.7 får vi da

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = I \oint_C d\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - I \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}). \quad (6.30)$$

Højere diffe-
rentiations
kunst

Her forsvinder det sidste integral. Feltet $\mathbf{B}$ er jo konstant og kan sættes uden for integraltegnet. Integranden bliver da $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}d(\mathbf{r}^2)$, der er et totalt differential, som integrerer til nul langs en lukket kurve.

For at beregne det andet integral ser vi på differentialerne

$$d[\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})] = d\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{r}(d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \quad (6.31)$$

$$(\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \times \mathbf{B} = d\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{r}(d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}). \quad (6.32)$$

Lægges disse to udtryk sammen, får vi

$$d\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \{ (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \times \mathbf{B} + d[\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})] \}. \quad (6.33)$$

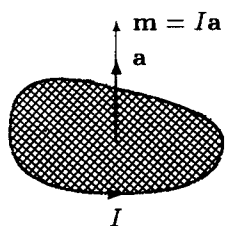
Indføres dette i 6.30, finder vi endelig

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C d\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = I \left(\frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \right) \times \mathbf{B}, \quad (6.34)$$

da det sidste led i (6.33) igen er et totalt differential, som integrerer til nul.

Hvis den lukkede kreds, vi ser på, er *plan*, er integralet i 6.34 simpelthen vektorarealet $\mathbf{a}$, som er indesluttet af kredsen:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r}. \quad (6.35)$$



Figur 6.6: Det magnetiske moment af en flad strøm kredse er strømmen I i kredsen multipliceret med dens vektorareal $\mathbf{a}$.

Kraftmomentet på kredsen kan da skrives

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = I \mathbf{a} \times \mathbf{B}.} \quad (6.36)$$

Vektoren $I \mathbf{a}$ optræder meget hyppigt i teorien for magnetisme og kaldes kredsens *magnetiske moment*, som her skal betegnes $\mathbf{m}$. Der gælder altså

$$\boxed{\mathbf{m} = I \mathbf{a},} \quad (6.37)$$

med $\mathbf{a}$ defineret ved 6.35. For en plan kreds er det magnetiske moment således strømmen i kredsen multipliceret med kredsens vektorareal.

Den definition af $\mathbf{a}$, som er givet ved 6.35, er imidlertid helt generel og altså ikke begrænset til plane kredse. Helt generelt definerer man derfor det *magnetiske dipolmoment* af en strøm kredse som

$$\boxed{\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\ell}.} \quad (6.38)$$

I et ydre felt virker der på en magnetisk dipol et kraftmoment

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.} \quad (6.39)$$

Findes kredsstrømmen udbredt i et medium i stedet for i en snæver ledning, kan vi anvende transformationen $I d\boldsymbol{\ell} \rightarrow \mathbf{J} dv$ (6.11), hvorefter det magnetiske moment bliver udtrykt ved et volumenintegral

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \oint_V \mathbf{r} \times \mathbf{J} dv. \quad (6.40)$$

Den potentielle energi U af en magnetisk dipol i et homogent ydre felt afhænger af dens stilling i feltet. Drejes momentet en vinkel θ om en akse vinkelret på feltet har vi efter 6.39, at $dU/d\theta = \tau = mB \sin \theta$. Integration giver $U = -mB \cos \theta$, når $U = 0$ for $\theta = \pi/2$. På vektorform kan vi skrive udtrykket for den potentielle energi

$$\boxed{U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}.} \quad (6.41)$$

Dette udtryk svarer til 2.82 og er nyttigt blandt andet ved behandling af stoffernes magnetiske egenskaber.

▷ Galvanometerspole: Som eksempel kan vi se på en flad, rektangulær spole, der kan dreje om en akse gennem spolens midtpunkt og vinkelret på en side. Spolen er anbragt i et homogent magnetfelt $\mathbf{B}$ vinkelret på omdrejningsaksen, se fig. 6.7. Spoler af denne type anvendes i forskellige

Magnetisk moment = strøm × areal

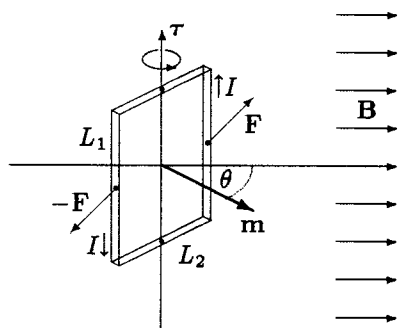
Magnetisk moment defineret

Kraftmoment

Moment af fordelt strøm

Potentiell energi

Drejespole



Figur 6.7: En flad spole anbragt i et homogent magnetfelt sådan, at den kan dreje sig om en akse vinkelret på feltet.

elektriske viserinstrumenter. Spolen har n vindinger og dimensionen $L_1 \times L_2$. Er strømmen i ledningen I , bliver det magnetiske moment efter 6.37 $m = nIL_1L_2$, rettet efter spoleplanens normal n . Er spolen drejet vinklen θ , bliver kraftmomentet om spoleaksen efter 6.39 $\tau = nIL_1L_2B \sin \theta$, som i et måleinstrument balanceres med en torsionsfjeder.

I dette tilfælde kan kraftmomentet også beregnes direkte. På de n ledere parallelle med L_1 virker efter 6.24 kræfterne $\pm nBIL_1$. På siderne L_2 virker der kræfter, som ikke har noget moment om aksen. I den drejede stilling er kræfternes arm $\frac{1}{2}L_2 \sin \theta$. Kraftmomentet om aksen bliver da

$$\tau = 2nBIL_1 \frac{1}{2}L_2 \sin \theta = nIL_1L_2B \sin \theta$$

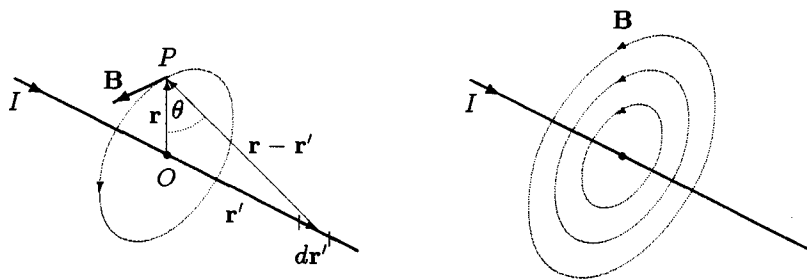
i overensstemmelse med resultatet beregnet fra det magnetiske moment. <

6.5 Magnetfelter beregnet med Biot-Savarts lov

Generel metode med få løsninger

Med Biot og Savarts lov 6.10 eller 6.12 kan man i princippet beregne magnetfeltet fra en vilkårlig strømfordeling. Det minder om situationen for elektriske felter fra kendte ladningsfordelinger, som kan beregnes med udtrykket 2.16. I begge tilfælde vil det dog oftest vise sig vanskeligt eller umuligt at gennemføre de nødvendige integrationer analytisk. Det skal også tages i betragtning, at ligesom elektriske felter i elementære tilfælde med fordel kan bestemmes ved hjælp af Gauss' lov, så har man for magnetfelter i den såkaldte *Ampères lov* (se afsnit 6.8) et lignende simpelt værktøj.

I dette afsnit skal vi se på nogle af de få eksempler, hvor en analytisk beregning med Biot-Savarts lov er mulig. Disse eksempler er både instruktive og dækker tilfælde, som ofte mødes i praksis.



Figur 6.8: Magnetfeltet om lang, lige ledning.

▷ Lang, lige ledning: Fig. 6.8 viser en 'uendelig' lang retlinet leder, som bærer strømmen I . Vi ønsker at beregne $\mathbf{B}$ -feltet i et punkt P i afstanden r fra ledningen.

Lige leder

Efter 6.10 er feltet vinkelret på både $\mathbf{r}$ og på lederelementet $d\ell'$, som her altid har samme retning. Da der er rotationssymmetri om ledningen, vil $B = |\mathbf{B}|$ kun afhænge af $r = |\mathbf{r}|$, med $\mathbf{B}$ -vektorerne liggende på tangenter til cirkler med centrum på ledningen, se fig. 6.8. Feltlinierne er således koncentriske cirkler omkring ledningen. Deres omløbsretning bestemmes ved en sædvanlig højrehåndsregel.

Feltlinier er cirkler om lederen

Vi benytter de på figuren viste betegnelser og lægger origo i projektionen af P på ledningen. Der gælder da $r' = r \tan \theta$, $d\ell' \equiv dr' = r d\theta / \cos^2 \theta$ og $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r / \cos \theta$. Vinklen mellem $d\mathbf{r}'$ og $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ bliver $\theta + \pi/2$. Størrelsen $B(r)$ kan da beregnes af 6.10 med θ som integrationsvariabel:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{(r/\cos \theta)^2} \cos \theta \frac{r d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta.$$

Integralet har værdien 2, så vi finder

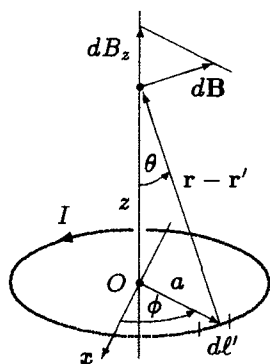
Vigtigt!

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (6.42)$$

for magnetfeltet omkring en lang, lige leder. ◁

▷ Cirkulær leder: Som et andet eksempel skal vi beregne feltet på akse af en cirkulær leder med radius a og strøm I , se fig. 6.9. Bidraget fra

Cirkulær leder



Figur 6.9: Magnetfeltet på akse af en cirkulær leder kan beregnes med Biot-Savarts lov.

lederelementet $d\ell'$ til $\mathbf{B}$ på akse har både en aksial og en radial komponent. På grund af aksialsymmetrien integrerer de radiale komponenter dog til 0 sådan, at $\mathbf{B}$ -feltet på akse ligger i dennes retning. Med figurens betegnelser bliver $d\ell' = a d\varphi$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (z^2 + a^2)^{1/2}$ og projektfaktoren for $\mathbf{B}$ på akse $\sin \theta = a/(z^2 + a^2)^{1/2}$. Integrationen går over φ , med z konstant:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{z^2 + a^2} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{1/2}} a d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} 2\pi,$$

altså

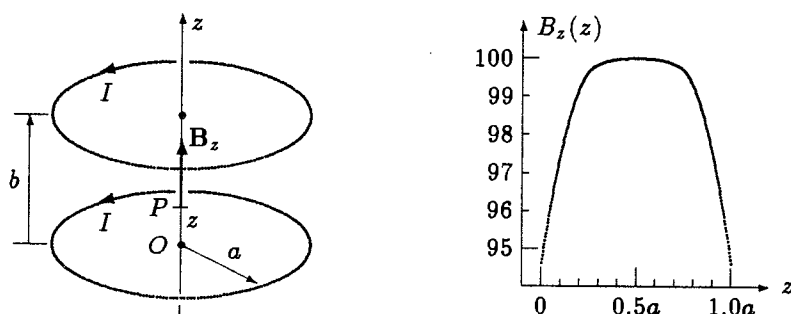
Vigtigt!

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}, \quad (6.43)$$

for magnetfeltet på akse af en cirkulær leder. Vi bemærker specielt, at feltet i lederens centrum bliver $B_z(0) = \mu_0 I / 2a$. ◁

To ens spoler

▷ Helmholtz spoler: Med 6.43 kan vi beregne det aksiale felt af enhver konfiguration af coaxiale, cirkulære strømme. Som eksempel skal vi se på et arrangement med to spoler, som kaldes *Helmholtz-spoler* (fig. 6.10).



Figur 6.10: To coaxiale spoler med samme radius a og strøm I . Hvis spoleafstanden er lig spoleradius, bliver feltet midt mellem spolerne særlig homogent.

Vi lægger origo i centrum af den ene spole og beregner efter 6.43 feltet i et vilkårligt punkt P på aksen:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I N a^2}{2} \left[\frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{((z - b)^2 + a^2)^{3/2}} \right], \quad (6.44)$$

idet vi har antaget, at der er N vindinger på hver spole.

Feltet i
midtpunktet

Vi ser nu på feltet i nærheden af midtpunktet $z = b/2$ mellem spolerne. På grund af symmetrien er $B_z(z)$ en lige funktion omkring midtpunktet. Alle ulige afledede af B_z er derfor nul i dette punkt. Ved differentiation af 6.44 viser man let, at også B_z'' er nul i midtpunktet, dersom spoleafstanden vælges lig spoleradius, altså $b = a$. Under disse betingelser bliver feltet i midtpunktet efter 6.44

$$B_z(a/2) = \frac{\mu_0 I N}{a} \frac{8}{5^{3/2}} = 0.716 \frac{\mu_0 I N}{a}. \quad (6.45)$$

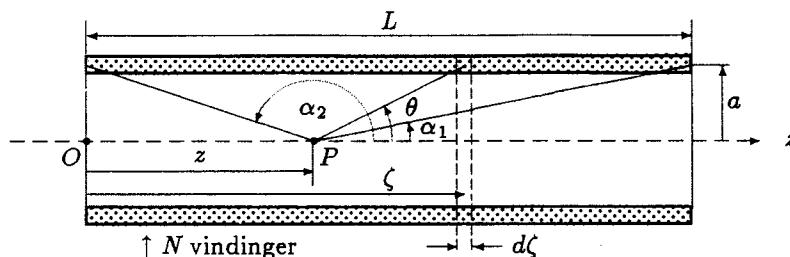
Da de tre første afledede forsvinder, viser en Taylorudvikling af feltet omkring midtpunktet, at dette afviger fra værdien efter 6.45 med et led proportionalt med $(z - a/2)^4/a^4$. Feltet bliver derfor særdeles homogent i et område omkring midtpunktet. Se kurven på fig. 6.10. ◁

Lang spole

▷ Solenoide: En solenoide er en langstrakt spole med N vindinger viklet jævnt på en cylindrisk form, se fig. 6.11. Med god tilnærmelse kan vi betragte solenoiden som opdelt i cirkulære kredse. Feltbidraget på aksen for hver kreds kan igen beregnes efter 6.43. Vi vælger nulpunktet for z -aksen i spolens ene endepunkt. Positionen af en delspole angives ved dens z -koordinat, som vi vil betegne med ζ . Derved friholdes koordinaten z til at angive positionen af målepunktet P .

Hver delspole har bredden $d\zeta$. Har solenoiden ialt N vindinger og længden L , bidrager delspolen med $(N/L)d\zeta$ vindinger. Efter fig. 6.11 og 6.43 bliver feltet i P :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 N I}{2L} \int_0^L \frac{a^2 d\zeta}{((\zeta - z)^2 + a^2)^{3/2}}.$$



Figur 6.11: Det aksiale magnetfelt i en solenoide kan beregnes ved at opdele solenoiden i et antal smalle cirkulære kredse.

Efter figuren gælder nu $(\zeta - z) = a \cot \theta$, hvoraf $d\zeta = -a d\theta / \sin^2 \theta$. Endvidere er $((\zeta - z)^2 + a^2)^{1/2} = a / \sin \theta$. Med disse substitutioner bliver integralet

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I N}{2L} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{a^2 (-a d\theta)}{(a / \sin \theta)^3 \sin^2 \theta} = \frac{\mu_0 I N}{2L} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \theta d\theta.$$

Integrationsgrænserne α_1 og α_2 er som vist de vinkler, hvorunder spoleendernes radier ses fra målepunktet. Aksefeltet i solenoiden kan derfor skrives

En nyttig formel

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I N}{2L} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (6.46)$$

Ved benyttelsen af 6.46 er det vigtigt at holde samme omløbsretning for de to vinkler α_1 og α_2 . I midten af en meget lang solenoide bliver feltet $\mu_0 NI/L$ og i enderne $\mu_0 NI/2L$, altså det halve. Uden for spolen har de to cos-led samme fortegn og vil kansellere i store afstande. Ønskes feltet udtrykt explicit ved z , kan man eliminere α -vinklerne, idet

$$\cos \alpha_2 = \frac{-z}{\sqrt{z^2 + a^2}}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{L - z}{\sqrt{(L - z)^2 + a^2}}.$$

Afsnit 6.8 giver en anden behandling af det i praksis vigtige solenoidefelt. <

6.6 Gauss' lov for det magnetiske felt

Gauss' lov spillede en central rolle ved behandlingen af elektriske felter. Vi skal nu vise, at der også for magnetfelter gælder en Gauss lov. Der er dog en væsentlig fysisk forskel på de to typer felter. Kilderne til det elektrostatiske felt er ladningsfordelinger. Derfor optræder ladningstætheden ρ i den 1. Maxwell ligning på formen 2.50. Kilderne til magnetfelter, derimod, er strømfordelinger sådan, at felterne *altid* kan udtrykkes ved 6.12, altså ved

En anden Gauss' lov

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv', \quad (6.47)$$

med et passende $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$. Dette er Ampères intuitive antagelse, hvis holdbarhed understøttes af, at man aldrig har iagttaget noget, som kunne fortolkes som magnetisk ladning og af, at de mest forskelligartede magnetiske fænomener har ladet sig forklare ved 6.47.

Ingen magnetisk ladning

Bevis for, at
divergensen
er nul

Fraværet af magnetisk ladning og magnetisk ladningstæthed finder sit matematiske udtryk i, at det magnetiske felt, defineret ved 6.47, har divergensen 0. Dette skal vi nu bevise. Hertil beregner vi $\nabla \cdot \mathbf{B}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv', \quad (6.48)$$

hvor differentiationen er flyttet under integraltegnet, da den vedrører de umærkede størrelser, mens integrationen går over de mærkede. Dette udtryk omskrives nu ved hjælp af differentiationsreglen tabel A.2:8, som for to vilkårlige vektorer, $\mathbf{F}$ og $\mathbf{G}$, siger

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}.$$

Benyttes dette på 6.48, idet det noteres, at $\mathbf{J}$ kun afhænger af de mærkede koordinater og derfor har rotationen nul, finder man

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'. \quad (6.49)$$

Men her er, som vi allerede gentagne gange har benyttet (se f.eks. 2.28),

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.50)$$

I 6.49 optræder altså operatoren $\nabla \times \nabla$, som er identisk 0 sådan, at hele højre side bliver 0. Vi har dermed vist den meget fundamentale ligning

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0.} \quad (6.51)$$

2. Maxwell
ligning

Ligning 6.51 er den 2. Maxwell ligning på differentiell form. Den kaldes også *Gauss' lov* for det magnetiske felt og kan ved hjælp af Gauss' sætning A.23 skrives på integral form:

$$\boxed{\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0,} \quad (6.52)$$

hvor S er en vilkårlig lukket flade i rummet.

Størrelsen

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}, \quad (6.53)$$

Magnetisk flux

kaldes den *magnetiske flux* gennem fladen S . Er fladen lukket, er fluxen gennem den 0, som det fremgår af 6.52. Magnetisk flux måles i weber [Φ] = Wb = Vs = Tm² og er analog til elektrisk flux, som blev indført i kapitel 3 (se 3.24). Magnetisk flux har dog langt større betydning, da den, som vi skal se, er nært knyttet til induktionsfænomenerne. I lighed med overvejelserne omkring den elektriske flux, kan man tegne magnetiske fluxlinier og fluxlinierør, se fig. 3.9. Da der ikke findes magnetiske ladninger, er den magnetiske flux ind i røret altid lig den magnetiske flux ud af røret. De magnetiske $\mathbf{B}$ -linier må danne lukkede kurver eller forløbe i det uendelige.

6.7 Det magnetiske vektorpotential

Ved behandlingen af elektrostatiske felter havde vi megen nytte af det elektriske skalarpotential. Dette potential kunne indføres, fordi det elektriske felt er rotationsfrit og dermed et gradientfelt. Rotationen af det *magnetiske* felt er i almindelighed forskellig fra nul, og dette felt kan derfor ikke skrives som gradienten af et skalarfelt. Det magnetiske felt har imidlertid, som vi har set, altid divergensen nul. Matematikken fortæller, at magnetfeltet $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ da kan udtrykkes som *rotationen af et andet vektorfelt*, som kaldes det *magnetiske vektorpotential* og betegnes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, altså

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (6.54)$$

Opgaven er nu at *finde* et vektorfelt $\mathbf{A}$ sådan, at relationen 6.54 er opfyldt. Hertil omskriver vi med 6.50 integranden i 6.47 til

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.55)$$

Dette udtryk kan nu omformes ved hjælp af vektoridentiteten tabel A.2:9, som for ethvert skalarfelt φ og vektorfelt $\mathbf{F}$ kan skrives

$$-\mathbf{F} \times \nabla \varphi = \nabla \times (\varphi \mathbf{F}) - \varphi \nabla \times \mathbf{F}.$$

Med $\mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{r}')$ og $\varphi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ og da $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ ikke afhænger af $\mathbf{r}$ følger heraf

$$-\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.56)$$

Hele udtrykket 6.47 for $\mathbf{B}$ kan da skrives

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (6.57)$$

altså

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (6.58)$$

Her har vi igen flyttet operatoren $\nabla \times$ uden for integralet, da den virker på $\mathbf{r}$ -koordinaten, som ikke påvirkes af integrationen. Integralet går over volumet V' , som omslutter alle strømme.

Ligning (6.58) viser, at det er lykkedes at udtrykke feltet $\mathbf{B}$ som rotationen af et andet vektorfelt $\mathbf{A}$, altså

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}, \quad (6.59)$$

hvor

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'}. \quad (6.60)$$

Feltet $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ kaldes som nævnt *vektorpotentialet*. Det er en tredimensional slægtning til vor gamle kending skalarpotentialet.

En anden type potential

Vektorpotential findes

A udtrykt ved kilderne

Vektorpotential
ikke entydigt

Det skalarpotential som findes af 2.32, er ikke det eneste mulige, idet der altid kan adderes et arbitrært konstant potential. På samme måde er vektorpotentialet $\mathbf{A}$ givet ved 6.60 ikke det eneste mulige. Da rotationen af ethvert gradientfelt er nul, kan vi jo til et muligt vektorpotential altid lægge gradienten $\nabla\xi$ af en arbitrær skalar funktion $\xi(\mathbf{r})$. Derved er $\mathbf{B}$, som bestemmes ved 6.59, upåvirket. Denne frihed tillader os at lægge endnu en betingelse på $\mathbf{A}$. For *stationære* felter vælger man hyppigt betingelsen

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0}, \quad (6.61)$$

En ekstra
betingelse

som kaldes *Coulombbetingelsen*. At denne altid kan opfyldes indses sådan: Lad $\mathbf{A}'$ være et muligt vektorpotential. Hertil adderer vi gradienten af en skalar funktion ξ for at få et nyt $\mathbf{A}$, altså

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\xi. \quad (6.62)$$

Vi forlanger nu $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \nabla \cdot \nabla\xi = 0, \quad (6.63)$$

som fører til

$$\nabla^2\xi = -\nabla \cdot \mathbf{A}'. \quad (6.64)$$

Løsning af denne differentialligning for ξ med $-\nabla \cdot \mathbf{A}'$ som kildeled, (sml. Poissons ligning), gør det muligt at udvælge et vektorpotential med $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Dette kaldes at vælge en 'gauge'.

Betingelse
er opfyldt

For en *begrænset* strømfordeling er Coulombbetingelsen allerede opfyldt for det specielle vektorpotential 6.60. For at vise dette beregner vi divergensen af $\mathbf{A}$ med benyttelse af, at ∇ ikke virker på de mærkede koordinater og med anvendelse af tabel A.2:7

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (6.65)$$

Men efter tabel A.2:7 (igen) gælder for integranden

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (6.66)$$

idet $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$ ifølge kontinuitetsligningen for et stationært felt. Vi kan derfor skrive 6.65 som

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' = 0, \quad (6.67)$$

q.e.d.

hvor der er transformeret til et overfladeintegral over den lukkede flade S' , som helt indeholder den begrænsede strømfordeling. Dette integral er 0, da der ikke er nogen normalkomponent af $\mathbf{J}$ noget sted på fladen.

6.8 Ampères lov

Eksistensen af vektorpotentialer fører til en vigtig differentiaalligning for det magnetiske felt, nemlig den 4. Maxwell ligning, som vi nu skal udlede. Vi benytter, at vektorpotentialer for en given strømfordeling er bestemt ved 6.60

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv',$$

som er analog til ligning 2.32 for skalarpotentialer af en ladningsfordeling

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'.$$

I det elektrostatiske tilfælde er dette en løsning til Poisson's ligning 2.101:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

I analogi hermed slutter vi da, at komponenterne af $\mathbf{A}$ må opfylde de (tre) ligninger

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (6.68)$$

Vi vender nu tilbage til den definerende ligning 6.59, hvor vi tager rotationen på begge sider:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A}, \quad (6.69)$$

hvor vi har brugt tabel A.2:4 og Coulombbetingelsen $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Sammenholdt med 6.68 følger heraf

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.} \quad (6.70)$$

Ligning 6.70 er den Maxwell ligning, vi søger. I den her anvendte nummerering nummer 4. Den forbinder feltet $\mathbf{B}$ med dets kilde, nemlig strømtætheden $\mathbf{J}$. Ligningen kaldes også *Ampère's lov*, og den er her givet i sin differentielle form. Det skal noteres, at 6.70 endnu ikke er helt færdig. Som skrevet er den kun gyldig for *stationære* strømfordelinger. For tidsafhængige strømme må den modificeres, ligesom tilstedeværelsen af magnetiske materialer giver en ændring af loven.

Ampères lov på formen 6.70 er en *lokal* lov. Den forbinder $\nabla \times \mathbf{B}$ i et bestemt punkt af rummet til strømtætheden i dette punkt. Loven kan imidlertid omskrives på en integral form, som ofte er særdeles nyttig ved beregning af magnetiske felter. Hertil anvender vi Stokes's sætning A.27 på $\nabla \times \mathbf{B}$, hvilket er ren matematik:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad (6.71)$$

hvor S er et fladestykke med den lukkede rand C . Men $\nabla \times \mathbf{B}$ er ved Ampères lov 6.70 fysisk knyttet til strømtætheden sådan, at

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 I. \quad (6.72)$$

*Maxwell
ligning søges*

*4. Maxwell
ligning =*

Ampères lov

Af 6.71 og 6.72 følger da

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\ell} = \mu_0 I, \quad (6.73)$$

hvor I er den totale strøm gennem enhver flade, der har C som rand. Ligning 6.73 er den *integrale* form af Ampères lov.

H-vektor
i utide

Ved behandlingen af magnetiske materialer skal vi siden indføre endnu en feltvektor, den *magnetiske feltstyrke*, som betegnes med $\mathbf{H}$. Definitionen af $\mathbf{H}$ behøver vi ikke at kere os om her, men det kan være bekvemt at notere, at i *vacuum* er $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Indføres dette i 6.70 bliver den differentielle form af Ampères lov

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (6.74)$$

mens den integrale form bliver

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{\ell} = I. \quad (6.75)$$

Ampères lov
i ord

Disse ligninger er derved i overensstemmelse med deres endelige udseende, selv om indførelsen af $\mathbf{H}$ kun gælder for vacuum. Udtrykt i ord siger Ampères lov 6.75 på integral form, at *cirkulationen af den magnetiske feltstyrke langs en lukket kurve er lig den samlede elektriske strøm gennem enhver flade, der har kurven som rand.*

Lige leder igen

▷ Lang, lige ledning: Ampères lov er lige så nyttig ved beregning af magnetiske felter med passende symmetri, som Gauss' lov er ved beregning af elektriske felter. Vi kan illustrere dette ved et meget simpelt problem, som vi tidligere har løst med Biot-Savarts lov, nemlig feltet om en lang, lige leder. Feltet må være vinkelret på enhver plan, som indeholder lederen (se fig. 6.8) og afhænger på grund af symmetrien udelukkende af afstanden r fra ledningen. Som omtalt i et tidligere eksempel, er feltet da tangentialt til enhver koncentrisk cirkel omkring ledningen. Vi integrerer 6.75 langs en sådan cirkel med radius r og finder

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{\ell} = 2\pi r H(r) = I, \quad (6.76)$$

hvor I er strømmen i lederen. Felterne om en lige leder er altså

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad \text{eller} \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (6.77)$$

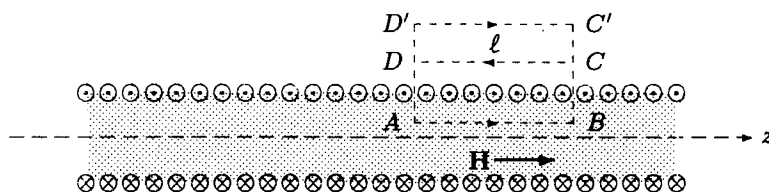
i overensstemmelse med det tidligere resultat 6.42. ◁

Kunne det
gøres enklere?

▷ Elementær udledning af Ampères lov: Vi har her udledt 6.75 med fuld vektormusik. Dette var selvsagt ikke Ampères metode, som dog ikke skal beskrives her. Vi kan imidlertid let se, at det foregående eksempel kan regnes baglæns sådan, at man starter med 6.77, som følger af Biot-Savarts lov, og ender med 6.76. Dette resultat kan generaliseres på forskellig måde, men ikke med almen gyldighed, som ved den vektoranalytiske metode. ◁

▷ Lang solenoide: Vi har tidligere beregnet feltet langs akse i en solenoide ved hjælp af Biot-Savarts lov. Er solenoiden lang i forhold til sin tværdimension, kan feltet også beregnes ved hjælp af Ampères lov.

Et standard eksempel



Figur 6.12: Magnetfeltet i en lang solenoide kan beregnes med Ampères lov.

Vi betragter (fig. 6.12) et stykke af en (uendelig) lang solenoide med n tætliggende vindinger per længde og strømmen I . Af symmetri Grunde må feltet overalt gå i z -retningen. Vi lægger en Ampèrevej $ABCD$ som vist og beregner efter 6.75 cirkulationen langs denne. De lodrette stykker bidrager ikke. Uden for spolen må feltet være 0, sådan at heller ikke CD bidrager. Var der nemlig et felt langs CD , måtte samme felt findes langs ethvert stykke af typen $C'D'$, for at give cirkulationen 0 langs enhver vej $CDD'C'$. Hele rummet ville da fyldes med felt fra en nok så slank spole, hvilket forekommer urimeligt. Tilbage bliver kun bidraget fra feltet H på stykket AB med længden ℓ . Det antal "ampere-vindinger", som krydser fladen $ABCD$ er $n\ell I$, hvorpå Ampères lov giver $H\ell = n\ell I$, altså

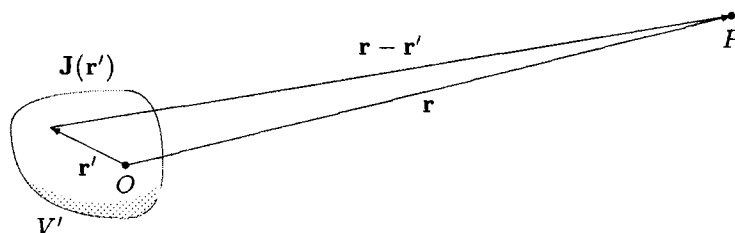
$$H = nI, \quad B = \frac{\mu_0 N I}{L}, \quad (6.78)$$

for feltet overalt i en lang solenoide med længde L og samlet vindingstal $N = nL$. Dette stemmer med det fra 6.46 bestemte felt på akse. ◁

6.9 Magnetiske multipolfelter

Det er ofte fordelagtigt at anvende en multipoludvikling af det magnetiske felt i store afstande fra en begrænset strømfordeling (fig. 6.12). Metoden er meget nær den samme, som i afsnit 2.8 blev anvendt for en begrænset ladningsfordeling.

Vi lægger nulpunktet O inden for strømfordelingen med volumenet V' sådan, at r' er lille i forhold til r . Ved beregning af feltet viser det sig



Figur 6.13: Magnetfeltet langt fra en begrænset strømfordeling kan approximeres med en multipoludvikling.

fordelagtigt først at udvikle vektorpotentialet 6.60:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (6.79)$$

For at forenkle regningerne skal vi antage, at strømfordelingen er et lukket kredsløb, med samme strøm I gennem hvert tværsnit (eksempelvis en opkrøllet ledning). I 6.79 kan vi da udføre substitutionen (jvf. 6.11):

$$\mathbf{J} dv' \rightarrow I d\mathbf{r}'. \quad (6.80)$$

*Vektorpotential
rækkeudvikles*

For et kredsløb, hvis dimensioner er små i forhold til $\mathbf{r}$, kan vi da udvikle nævneren i integranden på samme måde som i 2.66

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right], \quad (6.81)$$

hvor vi har begrænset os til første orden i r'/r , altså til og med *dipolfeltet*. Indsættes dette i vektorpotentialet 6.79 finder vi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[\frac{1}{r} \oint d\mathbf{r}' + \frac{1}{r^3} \oint d\mathbf{r}' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) + \dots \right]. \quad (6.82)$$

*Ingen magne-
tisk monopol*

Det første integral forsvinder, fordi kredsen er lukket. Integranden i det andet integral kender vi igen i udviklingen

$$(\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{r} = d\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}'), \quad (6.83)$$

og i følgende differential efter $\mathbf{r}'$:

$$d'[\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')] = d\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}'). \quad (6.84)$$

Disse to ligninger kan adderes med resultatet

$$d\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') = \frac{1}{2}(\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{r} + \frac{1}{2}d'[\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')]. \quad (6.85)$$

Når vi indfører dette i 6.82 bidrager det sidste (totale) differential ikke, og udviklingen af vektorpotentialet bliver da

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{I}{2} \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' \right] \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (6.86)$$

*Magnetisk
dipolmoment*

Ved sammenligning med 6.38 ser vi, at udtrykket i den kantede parentes netop er det magnetiske moment (mere præcist: *dipolmomentet*) $\mathbf{m}$ af kredsen. Vi kan derfor skrive vektorpotentialet for et magnetisk dipolfelt som

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}}. \quad (6.87)$$

Det skal understreges, at dette udtryk kun er gyldigt, når nulpunktet ligger i eller nær kredsen, sml. fig. 6.13.

B-feltet findes

Det næste skridt bliver nu, at beregne den magnetiske fluxtæthed $\mathbf{B}$, hvilket efter 6.59 indebærer, at vi beregner $\nabla \times \mathbf{A}$. Her bemærker vi først,

at $\mathbf{r}/r^3 = -\nabla(1/r)$ og at $\mathbf{m}$ er en konstant vektor. Med vektoridentiteten tabel A.2:9 kan vi da omskrive vektorpotentiallet:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{\mathbf{m}}{r}, \quad (6.88)$$

som derpå giver

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \frac{\mathbf{m}}{r}. \quad (6.89)$$

Her optræder operatoren $\nabla \times \nabla \times$, som kan udvikles efter tabel A.2:4 med resultatet

$$\nabla \times \nabla \times \frac{\mathbf{m}}{r} = -\nabla^2 \frac{\mathbf{m}}{r} + \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{m}}{r} \right). \quad (6.90)$$

Da $\mathbf{m}$ er en konstant vektor og da ∇^2 kun virker på $1/r$ og giver nul (jvf. potentiallet for en punktladning) for $r \neq 0$ får vi

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{m}}{r} \right). \quad (6.91)$$

Operationen $\nabla \cdot$ udføres efter tabel A.2:7 med udnyttelse af $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$. Vi kan derfor skrive

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (6.92)$$

hvor vi kan notere, at det er lykkedes, at udtrykke feltet som minus gradienten af et skalarfelt. (I parentes bemærket er dette muligt, fordi vi befinder os i en del af rummet uden strømme, sådan, at $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ efter 6.70).

Vi kan udføre ∇ operationen ved at opfatte operanden som produktet af skalarerne $\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}$ og $1/r^3$. Med tabel A.2:5 og A.39 finder vi da endelig den magnetiske fluxtæthed:

B-feltet fundet

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right]}. \quad (6.93)$$

Bortset fra den konstante faktor, er dette udtryk identisk med udtrykket 2.78 for feltstyrken af en elektrisk dipol. På trods af den helt forskellige fysiske natur af en elektrisk dipol (f. eks. to nære, modsatte punktladninger) og en magnetisk dipol (f. eks. en lille strømkreds), ser feltet på store afstande fuldstændig ens ud for dem begge.

Dipolfelt er dipolfelt

Kapitel 7

Induktion

7.1 Induktionsloven

I forrige afsnit behandlede vi det magnetiske felt skabt af en elektrisk strøm. Det oprindelige eksperimentelle grundlag var Ørsteds, Ampères og andres iagttagelser i årene 1820-25.

I samme periode blev der gjort mange forsøg på at finde en omvendt effekt, altså en elektrisk strøm skabt af et magnetfelt. Disse anstrengelser var dog forgæves, fordi man søgte efter en *stationær* strøm. I 1831 opdagede imidlertid *Faraday* og, samtidigt, *Joseph Henry* (1797-1878) □, at der forbigående optræder en strøm i en lukket elektrisk kreds, når den magnetiske flux gennem kredsen *ændres*. Fluxen kan ændres på forskellig måde. For eksempel ved at slutte eller afbryde strømmen gennem en spole. I en anden, nærtliggende spole kan der da iagttages et strømstød. Tilsvarende kan der fremkaldes en strøm i en spole ved at bevæge permanente magneter i dens nærhed. Der fremkaldes også en strøm, når en spole bevæges eller roteres i et ydre magnetfelt. Denne type strømme kaldes *inducerede* og fænomenerne under ét kaldes *elektromagnetisk induktion*.

Faradays, Henrys og andres iagttagelser kan sammenfattes i følgende love:

- Når den magnetiske flux gennem en lukket elektrisk kreds ændrer sig, vil der, uanset årsagen til ændringen, induceres en elektromotorisk kraft i kredsen.
- Størrelsen af den inducerede elektromotoriske kraft er proportional med fluxens ændringshastighed.
- Den inducerede elektromotoriske kraft har en sådan retning, at den modvirker den fluxændring, som fremkalder den (*Lenz' lov*).

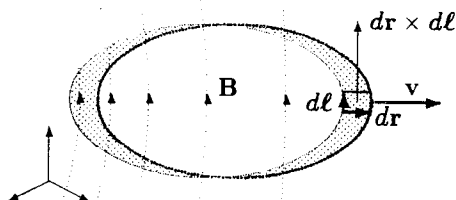
Disse love kan matematisk sammenfattes i ligningen

$$\mathcal{E} = -k_i \frac{d\Phi}{dt}. \quad (7.1)$$

Her er $\mathcal{E}$ den inducerede elektromotoriske kraft i kredsen og $\Phi = \Phi(t)$ den øjeblikkelige flux gennem kredsen. Fortegnet udtrykker Lenz' lov, idet den positive retning for $\mathcal{E}$ er fastlagt efter den sædvanlige omløbsregel i forhold til $\mathbf{B}$ -feltet, som illustreret ved retningen af $d\ell$ på fig. 7.1.

*Induktions-
fænomenet*

*Faradays
og Henrys
iagttagelser*



Figur 7.1: En lukket strømkreds, som bevæges med jævn hastighed i et (inhomogent) magnetfelt. Som følge af fluxens ændring gennem kredsen opstår der en elektromotorisk kraft i denne.

I 7.1 er k_i en konstant. Da dimensionen af magnetisk flux er Vs (se diskussionen i forbindelse med 6.53), og da elektromotorisk kraft måles i V, bliver konstanten dimensionsløs. Der gælder faktisk $k_i = 1$. Det kan ses af følgende argument:

Konstant
fastlægges

Vi betragter en lukket, stiv strømkreds i et ydre magnetfelt $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, fig. 7.1. Kredsen bevæger sig med jævn hastighed $\mathbf{v}$. Dens ledningselektroner bevæger sig da også, og da bevægelsen foregår i et magnetfelt, vil de efter 6.17 være påvirket af Lorentzkraften $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, hvor e er elektronens ladning. Hvor denne kraft har en komponent i lederens retning, giver den anledning til en strøm. Vi kan udtrykke Lorentzkraften ved en kontinuert fordelt (ikke-elektrostatisk) feltstyrke $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ i lederen. Efter 5.46 finder vi da den elektromotoriske kraft $\mathcal{E}$ i den lukkede kreds som

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \oint d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (7.2)$$

Her indfører vi nu $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, hvor $d\mathbf{r}$ angiver forskydningen af lederelementet $d\mathbf{l}$. Desuden ombyttes $\cdot$ og $\times$ i 7.2, hvorefter

$$\mathcal{E} = \oint d\mathbf{l} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \right) = \frac{d}{dt} \oint (d\mathbf{l} \times d\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B} = -\frac{d}{dt} \oint (d\mathbf{r} \times d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{B}. \quad (7.3)$$

Men, som vist på fig. 7.1 er $(d\mathbf{r} \times d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{B}$ netop fluxen $d\Phi$ gennem et lille fladeelement $d\mathbf{r} \times d\mathbf{l}$, idet omløbsretningen for $d\mathbf{l}$ er fastlagt sådan, at en strøm i omløbsretningen giver et magnetfelt i $\mathbf{B}$'s retning. Integralet i 7.3 langs hele kredsen giver da den totale fluxændring gennem denne, jvf. de tonede områder på fig. 7.1. Efter 7.3 kan vi derfor skrive 7.1 som

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}}. \quad (7.4)$$

Induktions-
loven

Dette er *induktionsloven*. Den er her vist for et specielt tilfælde, nemlig en bevæget kreds i et inhomogent magnetfelt, hvor vi kan knytte den inducerede elektromotoriske kraft til Lorentzkraften. Vi skal imidlertid, støttet af erfaringen, antage, at 7.4 er generelt gyldig sådan, at den også gælder, når kredsen ligger stille, men hvor fluxen gennem den ændrer sig med tiden, f. eks. som følge af tidsvarierende strømme andre steder i rummet. Vi kan gå videre endnu og helt undlade en lederkreds og postulere, at der langs enhver lukket kurve vil være en elektromotorisk kraft, dvs. et arbejde per ladning, givet ved 7.4.

Vi kan udtrykke det sådan, at et tidsvarierende magnetfelt $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ giver anledning til et elektrisk felt $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i rummet og finde en differentiaalligning for dette felt ud fra induktionsloven ved hjælp af Stokes sætning A.27:

3. Maxwell
ligning

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a}, \quad (7.5)$$

hvor S er et fladestykke, der har den lukkede kurve C som rand. I 7.5 udtrykker det andet lighedstegn Stokes sætning, som er et matematisk udsagn. Det næste lighedstegn har et fysisk indhold, idet det udtrykker induktionsloven 7.4. Endelig er der i det sidste integral anvendt partielle afledede, da $\mathbf{B}$ -feltet afhænger af både tid og sted. Efter 7.5 gælder altså

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a}. \quad (7.6)$$

Da 7.6 skal gælde for ethvert fladestykke S , også et vilkårligt lille, er

Differentiel
form

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (7.7)$$

Dette er den differentielle form af induktionsloven eller Faraday-Henrys lov, som er identisk med den 3. Maxwell ligning på endelig form. For stationære felter reducerer den til 2.25. Dens integrale form 7.4 kan skrives som

Integral
form

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}. \quad (7.8)$$

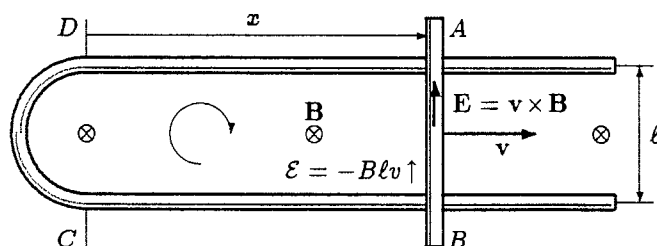
Dette udtryk reducerer for stationære felter til 2.26.

▷ Bevæget, lige leder: Vi kan se på arrangementet fig. 7.2. Lederstykket AB bevæges med hastigheden $\mathbf{v}$ vinkelret på det ydre magnetfelt $\mathbf{B}$. Hver af lederstykkets ledningselektroner påvirkes af kraften $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Dette er ekvivalent med, at der i lederen findes en feltstyrke $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Der er ingen kræfter fra magnetfeltet på elektronerne i resten af kredsen, som er stationær. Da $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ er feltstyrken $E = vB$ i lederen rettet modsat den ved $\mathbf{B}$ fastlagte omløbsretning. Det svarer til en emk over lederstykket på

Eksempel

$$\mathcal{E} = -\ell v B$$

som, da der ikke er elektromotoriske kræfter andre steder, er den elektromotoriske kraft i kredsen. Denne elektromotoriske kraft giver på sædvanlig



Figur 7.2: Når lederstykket AB bevæges med slæbekontakt til den hårnåleformede bøjle, opstår der en induceret emk i kredsen.

Induktions-
betragtning

måde anledning til en strøm I , hvis størrelse efter Ohms lov 5.49 bliver $I = \mathcal{E}/R$, hvor R er kredsens samlede resistans.

Alternativt kan vi se på den af lederstykket afgrænsede lukkede kreds ABCD med længden x og arealet ℓx . Fluxen gennem kredsen er $B\ell x$. Af 7.4 finder vi da for den inducerede emk

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B\ell x)}{dt} = -B\ell \frac{dx}{dt} = -B\ell v$$

som stemmer med resultatet ovenfor. Minustegnet angiver, at den elektromotoriske kraft er rettet modsat x , hvis retning igen er bestemt af $\mathbf{B}$ ved den sædvanlige omløbsregel. Retningen af x er derfor modsat i de to grene af hårnålen, hvilket giver et fortegn på $\mathcal{E}$ i overensstemmelse med Lenz' lov. <

Relativitet
og induktion

▷ Induktion og relativitetsprincippet: Lad os igen betragte et retlinet lederstykke, der som på fig. 7.2 bevæger sig vinkelret på et magnetfelt. Set fra laboratoriet opstår der, som vi så i forrige eksempel, mellem lederens endepunkter en emk $\mathcal{E} = -B\ell v$, som vi tilskriver induktion. Set fra et referencesystem, som følger med lederen, er dennes ladninger imidlertid stationære og føler derfor ikke nogen Lorentz-kraft af typen $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Naturligt nok venter vi også i denne situation en elektromotorisk kraft, og en sådan iagttages da også. Forklaringen herpå skal vi give i kapitel 15. Den er i korte træk, at der som følge af den relativistiske transformation af $\mathbf{B}$ -feltet til det bevægede system opstår et *elektrisk* felt $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, altså som før. <

Simpel
generator

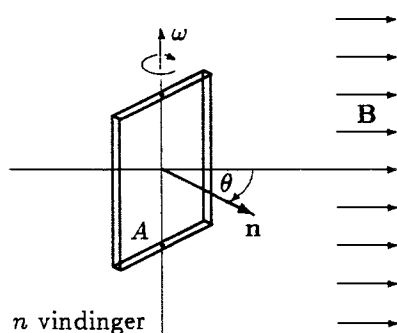
▷ Roterende spole: En flad, rektangulær lukket spole med n vindinger roterer med vinkelfrekvens ω i et homogent magnetfelt $\mathbf{B}$. Se fig. 7.3. Rotationsaksen er vinkelret på feltet. Til tiden $t = 0$ antages spoleplanens normal $\mathbf{n}$ at pege i feltretningen. Til tiden t danner normalen da vinklen $\theta = \omega t$ med feltet. Fluxen gennem spolen afhænger af tiden som

$$\Phi(t) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}A = BA \cos \theta = BA \cos \omega t.$$

Efter 7.4 finder vi ved differentiation efter tiden den inducerede elektromotoriske kraft $\mathcal{E} = BA\omega \sin \omega t$ i hver vinding og altså

$$\mathcal{E} = BnA\omega \sin \omega t$$

i de n vindinger ialt. Den inducerede emk bestemmes af nA , der omtales som spolens samlede vindingsareal. Bemærk, at til $t = 0$ er fluxen gennem spolen aftagende, og den elektromotoriske kraft positiv. I overensstemmelse med Lenz' lov modvirker den inducerede strøm altså fluxens aftagen.



Figur 7.3: Roterende spole i homogent magnetfelt.

Den inducerede emk giver anledning til en harmonisk varierende strøm i spolen. Gennem slæbekontakter kan denne forbindes til en ydre belastning og fungerer da som en simpel *vekselstrømsgenerator*. ◁

▷ Hvirvelstrømme: Når et magnetfelt i en udstrakt leder ændrer sig, vil der opstå *hvirvelstrømme*. Da modstanden er lille, kan strømmene blive meget store og give betydelige energitab i elektriske maskiner. En metalplade som falder i et inhomogent magnetfelt bevæger sig meget langsomt, fordi de inducerede strømme modvirker bevægelsen. Af den 3. og 4. Maxwell følger, at udbredelsen af hvirvelstrømme styres af differentialligningen

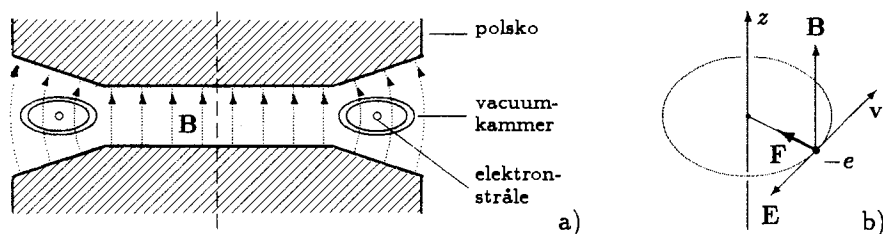
$$\nabla^2 \mathbf{J} = \gamma \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t},$$

som er identisk med varmeledningsligningen. ◁

▷ Betatronen: At der opstår et virkeligt elektrisk felt ved tidslig ændring af et magnetfelt illustreres af princippet i en *betatron*. En betatron er et

Hvirvelstrøm

En elektron-centrifuge



Figur 7.4: a) Snit i betatronmagnet med vacuumkammer. b) Cirkelbane for elektronbevægelsen i en betatron.

apparat, som bruges til at accelerere elektroner til meget høje hastigheder. Den består af en rotationssymmetrisk elektromagnet, se fig. 7.4, med polsko, som frembringer et radiale aftagende magnetfelt. Mellem polskoene ligger et ringformet, evakueret kammer. Elektroner, der befinder sig i kammeret, vil på grund af magnetfeltet bevæge sig i cirkler. Er elektronhastigheden i midterplanen v , er Lorentzkraften på en elektron evB . Elektronen har impuls $p = m_0 \gamma v$, hvor m_0 er elektronens hvilemasse og $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Relativistisk følger elektronen en cirkelbane med radius r dersom

Relativistisk bevægelse

$$\frac{pv}{r} = evB \quad \Rightarrow \quad p = eBr. \quad (7.9)$$

Er nu magnetfeltet voksende, induceres der en tangentiel feltstyrke E , som vil accelerere elektronerne i cirkelbanen efter bevægelsesligningen

$$\frac{dp}{dt} = -eE = \frac{e}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (7.10)$$

hvor vi har brugt induktionsloven 7.4 til at udtrykke feltstyrken. Denne ligning kan integreres til

$$p = \frac{e}{2\pi r} \Phi, \quad (7.11)$$

idet elektronen starter med impuls 0 på et tidspunkt, hvor $\Phi = 0$. Af 7.9 og 7.10 får man da betingelsen for stabilt omløb i en bane med radius r

$$B_r = \frac{\Phi}{2\pi r^2} = \frac{\langle B \rangle}{2}. \quad (7.12)$$

Betingelse for
stabilitet

Ligningen udtrykker, at feltet B_r ved elektronbanens radius skal være halvdelen af middelværdien $\langle B \rangle$ af magnetfeltet inden for banen. Dette opnås ved at give polskoene en særlig profil, se fig. 7.4. Den kinetiske energi, en elektron opnår ved accelerationen til det maximale magnetfelt B_0 , bliver

$$E_{k,max} = c\sqrt{m^2c^2 + e^2B_0^2r^2} - m_0c^2, \quad (7.13)$$

hvor vi i udtrykket for den relativistiske kinetiske energi efter 7.9 har indført impulsen $p = eB_0r$. ◁

7.2 Induktans

Induktion med
flere kredse

Lad os betragte et antal strømkredse, som er anbragt i nærheden af hinanden. Indtil videre kan vi tænke os kredsene opbygget af tynde ledninger. En strøm i én kreds vil give en magnetisk flux både gennem kredsen selv og gennem de øvrige kredse. Varierer strømmen med tiden, vil der induceres elektromotoriske kræfter i alle kredsene. Situationen minder om den, vi mødte i elektrostatiken, hvor ladning på én leder i et system af flere påvirkede potentialet og ladningsfordelingen på dem alle. I afsnit 2.10 håndterede vi denne situation ved at indføre kapacitans- og influenskoefficienter, som var geometrisk bestemte størrelser. Vi skal nu se, at man for et system af strømkredse kan indføre *induktanskoefficienter* til at beskrive kredsenes indbyrdes påvirkninger.

7.2.1 Selvinduktans

Enkelt kreds

Vi vil først se på en enkeltstiv strømkreds langt fra alle andre kredse. Fluxen gennem kredsen stammer da udelukkende fra strømmen i kredsen selv. Efter Biot og Savarts lov 6.10 er magnetfelt og strøm overalt proportionale sådan, at vi kan skrive

$$\Phi = LI. \quad (7.14)$$

Proportionalitetsfaktoren L kaldes kredsens *selvinduktans*. Selvinduktans måles i VsA^{-1} , der kaldes henry (H) efter Joseph Henry.

Af 7.14 kan vi finde den elektromotoriske kraft, som en strømindring inducerer i kredsen selv:

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (7.15)$$

som ofte anvendes i det følgende. Minustegnet i 7.15 stammer fra Lenz' lov og udtrykker, at den selvinducerede elektromotoriske kraft modvirker strømmens ændring i kredsen. Hvis eksempelvis strømmen vokser, er dI/dt positiv, og det inducerede $\mathcal{E}$ bliver negativt. Den inducerede strøm bliver da også negativ, altså modsat den eksisterende, voksende strøm.

Specielle
tilfælde

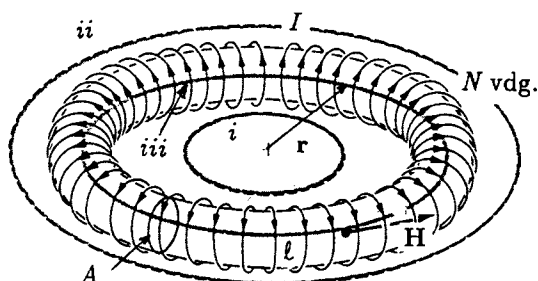
Vi har her forudsat, at kredsen var stiv sådan, at L er konstant. Hvis kredsens form ændrer sig, er dette ikke tilfældet, og vi må i stedet for 7.15 skrive $\mathcal{E} = -d(LI)/dt$. Ofte møder man kredse, som indeholder magnetiske materialer. Der er da ikke nødvendigvis proportionalitet mellem strøm og flux, og efter 7.14 må man i stedet for $L = \Phi/I$ skrive $L = d\Phi/dI$, som kaldes den differentielle selvinduktans. Den afhænger af strømmens størrelse.

▷ Ringformet solenoide: Efter 7.14 er $L = \Phi/I$. For at bestemme selvinduktans må vi derfor beregne flux for en given strøm. Dette kan kun gennemføres i få, simple tilfælde. Her skal vi betragte den på fig. 7.5 viste spole, som er viklet på en ring (torus) af et umagnetisk materiale. Som defineret er selvinduktans en egenskab ved en lukket kreds. Vi tænker os derfor spolens tilledninger forbundet til en ydre strømkilde. Løber tilledningerne tæt og parallelt, eller er de snoet om hinanden, giver de praktisk talt intet ydre magnetfelt, og strømkilden kan placeres så fjernt, at heller ikke den bidrager til feltet i spolen.

Beregning af induktans

Feltet kan enkelt beregnes ved Ampères lov. Hertil betragter vi forholdene i ringens centrale plan. Af symmetri Grunde må feltet altid være tangentielt til koncentriske cirkler om ringens centrum og have konstant størrelse

Typisk metode



Figur 7.5: Ringformet solenoide.

for enhver sådan cirkel, som da bekvemt anvendes som "Ampèrevej".

(i) Ligger denne inden for ringen, krydses det omsluttende stykke af midterfladen ikke af nogen strøm. Cirkulationen af $\mathbf{H}$ og dermed $\mathbf{H}$ selv må da efter 6.75 være 0.

(ii) Ligger vejen tilsvarende uden for ringen, krydses fladen ganske vist af vindingerne, men nettostrømmen gennem den indesluttende flade er stadig nul, hvorfor $\mathbf{H}$ også her er 0.

(iii) Ligger vejen imidlertid inde i ringen, krydses fladen kun af vindinger, hvori strømmen har samme retning. Er strømmen I , og er der N vindinger, får vi da af Ampères lov

$$H = \frac{NI}{2\pi r}, \quad (7.16)$$

for feltet i den ringformede solenoide. Er dennes radius stor i forhold til dens tværsnit, kan vi med god tilnærmelse erstatte $2\pi r$ med ringens middelmålskreds ℓ . Da spolen er viklet på et umagnetisk materiale gælder $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ således, at fluxen gennem 1 vinding bliver

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 N I A}{\ell}, \quad (7.17)$$

hvor A er ringens tværsnitsareal, se figuren.

Man må nu huske, at fluxen 7.17 passerer alle N vindinger, sådan at den inducerede elektromotoriske kraft i spolen bliver N gange den, som induceres i en enkelt vinding. Det er derfor fluxen gennem alle vindinger ("hele vindingsarealet"), som bestemmer induktansen. Denne flux bliver

Obs!

altså

$$\Phi_N = \frac{\mu_0 N^2 A I}{\ell}. \quad (7.18)$$

Heraf finder man da selvinduktansen af den ringformede solenoide

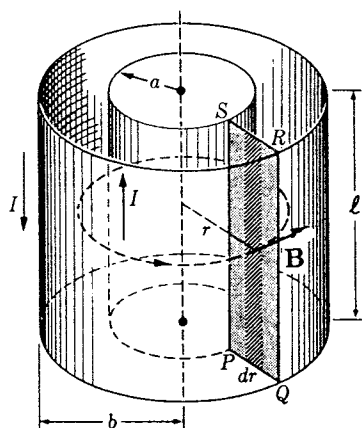
$$L = \frac{\Phi_N}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}, \quad (7.19)$$

hvor den ene faktor N altså skyldes, at der er N vindinger til at frembringe feltet, den anden, at der er N vindinger til at samle det op.

Formlen 7.19 gælder iøvrigt også for en *lang solenoide*, der kan betragtes som fremkommet ved åbning og udretning af en ringformet. Se også diskussionen i forbindelse med 6.46 og 6.77. ◀

Induktans af
kabel

▷ Coaxialkabel: Kabler af forskellig type har også selvinduktans. Som eksempel skal vi se på et coaxialkabel, hvor inderlederen har radius a og yderlederen inderradius b . For at opnå en lukket kreds kortslutter vi de to ledere i den ene ende af et kabelstykke med længden ℓ og indskyder en strømkilde i den anden ende. Den ene leder fungerer da som returvej for strømmen i den anden, se fig. 7.6.



Figur 7.6: Selvinduktans af coaxialkabel.

Metoden igen

Feltet mellem lederne kan bestemmes fra Ampères lov på samme måde, som vi gjorde det for en lang, lige leder. Se 6.77. Det er tangentialt til cirkler koncentrisk om inderlederen og har efter 6.77 størrelsen

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Den totale flux, som omslutes af strømmen, findes ved integration over arealet $PQRS$ i striber af bredde dr , altså

$$\Phi = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (7.20)$$

Selvinduktansen per længde af coaxialkablet bliver således

$$L_\ell = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (7.21)$$

Vi har her set bort fra feltet inde i cylindrene og fra de afvigende feltforhold nær enderne. ◀

7.2.2 Induktanskoefficienter

Vi skal nu behandle den generelle situation, hvor flere kredse sender flux gennem hinanden. Man siger, at sådanne kredse er *magnetisk koblete*.

Flere kredse

Lad os antage, at vi har n stive kredse. Fluxen gennem den i 'te kreds kan skrives

$$\Phi_i = \Phi_{i1} + \Phi_{i2} + \cdots + \Phi_{ii} + \cdots + \Phi_{in} = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij}, \quad (7.22)$$

hvor Φ_{ij} er den magnetiske flux, som kreds j sender gennem kreds i . I vacuum og i lineære magnetiske materialer, som vi siden skal behandle, er der proportionalitet mellem disse fluxbidrag og strømmene, som fremkalder dem. Kredse, hvor dette gælder, kaldes *lineære*, og proportionaliteten skrives som

Linearitet

$$\Phi_{ij} = M_{ij} I_j, \quad (7.23)$$

hvor M_{ij} for $i \neq j$ kaldes den *gensidige induktans* eller *induktanskoefficienten* mellem kreds i og kreds j . Vi skal siden vise, at koefficientmatricen M_{ij} er symmetrisk, altså $M_{ij} = M_{ji}$. For $i = j$ er koefficienten identisk med den i 7.14 indførte selvinduktans for kreds i , som vi, når der er flere kredse tilstede, efter behag kan betegne med L_i eller M_{ii} . I det lineære tilfælde er både M -erne og L -erne rent geometrisk bestemte størrelser, som måles i henry.

Induktans
generaliseret

Med disse definitioner kan vi da skrive den samlede flux gennem kreds i som en superposition

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij} = \sum_{j=1}^n M_{ij} I_j. \quad (7.24)$$

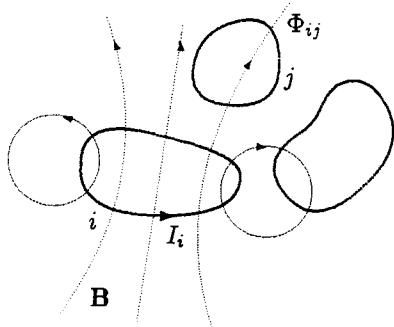
Ud fra induktionsloven kan vi med 7.24 udtrykke den elektromotoriske kraft, som induceres i kreds i , når strømmene ændres:

Induceret emk

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\sum_{j=1}^n M_{ij} \frac{dI_j}{dt} \quad (7.25)$$

eller alternativt

$$\mathcal{E}_i = -L_i \frac{dI_i}{dt} - \sum_{j=1}^n M_{ij} \frac{dI_j}{dt}, \quad i \neq j \quad (7.26)$$

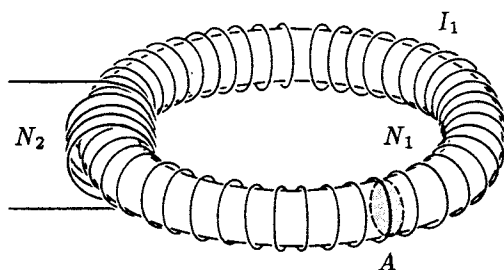


Figur 7.7: Magnetisk koblete kredse. Strømmen i hver kreds sender flux gennem alle.

Det understreges, at mens L_i altid er positiv, så afhænger fortegnet på M_{ij} af strømmenes retninger. Udtrykket 7.26 kan betragtes som en almindelig-gørelse af 7.15. ◁

Fast koblede kredse

▷ Koblede solenoider: Som eksempel på gensidig induktans kan vi se på den tidligere behandlede ringformede solenoide, hvis bevikling, spole 1, er



Figur 7.8: To spoler, som er vikled på samme ringform, er et eksempel på fast koblede magnetiske kredse.

suppleret med endnu en bevikling, spole 2, uden på den første. Lad vindingsstallene for de to spoler være N_1 og N_2 . En strøm I_1 i spole 1 giver efter 7.16 et felt i ringen på

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell},$$

hvor ℓ er ringens middelomkreds. Har ringen tværsnitsarealet A bliver fluxene gennem hele vindingsarealet af henholdsvis spole 1 og spole 2

$$\Phi_{11} = \frac{\mu_0 N_1^2 A I_1}{\ell}, \quad \Phi_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A I_1}{\ell}.$$

Heraf genfinder vi det tidligere resultat 7.19 for L_1 og det analoge for L_2 :

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{\ell}, \quad L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 A}{\ell}, \quad (7.27)$$

mens den gensidige induktans bliver

$$M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell}. \quad (7.28)$$

Man indser let, at $M_{21} = M_{12}$ og, at der for dette tilfælde gælder, at

$$M_{12} = \sqrt{L_1 L_2}. \quad (7.29)$$

Denne relation er et grænsetilfælde for den magnetiske kobling mellem to kredse, som generelt udtrykkes ved

$$M_{12} = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad -1 \leq k \leq 1. \quad (7.30)$$

Mål for kobling

Den dimensionsløse konstant k kaldes kredsenes *koblingskoefficient*. I tilfældet her er $k = 1$, hvilket svarer til, at al flux fra den ene kreds går gennem den anden. Dette er et eksempel på *fast kobling*. Små værdier af k giver tilsvarende *løs kobling*. ◁

7.2.3 Neumanns formel

Ved hjælp af vektorpotentialet kan vi finde et elegant og ofte nyttigt udtryk for den gensidige induktans af to kredse.

Flux og vektorpotential

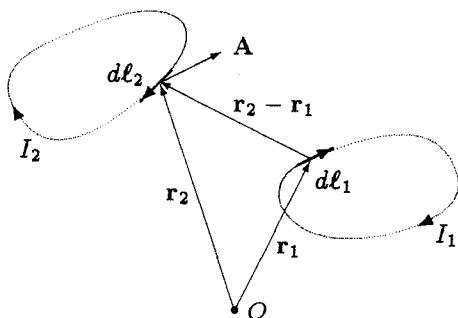
Til dette formål noterer vi først, at fluxen gennem en kreds C , som indeslutter fladestykket S ved brug af 6.54, kan skrives som

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}. \quad (7.31)$$

Dernæst omskrives det sidste fladeintegral med Stokes sætning A.27 til et kurveintegral langs den lukkede kurve C . Vi får da

$$\Phi = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{\ell}. \quad (7.32)$$

Dette er et generelt udtryk, som forbinder magnetisk flux og vektorpotential.



Figur 7.9: Gensidig induktans mellem to kredse efter Neumann.

Vi ser nu på to tynde kredse, 1 og 2. Vektorpotentialet fra strømmen I_1 på kreds 2's plads finder vi af 6.60. Vi lader kreds 1 svare til den mærkede koordinat og kreds 2 til den umærkede. Efter substitutionen $\mathbf{J} dv' = I_1 d\mathbf{\ell}_1$ (se 6.11) finder vi

Koblede kredse

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{\ell}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \quad (7.33)$$

som indsat i 7.32 giver fluxen gennem kreds 2:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_2} d\mathbf{\ell}_2 \cdot \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{\ell}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (7.34)$$

Division med I_1 giver da ifølge 7.23 den gensidige induktans

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{\ell}_2 \cdot d\mathbf{\ell}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = M_{12}, \quad (7.35)$$

idet symmetrien af udtrykket straks viser, at $M_{12} = M_{21}$. Dette udtryk kaldes *Neumanns formel* og illustrerer klart, at induktans er en geometrisk bestemt størrelse. Formlen er nyttig ved teoretiske betragtninger (se afsnit 7.2.5) og kan anvendes til beregning af den gensidige induktans mellem to tynde kredse med simpel geometri. Desuden kan formelen, som omtalt i afsnit 7.2.5, også benyttes til beregning af selvinduktans.

Symmetri og geometri

7.2.4 Induktører

Induktans som
komponent

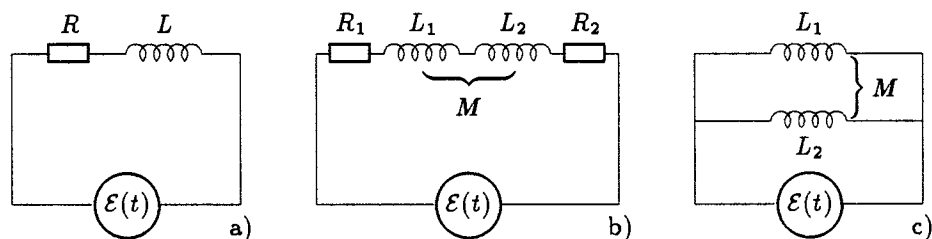
Selvinduktanser optræder ofte i elektriske kredsløb som komponenter. I lighed med den sprogbrug vi har indført med betegnelserne *capacitor* og *resistor*, skal vi kalde en sådan komponent for en *induktor*. Det skal indskydes, at enhver strømførende, lukket elektrisk kreds vil have en magnetisk flux igennem sig, og derfor selv optræder som en induktor uanset hvilke komponenter, den er opbygget af. En induktor i et kredsløb angives ved et spoleagtigt symbol, som $\text{---}\text{---}\text{---}$.

Induktører har størst betydning i forbindelse med harmonisk varierende vekselstrømme, som vi skal behandle i kapitel 11. Her skal vi indskrænke os til nogle få bemærkninger om induktører forbundet i serie og parallel.

Induktører
i praksis

I praksis fremstilles induktører ved at vikle en elektrisk ledning op som en spole omkring en kerne af et passende, ofte magnetisk, materiale. En sådan spole må nødvendigvis have en vis resistans.

a) Den simpleste kreds, hvori der indgår en induktor, må derfor realistisk afbildes som på fig. 7.10a, hvor en induktor L med indre resistans R er forbundet i serie med en tidsvarierende elektromotorisk kraft $\mathcal{E}$. Vi opfatter



Figur 7.10: a) Seriekreds med en enkelt induktans L med indre resistans R (vist separat som en serieresistans) og en tidsvarierende elektromotorisk kraft $\mathcal{E}(t)$.

b) To serieforbundne induktanser L_1 og L_2 med indre resistanser R_1 og R_2 og gensidig induktans M .

c) To parallelforbundne induktanser L_1 og L_2 med gensidig induktans M .

induktansen som en elektromotorisk kraft $-L(dI/dt)$, kort skrevet $-L\dot{I}$. Efter Kirchhoffs 2. lov 5.55 skal der da til ethvert tidspunkt gælde

$$\mathcal{E} - L\dot{I} = RI, \quad (7.36)$$

hvor begge de elektromotoriske kræfter i kredsen er opført på ligningens venstre side. Løsningerne til differentialligningen 7.36 for forskellige $\mathcal{E}(t)$ diskuteres i kapitel 11.

b) I kredsløbet fig. 7.10b er der to induktanser L_1 og L_2 i serie, som yderligere er koblet med den gensidige induktans M . Efter Kirchhoffs 2. lov gælder her

$$\mathcal{E} - L_1\dot{I} - M\dot{I} - L_2\dot{I} - M\dot{I} = R_1I + R_2I, \quad (7.37)$$

hvor det er benyttet, at strømmen gennem alle tværsnit af kredsen er den samme. Det gælder for strømme, som varierer så langsomt, at alle dele af kredsen praktisk talt øjeblikkeligt følger enhver ændring. Bemærk, at den gensidige induktans inducerer en emk i hver af de to induktører.

Den enkleste
kreds

Ved omflytning af leddene kan man skrive 7.37 på formen

$$\mathcal{E} - (L_1 + L_2 + 2M)\dot{I} = (R_1 + R_2)I, \quad (7.38)$$

som ved sammenligning med 7.36 viser, at to induktanser i serie er ekvivalent med en enkelt induktans

*Induktanser
i serie*

$$L = L_1 + L_2 + 2M = L_1 + L_2 + 2k\sqrt{L_1 L_2}. \quad (7.39)$$

Vi har her, i overensstemmelse med 7.30, indført kredsenes koblingskoefficient k , idet

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad -1 \leq k \leq 1. \quad (7.40)$$

Positive værdier for k svarer til, at en strøm I_1 giver en flux i kreds 2 i samme retning som den fra kredsens egen strøm I_2 og vice versa.

c) Parallelkredsløbet fig. 7.10c behandles mest hensigtsmæssigt som en egentlig vekselstrømskreds. Her skal vi kun betragte det tilfælde, hvor induktorerne indre resistanser er forsvindende. Vi kan anvende Kirchhoffs 2. lov på de to masker, som hver indeholder én af induktanserne:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - L_1 \dot{I}_1 - M \dot{I}_2 &= 0, \\ \mathcal{E} - L_2 \dot{I}_2 - M \dot{I}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Løses de to ligninger sammen for $\dot{I}_1$ og $\dot{I}_2$ og adderes løsningerne, findes den afledede $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ af hele strømmen i kredsen

$$\dot{I}_1 = \mathcal{E} \frac{L_2 - M}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \dot{I}_2 = \mathcal{E} \frac{L_1 - M}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \dot{I} = \mathcal{E} \frac{L_1 + L_2 - 2M}{L_1 L_2 - M^2}, \quad (7.42)$$

eller

$$\mathcal{E} - \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \dot{I} = 0. \quad (7.43)$$

Heraf ser man, at den ekvivalente serieinduktans af de to parallelforbundne, resistansfrie induktanser er

*Induktanser
i parallel*

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}. \quad (7.44)$$

7.2.5 Beregning af induktans

I det foregående er der givet nogle få eksempler på beregning af selvinduktans og gensidig induktans af simple kredse ud fra den omsluttede flux. Man kan måske undre sig over, at andre, tilsyneladende lige så simple kredse, ikke er medtaget. For eksempel selvinduktansen af en tynd tråd bøjet til en cirkulær eller rektangulær, plan kreds.

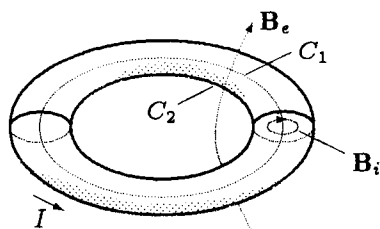
Sådanne er imidlertid slet ikke simple. For det første bliver selvinduktansen af en kreds med en uendelig tynd leder uendelig. Vi kan indse dette ud fra feltet 6.42 fra en lang lige leder. Dette er et $1/r$ -felt, og den magnetiske flux i et område nær lederen vil være bestemt af et integral af typen $\int dr/r$, som divergerer i integrationsgrænsen $r \rightarrow 0$. Det er altså nødvendigt

*Komplicerede
simple kredse*

at antage, at de tynde ledere, vi har betragtet i det foregående, har en endelig tykkelse. Fluxen inde i ledermaterialet vil da bidrage med en 'indre' selvinduktans, som må medregnes. Se et eksempel i opgave 7.13 og 10.6.

For at beregne fluxen er det nødvendigt at beregne magnetfeltet i ethvert punkt inden for en lukket kreds, hvilket er matematisk besværligt eller umuligt. Med 6.43 kan vi beregne feltet i centrum af en cirkulær leder, men ikke i andre punkter. I dette tilfælde kan beregningen dog gennemføres for et vilkårligt punkt med anvendelse af elliptiske integraler, men de analytiske udtryk er ganske komplicerede. Det samme gælder, når Neumanns formel anvendes, se opgave 7.18.

Da induktans har meget stor praktisk betydning i forbindelse med elektriske kredsløb, afsluttes der her med nogle yderligere bemærkninger, som belyser begrebet og dets anvendelse.



Figur 7.11: Selvinduktans kan beregnes med Neumanns formel.

Ydre og indre
selvinduktans

Neumann's formel 7.35 giver den gensidige induktans mellem to lukkede strømkredse C_1 og C_2 . Vi kan imidlertid også anvende den til beregning af selvinduktans af en lukket kreds (fig. 7.11). Denne selvinduktans kan opdeles i en *ydre* eller *extern* selvinduktans L_{ext} , som kommer fra den del af fluxen, som ikke passerer ledermaterialet. Tilsvarende er der en *indre* eller *intern* selvinduktans fra den del af fluxen, som faktisk passerer ledermaterialet.

Ydre selv-
induktans

Betragter vi en stor strømkreds (fig. 7.11) med kun svagt buede lederstykker, vil det ydre felt efter Ampères lov være identisk med det felt, som frembringes, dersom lederstrømmen I var koncentreret i lederens akse (strømkreds C_1 på figuren.) Den gensidige induktans mellem C_1 og den 'minimale' kreds C_2 på lederens overflade, vil være fluxen gennem C_2 divideret med I . Men dette vil også være den ydre selvinduktans af hele kredsen, som derfor kan beregnes af Neumann's formel for gensidig induktans, altså

$$L_{ext} = M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \quad (7.45)$$

med den på figuren angivne betydning af kredsene C_1 og C_2 . Fordelen ved denne betragtning er, at et generelt udtryk for gensidig induktans kan anvendes til beregning af selvinduktans.

Indre selv-
induktans

Den indre selvinduktans L_{int} beregnes lettest ud fra et udtryk for induktorens indre energi, som vi skal udlede i kapitel 10. Vi angiver her blot resultatet

$$\frac{1}{2} L_{int} I^2 = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv, \quad (7.46)$$

hvor integralet med felterne går over lederens volumen. Ligning 7.46 udtrykker, at energien, som svarer til kredsens indre selvinduktans, også skal være energien af feltet inden for ledere.

Definitionerne 7.14 af selvinduktans og 7.23 af gensidig induktans, kan kun anvendes på lukkede kredse. I praksis taler man ofte om induktansen af et lederelement, eksempelvis et stykke retlinet leder eller en spole. Til klargørelse heraf, kan vi tænke på den gensidige induktans af to kredse C_1 og C_2 , som er opdelt i stykker $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1m}$ og $C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2n}$. Vi har da efter Neumann's formel:

*Induktans af
lederstykker*

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m \int_{C_{1p}} \int_{C_{2q}} \frac{d\ell_1 \cdot d\ell_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (7.47)$$

Selv om induktans kun har en direkte fysisk betydning for de lukkede kredse, 1 og 2, kan vi formelt indføre den gensidige induktans M_{pq} for de to lederstykker C_{1p} og C_{2q} ved

$$M_{pq} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_{1p}} \int_{C_{2q}} \frac{d\ell_1 \cdot d\ell_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (7.48)$$

Den samlede gensidige induktans M_{12} mellem de lukkede kredse, 1 og 2, fås da ved summation

$$M_{12} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m M_{pq}. \quad (7.49)$$

Tilsvarende kan man med henvisning til 7.45 og 7.46 tale om selvinduktansen af et lederstykke.

Tabel 7.1 giver nogle udtryk for induktans af lederstykker og kredse, som dækker tilfælde, der ofte mødes i praksis.

Tabel 7.1: Induktans

Rette enkeltledere:

- 1) Rund tråd med radius r og længde ℓ :

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\ln \frac{2\ell}{r} - \frac{3}{4} \right] 2\ell.$$

- 2) Rektangulær stang med dimensioner $a \times b$, perimeter $p = 2(a + b)$ og længde ℓ :

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\ln \frac{4\ell}{p} + \frac{1}{2} + \frac{0.1118p}{\ell} \right] 2\ell.$$

- 3) Stang med elliptisk tværsnit med halvakser a og b :

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\ln \frac{2\ell}{a+b} - 0.05685 \right] 2\ell.$$

- 4) Rør med indre radius a , ydre radius b og længde ℓ :

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\ln \frac{2\ell}{b} + \frac{1}{4} + \frac{a^4}{(b^2 - a^2)^2} \ln \frac{b}{a} + \frac{7a^2 - 5b^2}{4(b^2 - a^2)} \right] 2\ell.$$

Rette dobbeltledere:

Strømmen går ud gennem den ene leder og returnerer gennem den anden. Homogen strømtæthed i lederne i tilfælde 5) og 6):

- 5) To parallelle cirkulære cylindre med radier a og b , akseafstand d og længde ℓ :

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\ln \frac{d^2}{ab} + \frac{1}{2} \right] 2\ell.$$

- 6) Coaxialledning hvor centerlederen har radius a , yderlederen indre radius b og ydre radius c og ledernes længde er ℓ :

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} + \frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right] 2\ell.$$

- 7) Coaxialledning som den forrige, men hvor strømmen løber i ledernes mod hinanden vendende yderste lag (gælder for højfrekvens):

$$L = \frac{\ell\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Lukkede kredse:

- 8) Enkelt tråd med tværsnitsradius r bøjet til cirkulær kreds med radius a :

$$L = \mu_0 a \left[\left(1 + \frac{r^2}{8a^2} \right) \ln \frac{8a}{r} + \frac{r^2}{24a^2} - \frac{7}{5} \right].$$

- 9) Tyndt bånd med bredde b bøjet til cirkulær kreds med radius a :

$$L = \mu_0 a \left[\ln \frac{8a}{b} - \frac{1}{2} \right].$$

Gensidig induktans:

- 10) To tynde, cirkulære og coaxiale kredse med radier a og b i afstanden d :

$$M_{ab} = \mu_0 \sqrt{ab} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right],$$

hvor $k^2 = 4ab/[(a+b)^2 + d^2]$ og $K(k)$ og $E(k)$ er de fuldstændige elliptiske integraler defineret ved

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

- 11) Lang, lige leder og en tynd, cirkulær kreds med radius a . Lederen passerer kredsens plan i afstanden c fra centrum under en vinkel α :

$$M = \mu_0 \left[c \sec \alpha - (c^2 \sec^2 \alpha - a^2)^{1/2} \right], \quad c > a,$$

$$M = \mu_0 \operatorname{tg} (\pi/4 - \alpha/2), \quad c < a.$$

Kapitel 8

Magnetika

Hidtil har vi kun betragtet magnetfelter i vacuum. Vi skal nu undersøge den virkning, som materialer af forskellig art har på magnetfelter. *Faraday* var den første, som iagttog, at *alle* materialer har en vis virkning, selv om den i mange tilfælde er svag. I analogi med betegnelsen *dielektrika* fra kapitel 3 skal vi anvende betegnelsen *magnetika* for magnetiske materialer under ét.

Stoffernes magnetiske virkninger skyldes deres atomare opbygning. Elektronernes bevægelse i atomerne svarer til tilstande med bestemte baneimpulsmomenter og giver anledning til mikroskopiske kredsstrømme inden for hvert atom. En sådan kredsstrøm har et magnetisk moment, som vi så det i afsnit 6.4. Ligeledes er der et magnetisk moment knyttet til elektronernes spin. Alle momenterne adderer til et permanent magnetisk moment for atomet. På grund af indre symmetrier bliver dette moment dog nul for mange atomer og de fleste molekyler. Selv i disse tilfælde er der dog magnetiske virkninger, som stammer fra inducerede kredsstrømme.

På baggrund af sådanne mikroskopiske billeder kan man skelne mellem, og teoretisk redegøre for, forskellige former for magnetisk virkning af materialer på et ydre magnetfelt:

1. Diamagnetisme: Når et materiale påtrykkes et ydre magnetfelt, påvirkes elektronerne i dets atomer af en ekstra kraft fra magnetfeltet. Elektronbevægelsen perturbteres derved på en måde, som kun kan beskrives præcist med kvantemekaniske metoder. Kvalitativt kan vi opfatte situationen sådan, at det påtrykte magnetfelt inducerer en ekstra strøm, og dermed et *induceret* magnetisk moment, i atomet. Efter Lenz' lov giver induktionen et magnetfelt rettet *mod* det påtrykte felt og vil altså svække dette. Effekten kaldes *diamagnetisme* og er en svag effekt. I faste stoffer er reduktionen af størrelsesordenen 10^{-5} . Diamagnetisme optræder i princippet for alle stoffer, men kan helt overskygges af de stærkere effekter, som omtales i de næste punkter. Diamagnetismen er næsten uafhængig af temperaturen.
2. Paramagnetisme: Som omtalt kan atomer eller molekyler have et *permanent* magnetisk dipolmoment, som er knyttet til elektronernes impulsmoment. I den feltfri tilstand er disse magnetiske momenter normalt tilfældigt orienteret. Et ydre magnetfelt påvirker imidlertid atomerne med et kraftmoment, som søger at rette de magnetiske dipoler

Magnetika

*Atomare
kredsstrømme*

*Flere typer
magnetisme*

*Dia-
magnetisme*

*Para-
magnetisme*

parallelt med det ydre felt, da dette giver den laveste energi. De ensrettede dipoler giver et felt, som øger det ydre felt. Effekten kaldes *paramagnetisme* og er også en svag effekt, om end stærkere end *diamagnetismen*. I faste stoffer er feltets forøgelse af størrelsesordenen 10^{-4} . Ensretningen af de permanente magnetiske momenter modvirkes af de termiske bevægelser af stoffets bestandele, og den paramagnetiske virkning på feltet aftager derfor med stigende temperatur.

*Ferro-
magnetisme*

3. Ferromagnetisme: Ferromagnetisme kan opfattes som en særlig form for paramagnetisme, som optræder i stoffer, hvor der er en naturlig tendens til, at de permanente dipolmomenter spontant ensrettes under atomernes eller molekylernes gensidige vekselvirkning. For jern, kobolt, nikkel og gadolinium er denne tendens særlig udpræget og optræder ved normal omgivelsestemperatur. Ferromagnetiske stoffer påvirker ydre felter meget kraftigt. En given magnetisk påvirkning kan således i et ferromagnetisk materiale give **B**-felter, som er 10^3 - 10^5 gange større end for den samme påvirkning i vacuum. Ferromagnetismen forsvinder ved temperaturer over den såkaldte Curie temperatur T_c .

*Makroskopisk
teori søges*

Denne kvalitative, mikroskopiske beskrivelse af magnetismen udbygges i afsnit 8.6. Her skal vi, i analogi til behandlingen af dielektrika, formulere en *makroskopisk* teori for felterne i nærværelse af magnetika.

8.1 Magnetisering

*Magnetisk
moment af
materiale*

I det følgende opfatter vi et materiale som opbygget af atomer eller molekyler hver med et (permanent eller induceret) magnetisk moment **m**. Er materialet magnetiseret, vil dipolerne være delvis eller helt ensrettede. Et lille volumen $\Delta v'$ af materialet har da et netto magnetisk moment

$$\Delta \mathbf{m} = \sum_{\Delta v'} \mathbf{m}_i, \quad (8.1)$$

*Magnetisering
defineret*

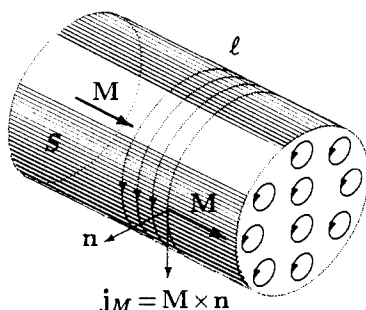
hvor vektorsummen udstrækkes over de molekyler i , der befinder sig inden for $\Delta v'$. Til at beskrive materialets magnetiseringstilstand i kildepunktet $\mathbf{r}'$ indfører vi en ny makroskopisk feltstørrelse $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$, som er grænseværdien af det *magnetiske dipolmoment per volumen*, altså

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta v'}. \quad (8.2)$$

Vektoren **M** angiver en *dipolmoment-tæthed* og kaldes *magnetiseringen*. Den har enheden Am^{-1} (sml. 3.2).

Magnetiseringen afhænger af størrelsen af det magnetiserende ydre felt på en måde, som vi tager op i afsnit 8.4. Her skal vi blot antage, at $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ er en kendt funktion.

▷ Magnetiseret cylinder: Allerede nu kan vi danne os et billede, som illustrerer ét vigtigt fysisk aspekt af magnetiseringen, nemlig fremkomsten af en overfladestrøm på materialet. Fig. 8.1 viser et stykke materiale i form af en



Figur 8.1: Magnetiseringsstrøm på overfladen af en magnetiseret cylinder.

cylinder med længde ℓ og tværsnit S . Materialet har en homogen magnetisering $\mathbf{M}$ i cylinderaksens retning. Det magnetiske moment af cylinderen er ifølge definitionen 8.2

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}\ell S. \quad (8.3)$$

Magnetiseringen skyldes de atomare kredsstrømme, hvoraf figuren antyder nogle få. I det indre af materialet og på endefladerne vil kredsstrømmene ophæve hinandens ydre virkninger, fordi der for ethvert strømelement findes et modsat rettet i et naboatom. På cylinderens krumme overflade sker der imidlertid ikke en sådan ophævelse med det resultat, at der på overfladen tilsyneladende er en kredsende strøm med en fladestrømtæthed, som vi kalder $\mathbf{j}_M$ (enhed Am^{-1}). Den samlede strøm, som krydser en frembringer i cylinderen er $i_M = j_M \ell$ og det magnetiske moment af denne kredsstrøm, som omslutter arealet S , bliver jvf. 6.37:

$$\mathbf{m} = (j_M \ell) \mathbf{S}. \quad (8.4)$$

Med 8.3 og 8.4 har vi nu to udtryk for $\mathbf{m}$ som, da $\mathbf{m}$, $\mathbf{M}$ og $\mathbf{S}$ er parallelle, kan skrives skalart

$$m = (j_M \ell) S = M(\ell S) \Rightarrow j_M = M. \quad (8.5)$$

Vi kan få rigtig retning på overflade-strømtætheden ved at indføre normalvektoren $\mathbf{n}$ i et vilkårligt punkt på cylinderfladen, idet

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad (8.6)$$

jvf. fig. 8.1. Denne relation er generelt gyldig, selv om den her er knyttet til et specielt tilfælde. I det følgende afsnit skal vi udlede relationen ved en korrekt vektoranalytisk metode og desuden vise, at når $\mathbf{M}$ er inhomogen, kan der desuden være en strømtæthed i det indre volumen. ◀

Vi har dermed sandsynliggjort, at der i forbindelse med magnetiserede materialer er to typer makroskopiske strømme, som bidrager til magnetfeltet: For det første sædvanlige strømme, eksempelvis i ledere, hvor der sker transport af ladning, og som vi derfor kan kalde *transportstrømme* (eller man kan tale om *fri strøm* i analogi med *fri ladning*). For det andet strømme på overflader og i volumener af magnetiseret materiale. Denne type strømme skyldes også bevægede ladninger, men disse er bundet til de individuelle atomer eller molekyler og giver ikke nogen netto transport af ladning. Vi kan kalde sådanne strømme for *magnetiserings-strømme* (eller man kan tale om *bunden strøm*).

Fra mikro- til makroskopisk strøm

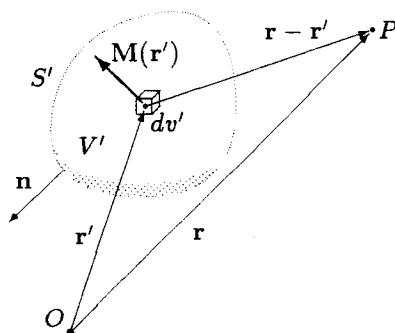
Fri og bunden strøm

8.2 Makroskopisk teori for magnetika

Når magnetiseringen $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ er kendt, kan man finde materialets bidrag til magnetfeltet i et målepunkt $\mathbf{r}$ i rummet ved integration af udtrykket 6.93 hen over det magnetiske materiales volumen.

Vektorpotential
beregnes

Vi skal her beregne feltet med en lidt anden metode, idet vi først beregner vektorpotentialet $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ og dernæst finder magnetfeltet som $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Metoden er parallel med den, vi anvendte i afsnit 3.2 for et dielektrikum, hvor vi først beregnede det skalare potential og dernæst den elektriske feltstyrke.



Figur 8.2: Beregning af magnetfeltet om et magnetiseret materiale.

Vi antager først, at målepunktet med stedvektor $\mathbf{r}$ ligger uden for materialet og overvejer siden situationen inde i materialet, hvor felterne kan være voldsomt fluktuerende, fuldstændig som i det dielektriske tilfælde.

Start med
én dipol

Vektorpotentialet fra en enkelt dipol $\mathbf{m}$ er givet ved 6.87. For den infinitesimale magnetiske dipol $\Delta \mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \Delta v'$ skriver vi udførligt dens bidrag til vektorpotentialet i $\mathbf{r}$ på formen

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Delta v'. \quad (8.7)$$

Vi har almindeliggjort udtrykket til at gælde for et vilkårligt nulpunkt O ved at indføre $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ (se fig. 8.2).

Det samlede vektorpotential i punktet $\mathbf{r}$ er integralet af bidragene fra alle dele af det magnetiserede materiales volumen V' , altså

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'. \quad (8.8)$$

Vektorregning
↓

Fysisk udtrykker 8.8 vektorpotentialet i målepunktet som en superposition af dipolpotentialer. Vi kan imidlertid nå frem til en alternativ fortolkning ved, som så ofte før, at omskrive med appendix A.40:

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (8.9)$$

hvorved integralet bliver

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (8.10)$$

På integranden anvender vi nu tabel A2:9 på formen

$$\mathbf{F} \times \nabla' \varphi = -\nabla' \times (\varphi \mathbf{F}) + \varphi \nabla' \times \mathbf{F}, \quad \mathbf{M} \equiv \mathbf{F}, \quad \varphi \equiv \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (8.11)$$

med resultatet

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (8.12)$$

Det første volumenintegral kan omskrives til et overfladeintegral ved hjælp af den sjældent benyttede integralsætning tabel A3:3, som giver

↑
Vektorregning

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (8.13)$$

hvor S' er den fysiske overflade af det magnetiserede materiale.

Hermed er vi nået frem til et udtryk som umiddelbart lader sig fortolke fysisk. Sammenligning med 6.60 viser nemlig, at det sidste integral kan opfattes som vektorpotential af en volumen-strømtæthed $\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')$ inden for det magnetiserede materiale. Tilsvarende må det første integral fortolkes, som vektorpotential fra en overflade-strømtæthed $\mathbf{j}_M(\mathbf{r}')$ på materialet. Altså

Magnetiseringsstrømme bestemt

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{J}_M = \nabla' \times \mathbf{M}. \quad (8.14)$$

Denne fortolkning er helt i overensstemmelse med den mere kvalitative indførelse af magnetiseringsstrømme i forrige afsnit.

Det samlede vektorpotential bliver summen af bidrag fra bundne og frie strømme. Tænk vi os frie strømme beskrevet ved volumenstrømtætheder $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ og eventuelt overfladestrømtætheder $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ (kan kun forekomme i perfekte ledere), bliver det samlede vektorpotential

Samlet vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{j} + \mathbf{j}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J} + \mathbf{J}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (8.15)$$

hvor integralerne nu udstrækkes over alle magnetiserede materialer og alle ledere.

Man kan finde $\mathbf{B}$ -feltet ved at foretage operationen $\nabla \times$ efter de umærkede koordinater og ved brug af tabel A2:9 på 8.15. Alternativt kan man anvende Biot-Savarts lov på formen 6.12 og den tilsvarende for overfladestrømme. I begge tilfælde bliver resultatet:

$\mathbf{B}$ -feltet

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_M) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_M) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'. \quad (8.16)$$

Udtrykkene 8.15 og 8.16 gælder strengt taget kun for punkter uden for materialerne. Ønsker man at beregne felterne i interne punkter, er det første spørgsmål: Konvergerer integralerne i det singulære punkt $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$? Integranderne i volumenintegralerne splitter op i tre komponenter, der er af samme type, som vi mødte ved beregning af feltstyrke og potential i elektrostatikken (sml. 2.17 og 2.43), og som vi fandt var integrable. Tilsvarende overbeviser man sig om, at $\mathbf{A}$ -feltet er defineret og kontinuert ved overfladen. Derimod

Felter i materialet

er $\mathbf{B}$ -feltet diskontinuert ved overfladen, hvilket vi senere skal vende tilbage til.

Middelfeltet

Det andet spørgsmål er: Hvilken fysisk betydning har de felter, man efter 8.15 og 8.16 beregner i interne punkter af materialet? På mikroskopisk skala varierer felterne i materialerne voldsomt, men med argumenter af samme art, som vi anvendte i afsnit 3.2, kan man vise, at de her beregnede udtryk for felterne inde i materialerne netop bestemmer middelværdierne af de fluktuerende felter. Udtrykkene kan således anvendes såvel indenfor som udenfor materialerne.

8.3 Gauss' og Ampères love i magnetika

Gauss' lov

Da $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ er det klart, at der også i magnetiske materialer gælder

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0. \quad (8.17)$$

Gauss' lov har altså helt samme form som i vacuum, jvf. 6.51 og 6.52.

*Ampères lov
i magnetika*

I Ampères lov 6.70 på formen $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ må vi imidlertid medtage magnetiseringsstrømmen. Forestiller vi os, at overfladestrømmen er fordelt over et tyndt, men endelig tykt overfladelag, kan vi matematisk inkludere den i $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$. Ampères lov bliver da:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0(\mathbf{J}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_M(\mathbf{r})). \quad (8.18)$$

Dette er en *lokal* lov, hvor distinktionen mellem $\mathbf{r}$ og $\mathbf{r}'$ bortfalder. Indfører vi her $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$ bliver

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}). \quad (8.19)$$

Vi kan altså skrive

$$\nabla \times \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right)}_{\mathbf{H}} = \mathbf{J}. \quad (8.20)$$

*En ny
feltvektor $\mathbf{H}$*

Vi har her indført en ny feltvektor, den *magnetiske feltstyrke* $\mathbf{H}$, defineret ved

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (8.21)$$

Enheden er $[H] = [M] = \text{Am}^{-1}$. Alternativt kan 8.21 skrives

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (8.22)$$

Betydningen af $\mathbf{H}$ -feltet ligger selvsagt i, at det alene er bestemt af de *frie* strømme. Det er i den henseende analogt med $\mathbf{D}$ -feltet, der alene bestemmes af de *frie* ladninger, som vi så det i afsnit 3.3. Anvendelse af $\mathbf{H}$ -feltet giver en væsentlig forenkling ved løsning af problemer vedrørende felter i og omkring magnetika.

Med den magnetiske feltstyrke kan Ampères lov skrives på den enkle form

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}.} \quad (8.23)$$

Dette udtryk er den almene statiske form af den 4. Maxwell ligning, som vi allerede tidligere har formuleret for vacuumtilfældet, sml. 6.74. Den tilsvarende integrale form af Ampères lov findes ved at anvende Stokes sætning på 8.23, altså

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{\ell} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{\ell} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (8.24)$$

eller

$$\boxed{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{\ell} = I,} \quad (8.25)$$

hvor I er den *frie* strøm, som passerer en flade S , der har kurven C som rand. Også dette udtryk stemmer helt overens med den tidligere version 6.75 for vacuum, men har nu fået et meget større gyldighedsområde.

Ampères lov

og 4. Maxwell ligning

8.4 Magnetiske materialer

Vi skal nu nærmere undersøge den magnetisering, som optræder, når et magnetikum udsættes for et ydre magnetfelt. Denne undersøgelse har formelt mange fælles træk med den tilsvarende for dielektrika i afsnit 3.4. I praksis kan der dog være betydelige forskelle, fordi man i de ferromagnetiske stoffer har en gruppe materialer med meget udprægede magnetiske virkninger, som ikke har nogen analogi blandt de dielektriske stoffer.

Som nævnt i indledningen er det materialets mikroskopiske opbygning af atomer og molekyler, der bestemmer dets magnetiske egenskaber. Til makroskopiske formål er det imidlertid, som for dielektrika, ofte tilstrækkeligt at kende nogle få empiriske relationer mellem feltstørrelserne i form af *materialeligninger*.

For en stor gruppe materialer, herunder alle de diamagnetiske og de paramagnetiske ved ikke for lave temperaturer, er der *proportionalitet* mellem magnetiseringen og den magnetiske feltstyrke $\mathbf{H}$. For disse *lineære* (og *isotrope*) materialer kan man skrive

$$\boxed{\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H},} \quad (8.26)$$

hvor den dimensionsløse konstant χ_m kaldes den *magnetiske susceptibilitet*. Man bemærker ligheden med (og forskellen fra) definitionsligningen 3.27 for den elektriske susceptibilitet. Mens elektriske susceptibiliteter altid er positive, kan magnetiske være både negative og positive. For faste stoffer er diamagnetiske susceptibiliteter i sagens natur negative af størrelsesordenen -10^{-5} , mens paramagnetiske er positive af størrelsesordenen 10^{-4} . Ferromagnetiske stoffer kan have meget store positive susceptibiliteter af størrelsesordenen 10^3 - 10^5 , men disse stoffer er som regel ikke lineære sådan, at χ_m ikke er en konstant.

Ligningerne 8.22 og 8.26 giver os en materialeligning, som forbinder $\mathbf{B}$ og $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}. \quad (8.27)$$

Materialets respons på felt

Lineære materialer

Magnetisk susceptibilitet defineret

Materialeligning

Permeabilitet Denne meget vigtige relation skrives oftest på formen

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

(8.28)

hvor konstanten

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

(8.29)

kaldes materialets *permeabilitet*. Permeabilitet har samme enhed som μ_0 , altså $[\mu] = \text{Hm}^{-1}$. Man anfører ofte den dimensionsløse *relative permeabilitet*, som er defineret ved

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m.$$

(8.30)

Værdier I tabel 8:1 er der samlet nogle værdier for den magnetiske susceptibilitet af diamagnetiske og paramagnetiske materialer.

Tabel 8.1: Magnetiske susceptibiliteter ved rumtemperatur

Diamagnetiske	χ_m	Paramagnetiske	χ_m
Hydrogen (NTP)	-2.1×10^{-9}	Oxygen (NTP)	2.1×10^{-6}
Nitrogen (NTP)	-5.0×10^{-9}	Magnesium	1.2×10^{-5}
Natrium	-2.4×10^{-6}	Aluminium	2.3×10^{-5}
Kobber	-1.0×10^{-5}	Wolfram	6.8×10^{-5}
Vismuth	-1.7×10^{-5}	Titanium	7.1×10^{-5}
Kviksølv	-3.2×10^{-5}	Platin	3.0×10^{-4}
Diamant	-2.2×10^{-5}	Gadoliniumklorid (GdCl_3)	2.8×10^{-3}

Kilde: Handbook of Chemistry and Physics (1980).

Hvis et magnetisk materiale er anisotropt, bliver susceptibilitet og permeabilitet erstattet af symmetriske tensorer i lighed med, hvad vi fandt for dielektrika i afsnit 3.4. Udtrykkene 8.26 og 8.28 er da fortsat gyldige, men vektorerne $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ og $\mathbf{M}$ vil i almindelighed ikke have samme retning.

Skønhedsfej! Ved sammenligning af udtrykkene i dette afsnit for magnetika med udtrykkene i afsnit 3.4 for dielektrika, ser man, at der er en vis usymmetri i definitionerne. Stillet op i parallelle ligninger har man således

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$$

(8.31)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

(8.32)

Denne usymmetri hænger sammen med den måde, felterne oprindeligt er defineret på og har således en historisk baggrund. Usymmetrien kan fjernes ved at indføre den *magnetiske polarisation* defineret som $\mathcal{J} = \mu_0 \mathbf{M}$. Der gælder da $\mathcal{J} = \chi_m \mu_0 \mathbf{H}$ og $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathcal{J}$, som er analoge til de dielektriske udtryk. Den magnetiske polarisation er imidlertid ikke magnetisk dipolmoment per volumen, og usymmetrien dukker alligevel op i andre formler. Der er derfor næppe nogen gevinst ved at anvende $\mathcal{J}$ i stedet for, som her, $\mathbf{M}$.

8.4.1 Ferromagnetika

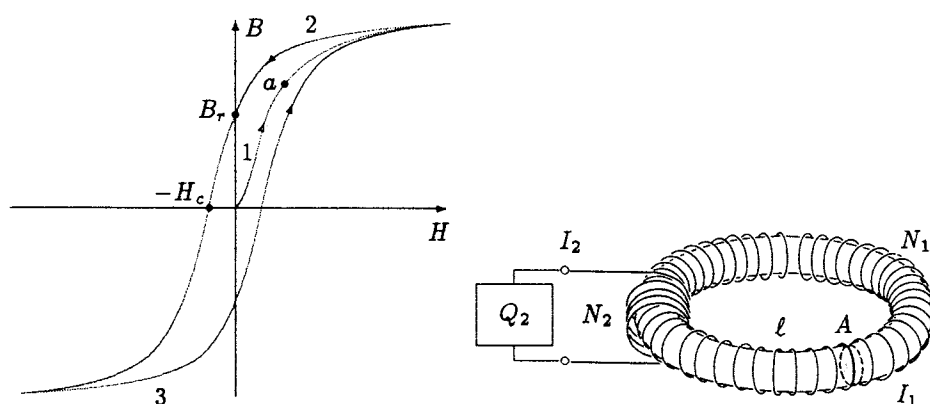
I praksis spiller ferromagnetiske stoffer en afgørende rolle på grund af deres store permeabilitet. Denne medfører efter 8.28 en meget høj fluxtæthed B for en given magnetisk påvirkning H , eksempelvis frembragt med en spole, som vist på fig. 8.12. Sammenhængen mellem H og B (eller mellem H og M) er imidlertid kompliceret, da den ikke blot afhænger af størrelsen af den magnetiske feltstyrke, men også af materialets magnetiske forhistorie. Man afbilder oftest disse sammenhænge på en kurve, som vist på fig. 8.3. Kurven kaldes det pågældende materiales *magnetiseringskurve* eller *hysteresekurve* (efter græsk *hysteresis*, at være bagefter).

▷ Bestemmelse af hysteresekurve: Forløbet af hysteresekurven for et materiale kan i princippet bestemmes med den på fig. 8.3b viste opstilling. Af materialet er tildannet en ringkerne med middelomkreds ℓ og tværsnitsareal

Vigtige materialer

Hysteres

Udmåling af HB-kurve



Figur 8.3: a) Hysteresekurve for et ferromagnetisk materiale. b) Princip til eksperimentel bestemmelse af hysteresekurve.

A. Denne kerne er beviklet med en spole 1 med N_1 vindinger og variabel strøm I_1 . Om kernen ligger desuden en sekundær spole 2 med N_2 vindinger. De to spoler passerer da af den samme flux $\Phi = BA$.

Lad os antage at kernen oprindelig er umagnetiseret og altså magnetisk befinder sig i punktet $(H, B) = (0, 0)$ på fig. 8.3a. Bringes strømmen op til værdien I_1 , kan den magnetiske feltstyrke i ringen, som jo alene bestemmes af den frie strøm i spole 1, bestemmes af Ampères lov:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\ell = N_1 I_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = \frac{N_1 I_1}{\ell}} \quad (8.31)$$

Idet kernen magnetiseres, induceres en elektromotorisk kraft $\mathcal{E}_2 = -d\Phi/dt$ i hver vinding af spole 2. Spolen indgår i et lukket kredsløb med resistans R_2 . Strømmen i dette kredsløb bestemmes, med passende valgt fortegn, af

$$I_2 = \frac{1}{R_2} N_2 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (8.32)$$

hvor R_2 antages så stor, at strømmen I_2 ikke virker tilbage på magnetiseringen. Den ladning Q_2 som passerer kreds 2, når strømmen i kreds 1 øges

fra 0 til I_1 , bliver

$$Q_2 = \int_0^t I_2 dt = \frac{N_2}{R_2} \Phi = \frac{N_2 A}{R_2} B \Rightarrow \boxed{B = \frac{R_2 Q_2}{N_2 A}} \quad (8.33)$$

Ladningen Q_2 er helt uafhængig af den måde, strømmen I_1 nås på, og kan løbende registreres med en såkaldt strømintegrator indskudt i kredsløb 2 (se fig. 8.3). Af de indrammede udtryk i 8.31 og 8.33 ses, at (H, B) -kurven kan beregnes ud fra sammenhørende værdier (I_1, Q_2) . ◁

Hysteresekurvens forløb

Remanens

Koercitivkraft

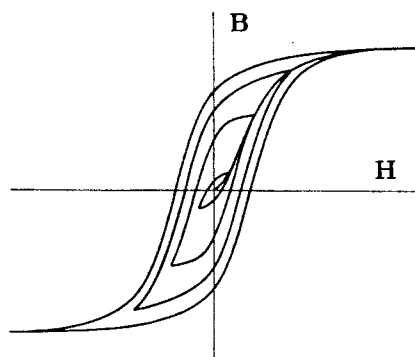
Forløbet af hysteresekurven på fig. 8.3 er typisk for hærdet stål. Fra begyndelsespunktet $(0, 0)$ vokser B -feltet langs kurve 1, først langsomt og siden hurtigere med voksende H . Kurven har en vendetangent og nærmer sig til slut asymptotisk en linie parallel med $B = \mu_0 H$. Man siger, at materialet *mætter*, hvilket fysisk betyder, at alle magnetiske dipoler er så ensrettede, som de kan blive. Det indledende kurveforløb 1 kaldes *jomfrukurven*. Når H igen reduceres, følger B en anden kurve 2 og bliver ikke nul for $H = 0$, idet materialet beholder en vis *remanent magnetisering* B_r . Påvirkes materialet derefter med en voksende, modsat rettet feltstyrke, forsvinder B -feltet efterhånden og bliver 0 for en vis værdi af $H = -H_c$, som kaldes *koercitivkraften*. Forøges den modsat rettede feltstyrke fortsat, følger kurve 2 negative B -værdier indtil mætning. Vendes H igen følges kurve 3, og man når det modsat rettede remanente felt B_r for $H = 0$ og dernæst den afmagnetiserede tilstand $B = 0$ for den modsat rettede koercitivkraft H_c . Yderligere forøgelse og reduktion af H til mætning giver nye gennemløb af hysteresekurven.

Afmagnetisering

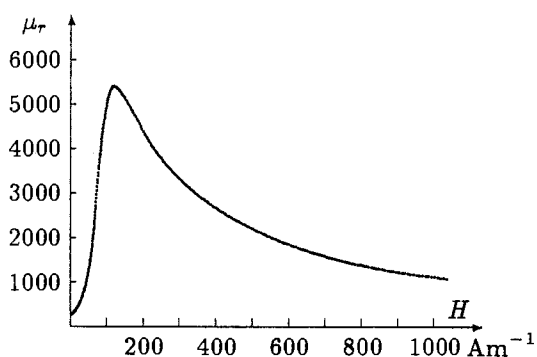
(H, M) -kurver

Punkterne på kurverne 1, 2 og 3 angiver dog ikke de eneste mulige magnetiseringstilstande (H, B) . Ethvert punkt inden for arealet begrænset af kurverne 2 og 3 er tilladt. Har man således nået punkt a på kurve 1, vil aftagende H give et B på en kurve, som ligger mellem kurverne 3 og 2. Vendes magnetiseringen før kurve 2 er nået, påbegyndes en ny, mindre hysteresekurve, som helt ligger inden for den oprindelige, som illustreret på fig. 8.4. På denne måde kan materialet afmagnetiseres, idet det anbringes i et kraftigt magnetisk vekselfelt, hvis amplitude gradvis reduceres.

Ofte tegner man i stedet for (H, B) -kurven en (H, M) -kurve, idet magnetiseringen M bestemmes af 8.27. Da H for det meste er væsentlig mindre end B/μ_0 , ligner disse kurver den på fig. 8.3, hvilket understreger, at der er tale om en kompliceret og bestemt ikke lineær sammenhæng mellem H og B eller mellem H og M . Alligevel kan det være bekvemt at tale om materialets



Figur 8.4: Hysteresekurver ved delvis magnetisering.



Figur 8.5: Relativ permeabilitet for udglødet jern.

eller mellem H og M . Alligevel kan det være bekvemt at tale om materialets permeabilitet. Den kan defineres som $\mu = B/H$ for punkter på jomfrukurven og bliver en funktion af feltet H , som vist på fig. 8.5. Ved brug af et passende μ kan bløde, ferromagnetiske materialer, inden for et begrænset magnetiseringsområde, tilnærmet behandles som lineære. For små ændringer anvendes den differentielle permeabilitet defineret som $\mu_d = dB/dH$ for punkter på jomfrukurven. Den er en funktion af H , som ligner fig. 8.5.

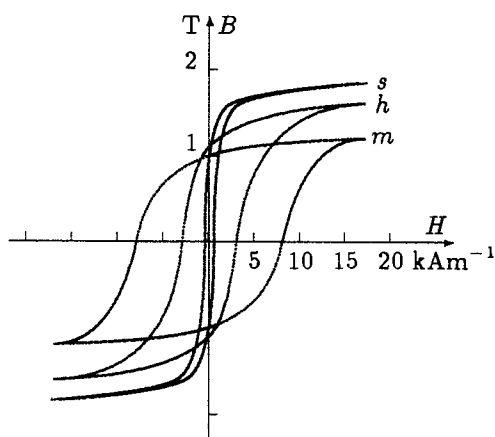
Permeabilitet af ulineære materialer

I kapitel 10 skal vi vende tilbage til hysteresekurven for ferromagnetiske materialer og vise, at det areal som indesluttet af hysteresekurven er et udtryk for et irreversibelt energitab for et fuldt gennemløb af kurven.

Ferromagnetiske materialer spiller en stor rolle i elektrotekniken, hvor de anvendes i transformatorer, motorer, relæer, laboratoriemagneter m.v. Ved legering af forskellige metaller og ved anvendelse af sintrede pulvere af oxyder har man fremstillet magnetiske materialer med meget forskellige magnetiske egenskaber, som illustreret på fig. 8.6.

Rent jern eller udglødet (blødt) jern har en smal og stejl hysteresekurve. Det giver høje fluxtætheder B for små feltstyrker H , dvs. ved anvendelse af få amperevindinger NI i en magnetiseringsvikling. Hærdet stål har en meget bredere hysteresekurve og specielle magnetstål en endnu bredere. Disse materialer er velegnede til fremstilling af permanente magneter (se afsnit 9.5.2), da de har en stor koercitivkraft og derfor ikke let mister den remanente magnetisering i et modfelt. Tabel 8.2 sammenfatter nogle egenskaber

Typer af magnetstål



Figur 8.6: Magnetiseringskurver for blødt jern (s), hærdet stål (h) og et permanent magnetstål (m).

Tabel 8.2: Egenskaber af nogle ferromagnetika ved rumtemperatur

Materiale	Sammensætning (vægt)	Mætning $\mu_0 M_{max}$ T	Koercitiv- kraft H_c Am^{-1}	Permea- bilitet μ_r, max $\times 10^3$
Grundstoffer:				
Jern	100 Fe	2.16	≈ 2	280
Cobolt	100 Co	1.79	≈ 150	0.15
Nikkel	100 Ni	0.61	≈ 20	1.12
Magnetisk bløde legeringer:				
Jern, udglødet	99.8 Fe	2.16	80	5
Siliciumjern	97 Fe 3 Si	2.02	56	8
Permalloy	55 Fe 45 Ni	1.60	5.6	50
Mumetal	14 Fe 5 Cu 4 Mo 77 Ni	0.73	1.1	175
Supermalloy	16 Fe 5 Mo 79 Ni	0.79	0.3	1000
Permanent magnet legeringer:		B_r		
Kulstofstål	99 Fe 1 C	0.90	4.1×10^3	
Cobolt stål	53 Fe 36 Co 4 W 6 Cr 1 C	0.98	19×10^3	
Alnico 5	8 Al 14 Ni 24 Co 3 Cu	1.25	49×10^3	
Sm-Cobolt	SmCo ₅	0.87	670×10^3	

Kilde: American Institute of Physics Handbook (1972).

hos ferromagnetiske materialer. Bemærk, at for bløde materialer er mætningsmagnetiseringen opgivet som $\mu_0 M$. Den tilhørende maximale fluxtæthed kan beregnes af 8.22, men leddet $\mu_0 H$ vil oftest være forsvindende. For permanent magnet legeringer angives den remanente magnetisering B_r . En fuldstændig karakterisering af ferromagnetiske materialer kræver dog væsentlig flere oplysninger end dem, der er indeholdt i tabel 8.2.

8.4.2 Induktans med magnetikum

I kapitel 7 og specielt i tabel 7.1 har vi angivet udtryk for induktansen af forskellige konfigurationer af ledere i luft eller vacuum. Disse udtryk kan som regel umiddelbart anvendes, når der er dia- eller paramagnetiske stoffer tilstede, langt fra mætning. Man erstatte da blot μ_0 med μ , hvilket dog kun har meget beskednen virkning på induktansen da $\mu \simeq \mu_0$.

For bløde ferromagnetiske stoffer der kan betragtes som tilnærmet lineære langt fra mætning kan samme metode anvendes, men her sker der en voldsom forøgelse af induktansen på grund af den meget høje permeabilitet af ferromagnetika. For stoffer med bred hysteresesløjfe er forholdene mere komplicerede, idet der her langt fra er proportionalitet mellem den ydre magnetiseringsstrøm og den magnetiske flux. Se også afsnit 10.6 for en diskussion af energiforholdene ved ommagnetisering.

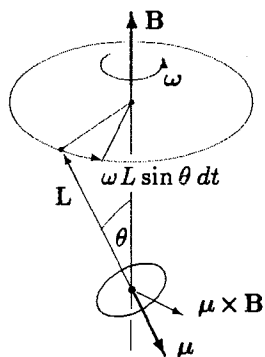
8.5 Mikroskopisk teori for magnetika

8.5.1 Diamagnetisme

Diamagnetismen i et materiale skyldes, at det ydre magnetfelt perturberer elektronbevægelsen i materialets atomer eller molekyler. Denne perturbation kan kun behandles fuldt korrekt ved kvantemekaniske metoder. Man kan dog få væsentlige træk frem, herunder et rigtigt udtryk for den diamagnetiske susceptibilitet, ved at følge en metode, som først blev benyttet af *Paul Langevin* (1872-1946) allerede i 1905, og en simpel model af et atom.

Vi betragter atomet som en kerne, hvormed der bevæger sig et antal elektroner i lukkede baner. Vi kan antage, at atomet har et lige antal elektroner, som i den umagnetiserede tilstand fylder banerne på en sådan måde, at det resulterende impulsmoment fra elektronernes banebevægelser og spin bliver

Simpel model



Figur 8.7: Diamagnetisme: En elektrons baneimpulsmoment præcesserer omkring retningen af et ydre magnetfelt, hvilket giver et resulterende magnetisk moment rettet mod feltet.

nul. Der er, som vi straks skal se, en lineær relation mellem impulsmomentet og det magnetiske moment, som da også bliver nul. Da atomerne således ikke har permanente magnetiske momenter, bliver materialet diamagnetisk.

Det magnetiske moment¹ μ fra banebevægelsen af en enkelt elektron kan vi finde af 6.38

$$\mu = \frac{I}{2} \oint \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\ell}, \quad (8.36)$$

hvor der integreres langs banen. Kredsstrømmen I er den ladning, som per tid passerer et bestemt punkt i banen, dvs. $I = -e/T$, hvor $-e$ er elektronladningen og T omløbstiden, og hvor elektronens bevægelse angiver den positive omløbsretning. Det magnetiske moment bliver da

Magnetisk moment

$$\mu = -\frac{e}{2T} \oint \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\ell} = -\frac{e}{2T} \int_0^T \mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} dt = -\frac{e}{2T} \int_0^T \mathbf{r} \times \mathbf{v} dt, \quad (8.37)$$

hvor $\mathbf{v}$ er elektronhastigheden. Betegner vi elektronmassen med m_e , bliver elektronens baneimpulsmoment $\mathbf{L} = m_e \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, som er konstant, da der er tale om en centralbevægelse. Heraf finder vi det bane-magnetiske moment

Gyromagnetisk koefficient

$$\mu = -\frac{e}{2T} \frac{\mathbf{L}}{m_e} \int_0^T dt = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L} = \gamma \mathbf{L}, \quad (8.38)$$

hvor $\gamma = -e/2m_e$ kaldes elektronens *gyromagnetiske koefficient*. Da γ er negativ, peger elektronens magnetiske moment modsat dens impulsmoment.

¹Trods risiko for forveksling med permeabilitet anvendes i dette afsnit, efter international standard, symbolet μ til at betegne partiklers magnetiske momenter.

Bohr
magneton

Selv om vi ikke direkte udnytter det her, kan man erindre, at impulsmomentet efter kvantemekanikken er kvantiseret i enheder af $\hbar$. Det magnetiske moment er da også kvantiseret i enheder, som bliver

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}. \quad (8.39)$$

Denne enhed kaldes 1 *Bohr magneton* og har i SI-systemet den numeriske værdi $9.273 \times 10^{-24} \text{ Am}^2$.

Larmor-
præcession

Vi tænker os nu, at atomet befinder sig i et ydre magnetfelt $\mathbf{B}$. Efter kvantemekanikken kan $\mathbf{L}$ ikke rette sig helt ind efter $\mathbf{B}$ -feltets retning, men vil danne en vinkel θ med denne. Banen vil derfor være påvirket af et kraftmoment $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$, som altid er vinkelret på $\mathbf{L}$. Kraftmomentet får $\mathbf{L}$ til at præcessere omkring retningen af $\mathbf{B}$ efter bevægelsesligningen

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \quad (8.40)$$

Vinkelhastigheden ω i præcessionen bestemmes af

$$\omega L \sin \theta dt = \mu B \sin \theta dt = -\gamma L B \sin \theta dt, \quad (8.41)$$

som, med den gyromagnetiske koefficient indsat, giver

$$\omega = \frac{eB}{2m_e}. \quad (8.42)$$

Larmor-
frekvens

Dette fænomen kaldes *Larmorpræcession*, og frekvensen 8.41 betegnes som systemets *Larmorfrekvens*. Betragtet som vektor er vinkelhastigheden ω ensrettet med feltet $\mathbf{B}$ og den samme for alle elektronbaner.

Inertimoment

Larmorpræcessionen giver hver elektron, og dermed atomet, et ekstra impulsmoment $\mathcal{F}\omega$ i feltretningen, idet $\mathcal{F}$ er atomets inertimoment om denne retning. Kernens inertimoment er i denne sammenhæng forsvindende, men hver elektron bidrager med et inertimoment, som må bestemmes ved at midle over elektronens position i banen. Lægger vi en z -akse i feltretningen, bliver middelbidraget for den j 'te elektron $m_e(\langle x_j^2 \rangle + \langle y_j^2 \rangle)$. Atomets samlede inertimoment fås ved at summere over alle dets elektroner:

$$\mathcal{F} = \sum_j m_e(\langle x_j^2 \rangle + \langle y_j^2 \rangle). \quad (8.43)$$

Da elektronbanerne er tilfældigt orienterede i rummet, er de tre koordinater ligeberettigede. Ligger origo i kernen, og betegner r_j elektronens radius vektor, gælder det for middelværdierne over et stort antal atomer

$$\langle x_j^2 \rangle = \langle y_j^2 \rangle = \langle z_j^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r_j^2 \rangle. \quad (8.44)$$

Atomets middel-inertimoment om feltretningen bliver derfor efter 8.43

$$\mathcal{F} = \frac{2m_e}{3} \sum_j \langle r_j^2 \rangle, \quad (8.45)$$

og tilsvarende bliver atomets samlede impulsmoment fra præcessionen

Impulsmoment

$$\mathcal{J}\omega = \frac{eB}{3} \sum_j \langle r_j^2 \rangle. \quad (8.46)$$

Dette impulsmoment giver som før, jvf. 8.38, et magnetisk moment, som vi kalder μ_i , da der nu er tale om et *induceret* magnetisk moment:

Induceret magnetisk moment

$$\mu_i = \gamma \mathcal{J}\omega = -\mathbf{H} \frac{e^2 \mu_0}{6m_e} \sum_j \langle r_j^2 \rangle. \quad (8.47)$$

Vi har her erstattet $\mathbf{B}$ med $\mu_0 \mathbf{H}$, hvilket er tilladeligt, da de diamagnetiske effekter er små sådan, at $\mu \approx \mu_0$.

Magnetiseringen $\mathbf{M}$ kan nu bestemmes som magnetisk moment per volumen. Er der per volumen n atomer, bliver

$$\mathbf{M} = n\mu_i = \left(-\frac{ne^2 \mu_0}{6m_e} \sum_j \langle r_j^2 \rangle \right) \mathbf{H}. \quad (8.48)$$

Ifølge definitionen 8.26 bliver den diamagnetiske susceptibilitet derfor efter denne simple model:

Korrekt susceptibilitet

$$\chi_m = -\frac{ne^2 \mu_0}{6m_e} \sum_j \langle r_j^2 \rangle. \quad (8.49)$$

Dette træffer sig at være det samme resultat, som opnås fra kvantemekanikken. Man bemærker, at den diamagnetiske susceptibilitet altid er negativ, og at Plancks konstant ikke indgår. Kvantemekanikken er dog afgørende for præcessionens optræden og muliggør beregning af afstandskvadratets middelværdi for de enkelte elektrontilstande.

▷ Xenon atomets middeleradius: Ædelgasserne giver særlig rene eksempler på diamagnetisme. Den diamagnetiske susceptibilitet for Xe er således bestemt til $\chi_m = -24.6 \times 10^{-9}$ (NTP). I en idealgas er atomtætheden $2.69 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ (NTP). Formel 8.49 giver da $\sum \langle r_j^2 \rangle = 1.55 \times 10^{-19} \text{ m}^2$. Atomet har $Z = 54$ elektroner. Kaldes dets middelskvadratradius r_0^2 og sættes $Zr_0^2 = 1.55 \times 10^{-19}$ findes $r_0 = 0.536 \times 10^{-10} \text{ m}$, altså nær Bohr-radius $a_0 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ og i god overensstemmelse med resultatet af kvantemekaniske beregninger. ◁

Radius af et xenon atom

8.5.2 Paramagnetisme

Paramagnetisme optræder, når stoffets atomer har et permanent magnetisk moment. For eksempel vil atomer med et ulige antal elektroner have et sådant moment, fordi den ulige elektron i det mindste med sit spin bidrager til impulsmomentet og dermed til det magnetiske moment. En gas af frie natriumatomer er derfor paramagnetisk. Indgår atomer, som i fri tilstand har et magnetisk moment, imidlertid i en kemisk forbindelse og danner et molekyle, vil valenselektronerne som regel koble deres spin og baneimpulsmomenter sådan, at det samlede impulsmoment, og dermed det magnetiske moment, bliver nul. Dette er grunden til, at de fleste molekyler ikke har permanente magnetiske momenter. Kun enkelte gasser som NO eller NO₂,

Hvornår paramagnetisme?

der har en ulige elektron, er paramagnetiske. Ellers optræder permanente magnetiske momenter i sammensatte stoffer som regel kun, når disse indeholder atomer eller ioner med ufyldte *indre* elektronskaller, som ikke i samme grad påvirkes af omgivelserne. Sådanne ufyldte skaller optræder for overgangselementer i det periodiske system, dvs. for grundstoffer omkring jern, palladium og platin. Også de sjældne jordarters atomer har ufyldte indre elektronskaller og giver derfor permanente magnetiske momenter.

*Termisk
uorden*

Lad os nu se på et stof, det kan være en gas, en væske eller et fast stof, opbygget af atomer med permanente magnetiske momenter. Vi vil betragte atomerne som frie. Er der ikke noget ydre magnetfelt, vil de termiske bevægelser bevirke, at der bliver en helt tilfældig orientering af de magnetiske momenter μ sådan, at materialet optræder umagnetisk. Men er et ydre felt B tilstede, vil dipolerne imidlertid rette sig ind efter feltet, fordi den potentielle energi $U = -\mu \cdot B$ er lavest for parallel orientering. Ensretningen modvirkes dog stadigt af de termiske bevægelser. Ved den absolutte temperatur T er de termiske energier af størrelsesordenen kT , hvor k er Boltzmanns konstant. Det svarer ved rumtemperatur til omkring 0.025 eV. Den magnetiske energi μB derimod er, ved et felt på 1 T og et typisk magnetisk moment på 1 Bohr-magneton, kun 6×10^{-5} eV. Forholdet $\mu B/kT$ er altså kun omkring 0.002 således, at der er rigelig termisk energi til, at vekselvirkninger af forskellig art kan forstyrre den magnetiske ensretning.

*Statistisk
fordeling*

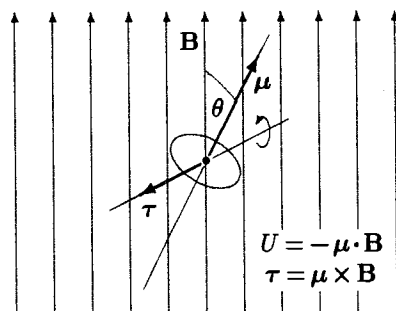
Der vil dog stadig være en vis overvægt af ensrettede momenter. Den statistiske mekanik fortæller, at i termisk ligevægt ved temperaturen T er sandsynligheden for at finde et atom med energien E proportional med $e^{-E/kT}$. Energien E er total energi, altså summen af kinetisk og potentiel energi, men da den kinetiske (termiske) energi i middel er den samme for alle atomerne, er det tilstrækkeligt at medtage den potentielle energi U . De statistiske sandsynligheder bliver da proportionale med $e^{-U/kT}$ og er altså størst, når U er mest negativ, dvs. når det magnetiske moment peger i feltretningen.

Klassisk teori

Vi kan først behandle situationen efter den klassiske fysik, som det blev gjort af *P. Langevin* i 1905. Et atomart magnetisk moment μ , som danner vinklen θ med feltretningen, har en potentiel energi $U = -\mu B \cos \theta$. Indsættes dette i den statistiske fordelingslov, får man et udtryk for den relative sandsynlighed for, at momentet peger i θ -retningen. For antallet dn af atomer per volumen med moment i denne retning kan vi skrive

$$dn = C e^{\mu B \cos \theta / kT} 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (8.50)$$

hvor $2\pi \sin \theta d\theta$ er rumvinklelementet og C en normeringskonstant, som er



Figur 8.8: Magnetisk dipol i ydre felt.

bestemt ved, at integration af 8.50 over alle vinkler skal give antallet n af atomer per volumen. Indfører vi betegnelsen $y = \mu B/kT$ giver integrationen

Normering

$$n = 2\pi C \int_0^\pi e^{y \cos \theta} \sin \theta d\theta = \frac{2\pi C}{y} \left[-e^{y \cos \theta} \right]_0^\pi = \frac{2\pi C}{y} [e^y - e^{-y}], \quad (8.51)$$

hvoraf vi finder C :

$$C = \frac{ny}{2\pi} \frac{1}{e^y - e^{-y}}. \quad (8.52)$$

Vi kan nu beregne det samlede magnetiske moment af de n atomer, dvs. magnetiseringen M . Det er kun komponenterne $\mu \cos \theta$ i feltretningen, som bidrager, da komponenterne vinkelret herpå midler ud, se fig. 8.8. Med brug af 8.50 kan vi altså skrive

Magnetisering beregnes

$$M = \int_0^\pi \mu \cos \theta \frac{dn}{d\theta} d\theta = 2\pi \mu C \int_0^\pi \cos \theta e^{y \cos \theta} \sin \theta d\theta. \quad (8.53)$$

Ved udførelse af integrationen og indsætning af C efter 8.52 får man

$$M = n\mu \left[\frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} - \frac{1}{y} \right], \quad (8.54)$$

som mere kompakt kan skrives

$$M = n\mu \left[\coth y - \frac{1}{y} \right]. \quad (8.55)$$

Funktionen $L(y) = \coth y - 1/y$ kaldes *Langevins funktion*. Dens udseende fremgår af fig. 8.9, som tydeligt viser mætningen ved store værdier af y .

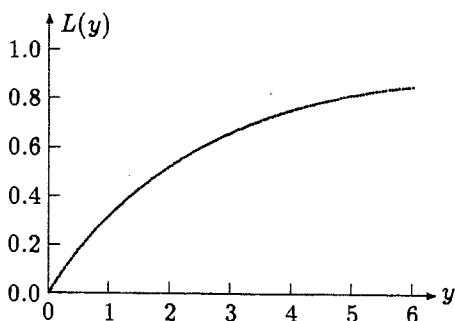
Langevins funktion

Som tidligere sagt er forholdet $y = \mu B/kT$ ved sædvanlige temperaturer og felter en meget lille størrelse. Det kræver derfor meget lave temperaturer og (eller) meget høje felter at observere mætningen. Under de fleste forhold er det nok at betragte den første del af kurven, som svarer til $y \ll 1$. Vi kan da rækkeudvikle Langevin-funktionen ved at benytte $\coth y = 1/y + y/3 - y^3/45 + \dots$, hvilket til laveste orden i y og med y indsat giver

Mætning ved lav temperatur

$$M = \frac{1}{3} n\mu y = \frac{n\mu^2}{3kT} B = \frac{n\mu^2 \mu_0}{3kT} H, \quad (8.56)$$

hvor vi har benyttet $B = \mu_0 H$. Den eksperimentelt fundne linearitet 8.26 mellem magnetisering og påtrykt felt er her altså teoretisk bekræftet.



Figur 8.9: Langevins funktion $L(y)$ viser den paramagnetiske magnetisering som funktion af parameteren y , som er proportional med det magnetiserende felt.

Susceptibilitet
beregnet

Ved brug af definitionen 8.26 finder vi den paramagnetiske susceptibilitet

$$\chi_m = \frac{n\mu^2\mu_0}{3kT}, \quad (8.57)$$

hvor μ som sagt er det magnetiske moment af hvert atom og n antallet af atomer per volumen. Den her beregnede teoretiske susceptibilitet aftager omvendt proportionalt med den absolutte temperatur i overensstemmelse med en lov, som eksperimentelt blev fundet af *P. Curie*.

Kvanteteori

De fleste træk af den klassiske behandling af paramagnetismen genfindes i kvantemekanikken. Der er dog den afgørende forskel, at impulsmomentet klassisk kan antage en hvilken som helst værdi, mens det i kvantemekanikken er kvantiseret. Desuden har elektronen et spin, som er et indre impulsmoment med et dertil knyttet magnetisk moment, som ikke har nogen klassisk analogi. Vi skal her kort se på nogle konsekvenser af disse forskelle.

Kvantisering
af impuls-
moment

Efter kvantemekanikken har (elektronsystemet i) et atom et totalt impulsmoment $\mathbf{J}$. I mange tilfælde er det en fysisk god approximation at skrive $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, hvor $\mathbf{L}$ er summen af elektronernes bane-impulsmomenter og $\mathbf{S}$ summen af deres spin-impulsmomenter. Kun elektroner i ufyldte skaller bidrager til disse summer, da det totale impulsmoment for en lukket skal er nul. Størrelsen af bane-impulsmomentet er bestemt ved $\mathbf{L}^2 = \hbar^2 L(L+1)$, hvor kvantetallet L afhænger af atomets kvantetilstand og har en af de mulige værdier $L = 0, 1, 2, \dots$. For spin-impulsmomentet er tilsvarende $\mathbf{S}^2 = \hbar^2 S(S+1)$, hvor spinkvantetallet S har heltallige eller halvtallige værdier afhængigt af, om elektronantallet er lige eller ulige. Det totale impulsmoments størrelse er bestemt ved $\mathbf{J}^2 = \hbar^2 J(J+1)$. Kvantetallet J for totalt impulsmoment kaldes ofte, lidt løst, for atomets 'spin'. Det karakteriserer det pågældende atoms kvantetilstand og har en af de heltallige eller halvtallige værdier $J = L+S, L+S-1, \dots, |L-S|$. Impulsmomentets projektion J_z ind på en vilkårlig z -akse er også kvantiseret og har en af de $2J+1$ værdier $J_z = -J\hbar, (-J+1)\hbar, \dots, (J-1)\hbar, J\hbar$.

Kvantisering
af magnetisk
moment

Til det totale impulsmoment $\mathbf{J}$ er der knyttet et magnetisk moment $\boldsymbol{\mu}$, som er middelværdien $\langle \boldsymbol{\mu}_J \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}_L + \boldsymbol{\mu}_S \rangle$. I lighed med 8.38 finder man, at der er proportionalitet mellem impulsmomentet $\mathbf{J}$ det magnetiske moment, som derfor bliver kvantiseret. Man skriver

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{J} = -g \frac{e}{2m_e} \mathbf{J}, \quad (8.58)$$

hvor den gyromagnetiske koefficient γ nu indeholder den dimensionsløse *g-faktor*. I fuld overensstemmelse med det klassiske resultat 8.38 er $g = 1$ for en ren banebevægelse, dvs. for spinløse elektroner. For en ren spinbevægelse er $g = 2.0023$, der i denne sammenhæng kan tages som $g = 2$. For den sammensatte bevægelse af elektronerne i et atom ligger g mellem disse værdier og kan skrives som

Landé-faktor

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \quad (8.59)$$

Dette udtryk kaldes *Landé-faktoren*.

Efter dette sammendrag af vigtige resultater fra kvantemekanikken kan vi gå videre med kvantiseringen af magnetisk moment. Vi vælger igen z -aksen i retningen af det ydre felt B . Da projektionen J_z af $\mathbf{J}$ er kvantiseret, bliver også det magnetiske moments projektion μ_z kvantiseret. Efter 8.58 har vi

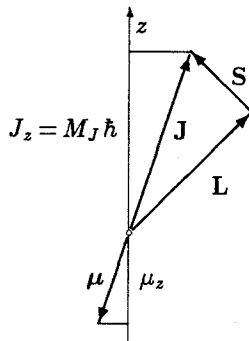
Kvantisering af μ_z

$$\mu_z = -g_J \frac{e}{2m_e} J_z. \quad (8.60)$$

Her kan man indføre det *magnetiske kvantetal* M_J som har en af de $2J + 1$ værdier $M_J = -J, (-J + 1), \dots, (J - 1), J$ sådan, at $J_z = M_J \hbar$. Yderligere kan vi indføre Bohr-magnetonen $\mu_B = e\hbar/2m_e$ og skrive

$$\mu_z = -M_J g_J \mu_B. \quad (8.61)$$

Figur 8.10 illustrerer kvantiseringen af J_z og μ_z i en vektormodel for atomet.



Figur 8.10: Kvantisering af impuls-moment og magnetisk moment efter vektormodellen.

Vi er nu klar til at beregne den magnetiske dipols potentielle energi i det ydre felt. Energien afhænger af dipolens orientering, det vil sige af kvantetallet M_J , og kan skrives

Kvantisering af energi

$$U_M = -\mu \cdot B = -\mu_z B = M_J g_J \mu_B B. \quad (8.62)$$

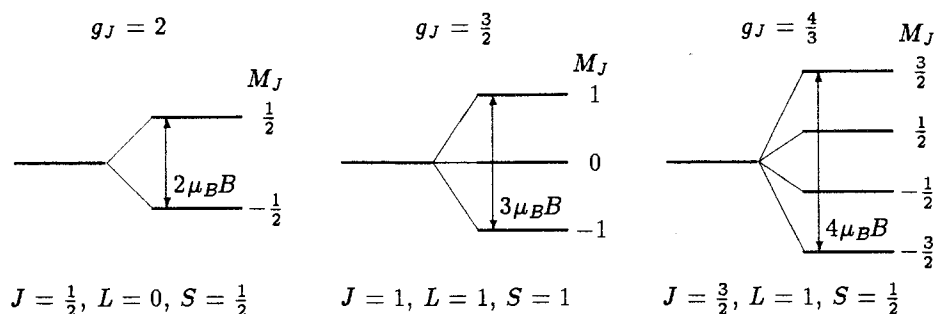
Energien har en af de $2J + 1$ forskellige værdier, som svarer værdierne af M_J og er proportional med fluxtætheden B .

Hermed har vi dannet os et billede af atomets potentielle energi i det ydre magnetfelt. Er det ydre felt nul, er den potentielle energi også nul, og de $2J + 1$ energitilstande er i kvantemekanikens sprog *udartede*. Under indflydelse af feltet spalter den udartede tilstand op i *magnetiske undertilstande*. Tilstandene med negativt M_J ('spin ned') har den laveste energi, da det magnetiske moment her er mest rettet ind efter feltet. Effekten kaldes *Zee-mann effekt* og er illustreret på fig. 8.11 for tilfælde med $J = 1/2, 1$ og $3/2$. Opsplitningen er proportional med B , men den viste sammenhæng gælder kun for felter, som ikke er stærke nok til at forstyrre elektronernes bevægelse i atomet og dermed ændre dets oprindelige magnetiske moment.

Magnetiske undertilstande

Som i det klassiske tilfælde vil de tilstande, hvor det magnetiske moment peger i feltretningen, være energetisk foretrukne, og der vil derfor være en tendens til magnetisk ensretning. Denne tendens modvirkes af de termiske bevægelser, men dog således, at der befinder sig flere atomer i tilstande med spin ned end i tilstande med spin op. Vi kan igen inddrage den statistiske fordelingsfunktion $e^{-U/kT}$ og beregne populationen af de magnetiske

Statistisk fordeling



Figur 8.11: Et atom i et ydre magnetfelt B har $2J + 1$ mulige værdier for den potentielle energi. Energiopsplitningen er for små felter proportional med B .

undertilstande og derefter magnetiseringen som det resulterende magnetiske moment i feltretningen for n atomer. For et vilkårligt J bliver de nødvendige summationer over tilstandene lidt besværlige, men vi kan få de væsentlige træk frem ved at se på kun to magnetiske undertilstande.

*Eksempel med
to tilstande*

Som et konkret eksempel tager vi et atom med en enkelt elektron uden for en lukket skal, hvor den befinder sig i en tilstand med $L = 0$, se første diagram på fig. 8.11. I dette tilfælde er $J = S$ og det magnetiske moment skyldes alene elektronen. Vi har da $g_J = g_S = 2$ og kun to magnetiske undertilstande med $M_J = \pm 1/2$. Vi kan mærke spin op tilstanden med $+$ og spin ned tilstanden med $-$. Komposanterne af det magnetiske moment efter z bliver da efter 8.61:

$$\mu_+ = -\mu_B, \quad \mu_- = \mu_B, \quad (8.63)$$

mens de potentielle energier efter 8.62 bliver

$$U_+ = \frac{1}{2} \cdot 2\mu_B B = \mu_B B, \quad U_- = -\frac{1}{2} \cdot 2\mu_B B = -\mu_B B. \quad (8.64)$$

Den statistiske sandsynlighed for, at et atom befinder sig i de to tilstande er proportional med $e^{\mp\mu_B B/kT}$. Indfører vi betegnelsen $y = \mu_B B/kT$, kan vi skrive antallet af atomer per volumen i de to tilstande som

$$n_+ = C e^{-y}, \quad n_- = C e^y, \quad (8.65)$$

hvor konstanten C er bestemt ved, at der ialt skal være n atomer per volumen, altså

$$n = n_+ + n_- = C(e^{-y} + e^y) \Rightarrow C = \frac{n}{e^y + e^{-y}}. \quad (8.66)$$

Med populationerne af undertilstandene bestemt, kan vi beregne middelværdien af det magnetiske moment i feltretningen, som bliver

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{-\mu_B n_+ + \mu_B n_-}{n}. \quad (8.67)$$

Vi er interesserede i at beregne magnetiseringen, som er det magnetiske moment per volumen af materialet og bliver $M = n\langle\mu_z\rangle$. Efter indsætning af 8.65 og 8.66 finder vi

*Magnetisering
efter kvante-
mekanik*

$$M = n\mu_B \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}, \quad (8.68)$$

som mere kompakt, og med y indsat, kan skrives

$$M = n\mu_B \operatorname{tgh} \frac{\mu_B B}{kT}. \quad (8.69)$$

Dette er et korrekt kvantemekanisk udtryk for den paramagnetiske magnetisering af uafhængige atomer med $J = 1/2$.

Ser man tilbage på det klassiske resultat 8.55, tager udtrykkene sig umiddelbart forskellige ud. Forskellen er dog i virkeligheden ikke stor. I det klassiske udtryk betyder μ^2 kvadratet på størrelsen af det magnetiske moment. Efter 8.58 kan vi i kvantemekanikken skrive

Stemmer det?

$$\mu^2 = \gamma^2 \mathbf{J}^2 = g_J^2 \mu_B^2 J(J+1). \quad (8.70)$$

Vi kan indsætte dette i udtrykket 8.57 for den klassiske susceptibilitet, som ved denne 'efter-kvantisering' bliver

$$\chi_m = \frac{n\mu_0 g_J^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3kT}. \quad (8.71)$$

Dette er faktisk det korrekte kvantemekaniske udtryk for susceptibiliteten langt fra mætning, dvs. $y = \mu_B/kT \ll 1$, og for vilkårligt J . Vi kan kontrollere i eksemplet med to tilstande, hvor $J = 1/2$. Til lavest orden kan $\operatorname{tgh} y$ erstattes med y sådan, at magnetiseringen efter 8.69 bliver

*Korrekt
susceptibilitet*

$$M = \frac{n\mu_B^2 B}{kT} = \frac{n\mu_B^2 \mu_0 H}{kT}. \quad (8.72)$$

Hertil svarer den kvantemekaniske susceptibilitet

$$\chi_m = \frac{n\mu_B^2 \mu_0}{kT}, \quad (8.73)$$

hvilket netop er resultatet fra 8.71 med $g_J = 2$ og $J = 1/2$. Det kan yderligere bemærkes, at det klassiske Langevin-udtryk for store y konvergerer mod $\operatorname{tgh} y$ i overensstemmelse med 8.69. Derimod giver en efterkvantisering af 8.55 ikke den rigtige magnetisering ved mætning. En fuldt gennemført kvantemekanisk beregning giver, i overensstemmelse med de experimentelle resultater, en mætningsmagnetisering på $g_J \mu_B J$ og ikke $g_J \mu_B \sqrt{J(J+1)}$.

8.5.3 Ferromagnetisme

Ferromagnetisme er en stærk effekt

Diamagnetisme og paramagnetisme er svage effekter med få anvendelser. I sammenligning hermed er ferromagnetismen et dramatisk fænomen, som har den allerstørste praktiske betydning, da den elektriske teknologi er stærkt betinget af, at der findes et billigt og let tilgængeligt metal med denne særlige egenskab. Fra et teoretisk synspunkt har ferromagnetismen imidlertid voldt mange vanskeligheder, og det er først i de seneste årtier, at man har nærmet sig en kvantitativ forståelse af fænomenet.

Vekselvirkninger

Ved diskussionen af paramagnetismen antog vi, at vekselvirkninger mellem naboatomer kunne negligeres. Men ferromagnetismen er netop betinget af sådanne vekselvirkninger, som er af to typer: 1) Den magnetiske vekselvirkning mellem to dipoler og 2) En særlig kvantemekanisk udvekslingskraft mellem elektroner i forskellige paramagnetiske atomer. Denne vekselvirkning er beslægtet med dem, som giver anledning til kemisk binding.

Vekselvirkninger af typen 1) er svage. Det er de langt stærkere vekselvirkninger af typen 2), som giver anledning til ferromagnetismen der således, som de andre former for magnetisme, er en kvanteeffekt. Vi kan ikke her gennemføre en egentlig kvantemekanisk behandling, som selv i bedste tilfælde er en kompliceret sag, men blot omtale nogle vigtige elementer, som indgår.

Udvekslingskraften

Vi skal først beskrive den kvantemekaniske effekt, der, med en ikke helt heldig betegnelse, kaldes *udvekslingskraften* og som først blev foreslået af W. Heisenberg i 1928. Vi betragter indledningsvis to elektroner 1 og 2 i samme atom og ser bort fra elektronernes spin og deres indbyrdes elektrostatiske frastødning. Elektronerne er da uafhængige. Elektron 1, som befinder sig i kvantetilstand a , beskrives ved en bølgefunktion $u_a(\mathbf{r}_1)$ og elektron 2 i kvantetilstand b ved en bølgefunktion $u_b(\mathbf{r}_2)$.

Identiske elektroner

Nu er de to elektroner identiske og kan kvantemekanisk ikke skelnes fra hinanden. I formalismen sikres dette ved, at det samlede system af de to elektroner beskrives ved en bølgefunktion $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, som er enten *symmetrisk* eller *antisymmetrisk* over for en ombytning af de to elektroners rumlige koordinater. Det vil sige

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \pm \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (8.74)$$

Symmetri

Absolutkvadratet på denne bølgefunktion giver sandsynligheden for at finde elektron 1 i $\mathbf{r}_1$ og elektron 2 i $\mathbf{r}_2$ og ses at være uændret ved ombytning af de to elektroners koordinater. For de to uafhængige elektroner bliver bølgefunktionen af simpel produkttype, nemlig den symmetriske kombination

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)_S = \frac{1}{\sqrt{2}}[u_a(\mathbf{r}_1)u_b(\mathbf{r}_2) + u_b(\mathbf{r}_1)u_a(\mathbf{r}_2)], \quad (8.75)$$

Antisymmetri

og den antisymmetriske kombination

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)_A = \frac{1}{\sqrt{2}}[u_a(\mathbf{r}_1)u_b(\mathbf{r}_2) - u_b(\mathbf{r}_1)u_a(\mathbf{r}_2)]. \quad (8.76)$$

I disse udtryk sikrer faktoren $1/\sqrt{2}$, at ψ er normeret, dersom u_a og u_b er normerede og ortogonale. Man bemærker dog, at når de to tilstande a og

b er identiske, forsvinder den antisymmetriske kombination således, at kun den symmetriske kombination, som bliver $u_a(\mathbf{r}_1)u_a(\mathbf{r}_2)$, er mulig.

De to elektroner er fermioner, som følger *Pauliprincippet* og som efter kvantemekanikken må beskrives ved en *total* bølgefunktion, som er antisymmetrisk. Bølgefunktionen forsvinder da, hvis de to enkelt-elektrontilstande er identiske: Der kan ikke være mere end én elektron i hver kvantetilstand.

Pauliprincippet

Den totale bølgefunktion er et produkt af en (symmetrisk eller antisymmetrisk) rumlig bølgefunktion af typen 8.75 eller 8.76 og en *spinbølgefunktion*. Spinbølgefunktionens nærmere struktur behøver vi ikke at inddrage her, men kan blot notere, at den er symmetrisk ved partikelombytning, når de to elektroners spin er parallelle ($\uparrow\uparrow$, triplet tilstand $S = 1$). Tilsvarende er spinbølgefunktionen antisymmetrisk for antiparallele spin ($\uparrow\downarrow$, singlet tilstand $S = 0$).

Spin indføres

Da den totale bølgefunktion skal være antisymmetrisk, må der til singlet tilstanden $S = 0$ svare en symmetrisk rumlig bølgefunktion. Tilsvarende har triplet tilstande $S = 1$ en antisymmetrisk rumlig bølgefunktion. Betegner vi spinbølgefunktionerne med χ_A og χ_S , kan vi altså skrive

*Total
bølgefunktion*

$$\psi_{tot} = \psi_S \chi_A \quad (\uparrow\downarrow, S = 0), \quad (8.77)$$

$$\psi_{tot} = \psi_A \chi_S \quad (\uparrow\uparrow, S = 1). \quad (8.78)$$

Hermed er der etableret en korrelation mellem spinnenes indbyrdes orientering og bølgefunktionens rumlige symmetriegenskaber. Dette har betydning for atomets energi. Atomet består af et antal elektroner i lukkede skaller, som vi i denne sammenhæng kan se bort fra, da de ikke bidrager til atomets impulsmoment eller magnetiske moment. Det afgørende er de delvis fyldte skaller. For grundstofferne i jerngruppen drejer det sig om den såkaldte *3d*-skal, hvor elektronerne har baneimpulsmoment $l = 2$, og som ialt kan rumme 10 elektroner. I jern rummer *3d*-skallen 6 elektroner.

For at få det principielle frem indskrænker vi os til blot to elektroner i en ufyldt skal. Elektronernes binding (negativ energi) skyldes det stærke centralfelt fra kernen, men bindingen nedsættes på grund af elektronernes indbyrdes frastødning, som giver et positivt bidrag til energien.

*Elektronernes
vekselvirkning*

Lad os først se på parallelle spin, altså situationen 8.78. Den antisymmetriske bølgefunktion ψ_A udelukker da, at de to elektroner befinder sig i samme rumlige punkt (se 8.76), og vil være næsten 0 når elektronerne er nær hinanden. Funktionen ψ_A beskriver således en situation, hvor elektronerne fortrinsvis er langt fra hinanden. Deres indbyrdes frastødning bliver derfor lille, og det tilsvarende bidrag til energien, som er proportionalt med $e^2/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, bliver derfor også lille. Er omvendt spinnene antiparallele, har vi situationen 8.77. Den symmetriske rumlige bølgefunktion udelukker ikke, at elektronerne kommer hinanden nær, og energibidraget fra frastødningen bliver stort.

Resultatet af disse overvejelser er således, at parallelle spin, $\uparrow\uparrow$ $S = 1$, giver en mindre energi end antiparallele spin, $\uparrow\downarrow$ $S = 0$. Tilstanden med lavest energi bliver atomets grundtilstand og svarer altså til parallelle spin med et dertil knyttet magnetisk moment. Dette er en klar paramagnetisk situation, og stemmer med den empiriske *Hund's regel*, som siger, at grundtilstanden har det størst mulige S , som er foreneligt med udelukkelsesprincippet.

$\uparrow\uparrow$ i
grundtilstand

*Spin-spin
vekselvirkning*

Man kan fortolke situationen sådan, at der mellem to elektroner virker en kraft med et kraftmoment, som søger at ensrette spinnene og derved nedsætte energien. Ved den videre matematiske behandling kan man derfor formelt indføre en vekselvirkningsenergi W_{12} mellem et par af elektroner med spin s_1 og s_2 som

$$W_{12} = -2\mathcal{J}s_1 \cdot s_2, \quad (8.79)$$

hvor $\mathcal{J}$ kaldes udvekslingsenergien. Hvis $\mathcal{J}$ er positiv, tager det sig ud, som om der er en 'tiltrækkende' vekselvirkning mellem parallelle spin. Som vi har set, er vekselvirkningen dog en konsekvens af bølgefunktionens rumlige symmetriforhold, som for parallelle spin reducerer den elektrostatiske frastødning mellem elektronerne. Bølgefunktionen er fremkommet ved ombytning af partikelkoordinater, hvilket forklarer, at man taler om 'udvekslingskræfter', selv om der ikke er tale om, at partiklerne bytter plads.

*Ferromagne-
tisme er
kollektiv*

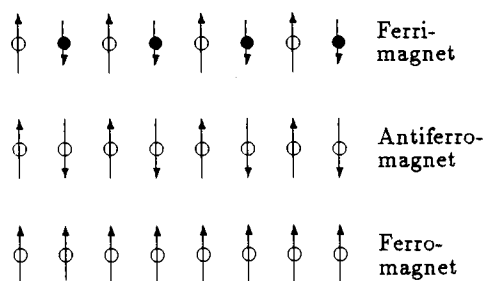
De foregående betragtninger forklarer paramagnetismen af de enkelte atomer. Men ferromagnetismen er et *kollektivt* fænomen, som kun forekommer, når atomerne vekselvirker med hinanden i faste stoffer. En gas af jernatomer er ikke ferromagnetisk, men paramagnetisk, da de nødvendige vekselvirkninger mellem atomerne ikke er tilstede.

*Spontan
ensretning*

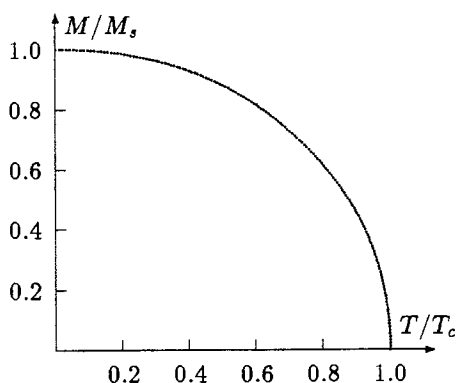
For at forstå ferromagnetismen må man forklare den spontane ensretning (dvs. uden ydre felt) af praktisk talt alle atomernes spin, og dermed deres magnetiske momenter. Hertil indrager man udvekslingskræfter mellem naboatomer. Disse kræfter fremkommer på samme måde, som beskrevet ovenfor for et par af elektroner og resulterer i en vekselvirkningsenergi mellem atomerne, som matematisk kan repræsenteres ved et udtryk af formen 8.79. Er $\mathcal{J}$ negativ får tilstanden med parallelle spin lavere energi end antiparallel tilstanden og vil derfor være energetisk favoriseret. Der er dog også kinetiske effekter, da den kinetiske energi vokser, når elektronerne adskilles. Så selv om udvekslingsenergien er af elektrostatisk natur, så påvirkes den af den kinetiske energi. Den samlede energi bliver derfor meget følsom for detaljer i elektronernes rumlige fordeling og dermed vanskelig at beregne. Det kan tilmed forekomme, at udvekslingsenergien bliver positiv. Den energetisk favoriserede tilstand er da antiparallele spin, hvilket giver anledning til fænomenerne *antiferromagnetisme* og *ferrimagnetisme*. Se fig. 8.12. Stoffer som MnO og FeO er antiferromagneter mens ferrimagneter (ferriter) er stoffer af typen MOFe_2O_3 hvor M er divalent Mn, Fe, Co, Ni, Cu og andre.

*Følsomt
fænomen*

Fuldstændig ensretning nås ved det absolutte nulpunkt, hvor den forstyrrende termiske påvirkning forsvinder. Øges temperaturen derfra forekommer der bølgeagtige forstyrrelser, som kaldes *spinbølger*. Ved Curietemperaturen er al orden forsvundet og magnetiseringen bliver nul. Se fig. 8.13.



Figur 8.12: I en ferromagnet er alle magnetiske momenter ensrettede og lige store. I en antiferromagnet alternerer lige store momenterets retning. I en ferrimagnet alternerer ulige store momenterets retning.



Figur 8.13: Spontan magnetisering ($H = 0$) af en ferromagnetisk krystal som funktion af temperaturen.

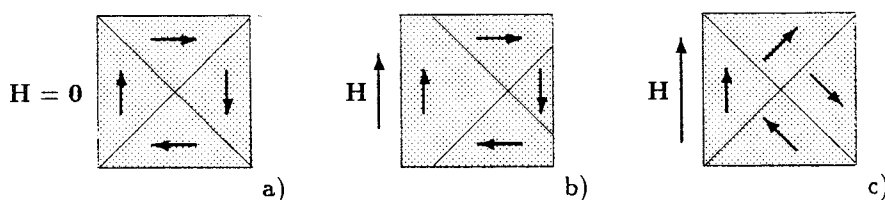
Da den ovenfor beskrevne magnetisering er spontan, kan man undre sig over, at ikke alle stykker jern er permanente magneter. Forklaringen er, at under Curietemperaturen er det magnetiske materiale opdelt i en række små områder, typisk med volumener på 10^{-8} – 10^{-12} m³ som rummer 10^{21} – 10^{17} atomer. Disse områder kaldes *domæner*. Forestillingen om domæner kan føres tilbage til *Pierre Weiss* (1907). Domænerne er virkelige og kan synliggøres ved en speciel teknik, hvor der udsprede en suspension af et meget fint jernpulver på den polerede magnetisk prøve. Pulveret vil samle sig langs domænernes skillelinier, som da kan iagttages i mikroskop.

Domæner

Indenfor hvert domæne er magnetiseringen homogen og har mætningsværdien M_s , men magnetiseringens retning skifter fra domæne til domæne, og den makroskopiske magnetisering bliver mindre end M_s og eventuelt nul. Magnetiseringen øges, når der påtrykkes et ydre felt $\mathbf{H}$, men det felt som kræves for at opnå fuldstændig mætning er stærkt afhængigt af materialet, sml. fig. 8.6.

Forekomsten af domæner hænger sammen med, at en opdeling af materialet er energetisk favorabel. Udvekslingskræfterne alene ville give total ensretning, men de har kun kort rækkevidde. Derfor kommer de svagere dipolkræfter (af typen 1) til at spille en rolle. Dipolkræfterne søger at stille atomspinnene modsat (sml. to ophængte stangmagneter) og arrangerer dipolerne i lukkede kæder, hvorved energien i det ydre felt minimaliseres. Domænerne påvirkes yderligere af den *anisotropi*, som forekommer i mange krystaller. Krystallens egenskaber er da retningsafhængige og det vil være lettere at magnetisere den i nogle retninger end i andre. Tages den samlede virkning af udvekslingskraft, dipolkraft og anisotropi i betragtning, får man

Hvorfor domæner?



Figur 8.14: Skematisk billede af domæner (trekanterne) i et ferromagnetisk materiale. a) Umagnetiseret. b) Magnetisering ved forskydning af domænevægge. c) Magnetisering ved ændring af domænernes orientering.

en opbrydning i domæner, som fortrinsvis er magnetiseret i en af de 'nemme' retninger. Går man fra et domæne til det næste sker der en voldsom ændring i magnetiseringens retning indenfor et atomart set snævert område, som kaldes domænevæggen.

*Hysteresens
forløb*

Forløbet af magnetiseringsprocessens første fase (jomfrukurven på fig. 8.3a), kan nu beskrives mikroskopisk ved hjælp af det forenkede billede på fig. 8.14. I den umagnetiserede tilstand er den ydre energi minimal, idet domænernes magnetiske momenter 'holder hinanden i halen' sådan, at prøvens ydre magnetiske moment bliver nul. Ved påvirkning af et svagt magnetfelt forskyder domænevæggen sig sådan, at de domæner, som er magnetiseret parallelt med det ydre felt vokser, mens de andre domæner formindskes. Ved påvirkning med stærkere felter forskydes domænevæggen helt ud af prøven, hvorpå det dannede enkelte domæne retter sig ind efter det ydre felt. Dette er en vanskeligt forløbende proces, fordi en række forhold som mekaniske spændinger, urenheder i materialet og hvirvelstrømme modsætter sig de ovenfor beskrevne ændringer, som bliver irreversible. Prøven nærmer sig kun derfor kun langsomt mætning.

Når dernæst det ydre felt reduceres gendannes domænerne, men især dem, som er magnetiseret i en retning nær retningen af det ydre felt. Også disse processer er vanskelige og irreversible og magnetiseringen ændrer sig kun lidt. Selv når det ydre felt er helt borte, er der en magnetisering vist som den remanente magnetisering B_r på fig. 8.3.

*Forstår man
ferromagne-
tismen?*

Denher givne kvalitative beskrivelse af de mikroskopiske forhold i en ferromagnet er langt fra udtømmende, f. eks. er ledningselektronernes mulige betydning ikke nævnt. Der findes omfattende teorier, som inddrager disse og andre forhold. Der synes dog stadig at være et stykke vej igen, før ferromagnetismen, som har været kendt i flere tusinde år, kan siges at være fuldt forstået.

Kapitel 9

Magnetostatik

Magnetostatik omhandler magnetfelter, som er konstante i tiden eller som i det mindste ændrer sig 'meget' langsomt. (Vi skal senere se, hvad dette betyder). Man kan tænke på magnetfelter fra stationære strømme eller fra permanente magneter i hvile. Magnetostatik har mange fælles træk med elektrostatik, og ofte kan løsninger fra det ene område overføres til det andet. Denne ekvivalens er dog af helt formel natur, da der i magnetostatikken ikke forekommer nogen størrelse, som svarer til fri elektrisk ladning.

Magnetostatikens område

9.1 Det magnetostatiske felt

Vi kender allerede de to fundamentale love for magnetfelter, som er udgangspunktet ved løsning af magnetostatiske problemer. For det første Gauss' lov eller 2. Maxwell ligning 8.17 skrevet på differentiell eller integral form

Grundlovene

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0. \quad (9.1)$$

For det andet Ampères lov eller 4. Maxwell ligning for stationære felter, 8.23 og 8.25

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \quad (9.2)$$

Til disse ligninger kan man føje kontinuitetsligningen, som i det statiske tilfælde blot bliver

Lukkede strømveje

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (9.3)$$

hvilket også umiddelbart indses ved at tage divergensen af 9.2. Denne betingelse betyder, at i det stationære tilfælde er $\mathbf{J}$ divergensfri sådan, at strøm-linierne må danne lukkede kurver eller forløbe i det uendelige.

I magnetostatiske problemer forekommer der ofte forskellige materialer. For at udnytte ligningerne 9.1-9.2 til beregning af felterne må man for hvert materiale kende relationen mellem den magnetiske fluxtæthed $\mathbf{B}$, den magnetiske feltstyrke $\mathbf{H}$ og magnetiseringen $\mathbf{M}$. Per definition (se 8.22) er

Feltet i materialer

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (9.4)$$

hvor $\mathbf{M}$ må opfattes som materialets respons på den ydre magnetiske påvirkning $\mathbf{H}$ sådan, at $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$. For et lineært materiale er susceptibiliteten χ_m og permeabiliteten μ konstanter, og man skriver efter 8.26 og 8.28

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu \mathbf{H}. \quad (9.5)$$

Bløde ferromagnetiske materialer kan med tilnærmelse betragtes som lineære med et passende valgt μ , men ellers må man for ferromagnetiske materialer kende hele magnetiseringskurven.

$\mathbf{H}$ ikke et
gradientfelt
-og dog

Af 9.2 følger, at $\nabla \times \mathbf{H} \neq 0$, hvor der er fri strøm. I almindelighed er $\mathbf{H}$ -feltet således ikke et gradientfelt, og vi kan derfor ikke benytte et skalart potential φ . I afsnit 6.7 så vi imidlertid, at betingelsen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ medførte, at vi i stedet kunne opfatte $\mathbf{B}$ -feltet som rotationen af vektorpotentialet $\mathbf{A}$, som for en given strømfordeling kunne beregnes af 6.60. Er der magnetiske materialer tilstede, omfatter strømfordelingen dog både fri og bunden strøm, hvilket kendeligt komplicerer sagen. Feltberegninger ved hjælp af vektorpotentialet er diskuteret i afsnit 8.2. Det er dog væsentligt enklere at arbejde med et skalart potential. I de følgende afsnit 9.3 og 9.4 skal vi derfor isolere nogle praktisk betydningsfulde situationer, hvor man kan finde et *magnetisk skalarpotential*.

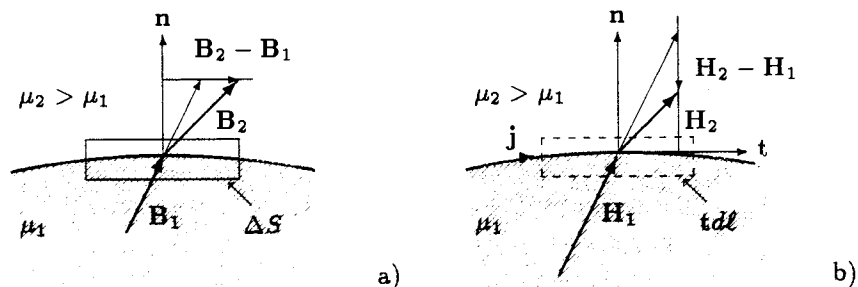
9.2 Grænsebetingelser for det magnetiske felt

Felter ved
grænseflade

I praksis kommer man ofte ud for at beregne magnetfelter i situationer, hvor der optræder materialer med forskellige magnetiske egenskaber. Vi må derfor undersøge, hvordan feltvektorerne $\mathbf{B}$ og $\mathbf{H}$ ændrer sig ved passage af en grænseflade mellem to medier. Vi behandlede det tilsvarende dielektriske problem i afsnit 3.6.

Figur 9.1a viser et lille stykke af grænsefladen mellem medierne 1 og 2 med normalen $\mathbf{n}$ rettet fra 1 mod 2. For at finde grænsebetingelsen for $\mathbf{B}$ indlægger vi, på sædvanlig måde, en Gauss-dåse med areal ΔS , halvt i hver af de to medier. Bidraget til overfladeintegralet fra den cylindriske flade kan gøres vilkårligt lille ved at gøre dåsen flad. Gauss' lov for $\mathbf{B}$ -feltet giver da

$$\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S = 0, \quad (9.6)$$



Figur 9.1: a) En Gauss-dåse på grænsen mellem to magnetika. b) En Ampèrevej på grænsen mellem to magnetika.

hvor $n_1 = n$ og $n_2 = -n$ er normalerne til dåsens top og bund. Heraf følger grænsebetingelsen

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (9.7)$$

$\mathbf{B}$, normalkomponent bevaret

som udtrykker, at normalkomponenten af $\mathbf{B}$ er uændret, når vi krydser grænsefladen.

For at finde grænsebetingelsen for $\mathbf{H}$ indlægger vi en snæver, rektangulær Ampèrevej, halvt i hvert medium (fig. 9.1b). Rektanglet har langsiden dl , som er rettet efter en tangentvektor $\mathbf{t}$ til overfladen. Ved anvendelsen af Ampères lov, må vi holde muligheden åben for, at der er en overfladetæthed af *fri* strøm, som vi vil kalde $\mathbf{j}$ med enheden Am^{-1} . En sådan strøm kan ganske vist kun forekomme på perfekte ledere, men i flere tilfælde, eksempelvis inden for højfrekvensteknik, er det tilladeligt at antage egentlige overfladestrømme også for reelle ledere. Vektoren $\mathbf{n} \times \mathbf{t}$ er normal til rektanglets flade, og vi kan skrive den strøm, der passerer den lukkede Ampèrevej (uanset hvor snæver vi gør den), som

$$\mathbf{j} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{t}) dl = (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} dl. \quad (9.8)$$

Vi er nu parat til at opskrive Ampères lov for rektanglet, som bliver

$$\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{t} dl + \mathbf{H}_1 \cdot (-\mathbf{t}) dl = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t} dl = (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} dl. \quad (9.9)$$

Da den sidste lighed skal være opfyldt for et vilkårligt $\mathbf{t}$, finder vi heraf

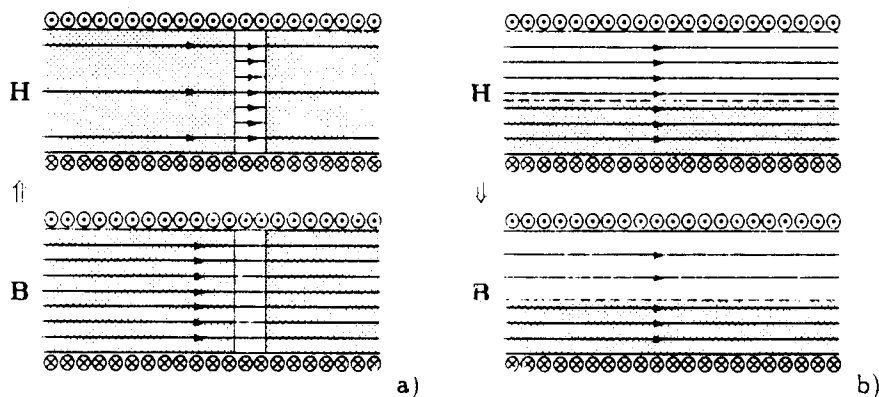
$$\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 = \mathbf{j} \times \mathbf{n}. \quad (9.10)$$

Vi kan bringe dette på en mere bekvem form ved at udføre operationen $\mathbf{n} \times$ på begge sider. Da $\mathbf{j}$ ligger i overfladen, er tripelproduktet $\mathbf{n} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) = \mathbf{j}$ efter A.7. Den endelige grænsebetingelse for $\mathbf{H}$ bliver derfor

$\mathbf{H}$, tangentialkomponent bevaret for $\mathbf{j} = 0$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}. \quad (9.11)$$

Er den fri overfladestrøm nul, hvilket er det sædvanlige, er tangentialkomponenten af $\mathbf{H}$ uændret ved passage af grænsefladen.



Figur 9.2: $\mathbf{H}$ -linier og $\mathbf{B}$ -linier ved grænseflader.

**B-linier og
H-linier**

▷ Magnetikum i solenoide: Fig. 9.2 illustrerer forskellen mellem B-liniernes og H-liniernes opførsel ved en grænseflade. En lang solenoide er delvis fyldt med et lineært magnetikum med permeabilitet μ . I tilfælde a) er der udkåret en spalte i materialet. Felterne er vinkelrette på grænsefladerne, som B-linierne passerer i uændret antal. Da $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ er tætheden af H-linier i materialet μ_r gange mindre end i spalten. I tilfælde b) er felterne parallelle med grænsefladen. Her er $\mathbf{H}$ tangentiell og efter 9.11 den samme på begge sider af grænsefladen, mens tætheden af B-linierne er en faktor μ_r større i materialet end i den tomme del af solenoiden.◁

9.3 Det magnetiske skalarpotential**Magnetisering
af legeme**

Et typisk magnetostatisk problem er følgende: Et homogent og isotropt legeme befinder sig i et tidskonstant magnetfelt frembragt af faste strømme og permanente magneter. Der er ikke nogen fri strøm i legemet og i et område omkring legemet. Opgaven er at finde det resulterende felt både i legemet og i det strømfri område omkring det.

Overalt hvor strømtætheden $\mathbf{J} = 0$ gælder efter 9.2, at

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad (9.12)$$

**Skalar-
potential**

hvilket gør det muligt at aflede $\mathbf{H}$ -feltet af et skalarpotential. For at undgå forveksling med det elektriske skalarpotential skal vi betegne dette *magnetiske skalarpotential* med φ^* og skrive

$$\boxed{\mathbf{H} = -\nabla \varphi^*}. \quad (9.13)$$

I det følgende skal vi flere gange udnytte, at der er en formel analogi mellem det her betragtede magnetikum uden fri strøm og et dielektrikum uden fri ladning. Ved sammenligning med afsnit 3.7 ser man jo, at det i parallelle ligninger gælder, at

Magnetikum, $\mathbf{J} = 0$	Dielektrikum, $\rho = 0$	
$\nabla \times \mathbf{H} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	
$\mathbf{H} = -\nabla \varphi^*$	$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$	
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$	
$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$	$\mathbf{D} = \epsilon_0(\mathbf{E} + \mathbf{P}/\epsilon_0)$	(9.14)

**Analogi til
dielektrikum**

De analoge størrelser (i dette tilfælde) er således $\mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{H}$, $\mathbf{D} \rightleftharpoons \mathbf{B}$ og, med den sædvanlige lille usymmetri, $\mathbf{P}/\epsilon_0 \rightleftharpoons \mathbf{M}$.

Legemets magnetisering $\mathbf{M}$ afhænger af $\mathbf{H}$, som vi ønsker at bestemme. Denne komplikation mødte vi tilsvarende ved behandlingen af dielektrika i kapitel 3. Lad os her antage, at $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ er en kendt funktion af stedet. Vi udtrykker derefter $\mathbf{B}$ ved skalarpotentialet som

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = -\mu_0 \nabla \varphi^* + \mu_0 \mathbf{M}, \quad (9.15)$$

hvorpå vi benytter, at $\mathbf{B}$ altid er divergensfri

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla^2 \varphi^* + \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M} = 0. \quad (9.16)$$

Der gælder altså en Poisson ligning

Poisson

$$\nabla^2 \varphi^* = \nabla \cdot \mathbf{M} = -\rho^*, \quad (9.17)$$

hvor der er indført en størrelse

$$\rho^* = -\nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (9.18)$$

Benytter man ekvivalensen $\mathbf{P}/\epsilon_0 \rightleftharpoons \mathbf{M}$ og sammenligner med Poissons ligning 2.101 ser man, at ρ^* gæsteoptræder i rollen som en magnetisk volumenladningstæthed.

Magnetisk ladning??

Vi kan også finde en magnetisk fladeladningstæthed. Ved magnetikets overflade gælder jo grænsebetingelsen 9.7 for $\mathbf{B}$. Er det omgivende medium 2 vacuum, kan vi finde grænsebetingelsen for normalkomponenten af $\mathbf{H}$

$$\mathbf{n} \cdot (\mu_0 \mathbf{H}_2 - \mu_0 \mathbf{H}_1 - \mu_0 \mathbf{M}) = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}. \quad (9.19)$$

Gennemfører vi den tilsvarende beregning for normalkomponenten af $\mathbf{E}$ ved overfladen af et dielektrikum, idet vi starter med grænsebetingelsen 3.52 for $\mathbf{D}$, finder vi

$$\mathbf{n} \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}_2 - \epsilon_0 \mathbf{E}_1 - \mathbf{P}) = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}/\epsilon_0. \quad (9.20)$$

For dielektriket er $\sigma_P = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$ overfladetætheden af polarisationsladning, så efter udtrykkene 9.19-9.20 tager det sig ud, som var der på magnetiket en overfladetæthed σ^* af magnetisk ladning. Tætheden af magnetisk overfladeladning bliver altså

Overfladeladning?

$$\sigma^* = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}. \quad (9.21)$$

Matematisk set kan vi derfor, når der ikke er frie strømme tilstede, beregne $\mathbf{H}$ -feltet i og omkring et magnetikum på samme måde, som vi beregnede $\mathbf{E}$ -feltet om et dielektrikum, når der ikke er frie ladninger tilstede. Specielt kan vi direkte overtage udtrykket 3.9 for potentialet, idet vi erstatter $\mathbf{P}/\epsilon_0$ med $\mathbf{M}$:

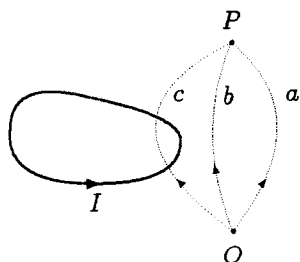
Potential fundet!

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \oint_V \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{M} dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (9.22)$$

Når det magnetiske skalarpotential kan anvendes, letter det mange beregninger af magnetfelter i og omkring magnetika. Dets indførelse her skal dog ledsages af to advarende bemærkninger:

- Magnetiseringen $\mathbf{M}$ er magnetisk dipolmoment per volumen og svarer til polarisationen $\mathbf{P}$ for et dielektrikum, som er elektrisk dipolmoment per volumen. I dielektriket er volumenladningstætheden af polarisationsladning $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ (se 3.10), som matematisk helt svarer til 9.18. Men, mens polarisationsladning er reel fysisk ladning, så findes der ingen magnetisk ladning i den virkelige verden. Al magnetisme i materialer skyldes atomare kredsløbsstrømme, og vi kan ikke forbinde noget fysisk med udtrykket "magnetisk ladningstæthed", som tilmed måles i Am^{-2} . Dette skal dog ikke forhindre os i at benytte analogien til det elektrostatiske felt således, at løsninger derfra kan genbruges i magnetostatiken.

Matematisk analogi



Figur 9.3: Det magnetiske potential i punktet P i forhold til referencepunktet O afhænger af den valgte vej.

Flertydigt potential

• Det magnetiske skalarpotential kan være flertydigt. Som eksempel kan vi se på situationen på fig. 9.3, hvor en enkelt strømkreds skaber et $\mathbf{H}$ -felt i rummet. Uden for selve strømkredsen (ledningen) er strømtætheden overalt nul således, at der findes et magnetisk skalarpotential. Potentialet $\varphi^*(P)$ i punktet P i forhold til referencepunktet O med potentialet bliver

$$\varphi_a^*(P) = \int_{O,a}^P -\nabla \varphi^* \cdot d\ell = \int_{O,a}^P \mathbf{H} \cdot d\ell, \quad (9.23)$$

hvor index a angiver, at der er integreret langs vejen a . Vi kunne også beregne $\varphi^*(P)$ ved integration langs vejen b . Det giver samme resultat, da

$$\varphi_a^*(P) - \varphi_b^*(P) = \int_{O,a}^P \mathbf{H} \cdot d\ell + \int_P^{O,b} \mathbf{H} \cdot d\ell = \oint \mathbf{H} \cdot d\ell = 0, \quad (9.24)$$

hvor vi har benyttet Ampères sætning og, at der ikke passerer nogen strøm gennem en flade udspændt af a og b . Vælger vi imidlertid vejen c ved beregning af $\varphi^*(P)$, bliver

$$\varphi_a^*(P) - \varphi_c^*(P) = \int_{O,a}^P \mathbf{H} \cdot d\ell + \int_P^{O,c} \mathbf{H} \cdot d\ell = \oint \mathbf{H} \cdot d\ell = I, \quad (9.25)$$

idet strømmen I nu passerer enhver flade udspændt af a og c . Potentialet afhænger således af den valgte vej og er altså flertydigt. Ja, lader vi vejen c tage n ture rundt om strømkredsen, ændrer det beregnede potential sig med nI og er dermed helt ubestemt.

Topologi

Man skal derfor være påpasselig ved brugen af det magnetiske skalarpotential, når der er strømkredse til stede. Roden til vanskelighederne er, at området uden for strømkredsen nok er strømfrit, men ikke *enkeltsammenhængende*: Vejen c kan ikke ved kontinuerte deformationer ændres til vejen a uden at passere strømkredsen, som er forbudt område. Man kan gøre det strømfrie område enkeltsammenhængende ved at indføre en spærring tværs over strømkredsen i form af en udspændt flade. Integrationsvejene må ikke passere spærringen, og potentialet bliver entydigt. Til gengæld ændrer det sig diskontinuert med I fra den ene til den anden side af spærringen.

Lige leder

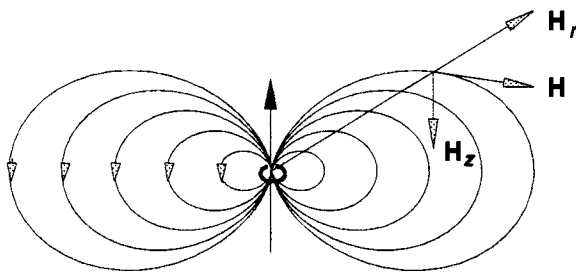
▷ Skalarpotential for lang, lige leder: Det foregående illustreres af $\mathbf{H}$ -feltet om en lang, lige leder, som vi tidligere har fundet med Ampères lov, se 6.77. I cylinderkoordinater bliver feltet $\mathbf{H} = \mathbf{e}_\theta I / 2\pi r$, som kan afledes af skalarpotentialet $\varphi^* = -\theta I / 2\pi$. Dette potential er kun entydigt, hvis $0 \leq \theta < 2\pi$. Indlægges halvplanen $\theta = 0$ som spærring, er $\varphi^* = 0$ lige over halvplanen, men $\varphi^* = -I$ lige under. ◁

9.4 Løsninger til magnetostatiske problemer

I dette afsnit skal vi se eksempler på enkle magnetostatiske problemer, som især kan løses ved hjælp af det magnetiske skalarpotential. Nogle blot ved henvisning til et tilsvarende elektrostatiske problem. Andre, som vedrører permanent magnetisering, behandles mest naturligt som specielt magnetostatiske problemer.

▷ Magnetisk dipol: Vi har tidligere i afsnit 6.9 behandlet feltet fra en magnetisk dipol i form af en begrænset strømkreds. Uden for strømkredsen er

Dipolen igen



Figur 9.4: Feltlinier omkring en magnetisk dipol og feltets opløsning i komponenter efter $\mathbf{r}$ og $\mathbf{m}$.

betingelsen $\mathbf{J} = 0$ opfyldt, og der findes derfor et magnetisk skalarpotential. Dette har vi allerede beregnet, idet $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ efter 6.92 er minus gradienten af skalarfeltet

Potential

$$\varphi^* = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (9.26)$$

Heraf beregnes $\mathbf{H} = -\nabla\varphi^*$ med resultatet

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right], \quad (9.27)$$

som svarer til udtrykket 6.93 for $\mathbf{B}$. Bortset fra den sædvanlige usymmetri, hvor $\mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{p}/\epsilon_0$, svarer 9.26 og 9.27 helt til udtrykkene 2.76 og 2.78. Fig. 9.4 viser feltlinierne omkring en magnetisk dipol og $\mathbf{H}$ -feltets opløsning i komponenter efter retningerne af $\mathbf{r}$ og $\mathbf{m}$, som er givet ved 9.27.◀

og felt

Der er to typer magnetostatiske problemer med materialer, hvor Poissons ligning 9.17 reducerer til Laplaces ligning:

1) Den første type omfatter *lineære* magnetiske materialer, herunder med tilnærmelse bløde ferromagnetika, hvor det gælder, at

Lineære materialer

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 = \mu\nabla \cdot \mathbf{H} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (9.28)$$

Men da $\mathbf{H} = -\nabla\varphi^*$ følger heraf Laplaces ligning

$$\nabla^2\varphi^* = 0, \quad (9.29)$$

som, under hensyn til $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, må løses med grænsebetingelserne 9.7 og 9.11 med $\mathbf{j} = 0$.

2) Den anden type problem drejer sig om materialer, som har en konstant, *homogen* magnetisering $\mathbf{M}$. Løsningerne giver i idealiseret form et indtryk af felterne i og omkring permanente magneter.

Homogent M

Et materiale med konstant magnetisering er selvfølgelig langt fra lineært, da der er en fluxtæthed $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$ for $\mathbf{H} = 0$. Der gælder imidlertid

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 = \mu_0(\nabla \cdot \mathbf{H} + \nabla \cdot \mathbf{M}) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (9.30)$$

Laplace

idet $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, når $\mathbf{M}$ er homogen. Heraf følger igen Laplanceligningen

$$\boxed{\nabla^2 \varphi^* = 0}, \quad (9.31)$$

som nu må løses under hensyn til $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ og grænsebetingelserne.

Magnetiseret
kugle

▷ Magnetiserbar kugle i homogent felt: Som eksempel på et magnetostatisk problem af type 1) kan vi se på en lineært magnetiserbar kugle med radius a og permeabilitet μ_2 . Kuglen er anbragt i udstrakt lineært og homogent medium med permeabilitet μ_1 og et oprindeligt homogent magnetisk felt $\mathbf{H}_0$. Vi lægger en z -akse i retning af $\mathbf{H}_0$ og benytter sfæriske koordinater (r, θ) omkring kuglens centrum.

Problemet er fuldstændig analogt med det tilsvarende problem med en dielektrisk kugle, som vi løste i afsnit 3.7. Med de oplagte substitutioner $\varphi \rightarrow \varphi^*$ og $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ og $\epsilon \rightarrow \mu$ finder vi efter 3.70 det magnetiske skalarpotential

$$\begin{aligned} \varphi_e^*(r, \theta) &= -H_0 r \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} \right) \cos \theta, & \text{uden for kugle} \\ \varphi_i^*(r, \theta) &= -H_0 r \left(\frac{3\mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} \right) \cos \theta, & \text{inden i kugle.} \end{aligned} \quad (9.32)$$

Af udtrykkene 9.32 kan feltstyrkerne beregnes. Potentiallet inde i kuglen er således proportionalt med $r \cos \theta = z$. Dvs. at feltstyrken her er homogen med størrelsen

$$\mathbf{H}_i = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = \frac{3\mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} \mathbf{H}_0. \quad (9.33)$$

Felt svækkes
i tæt kugle

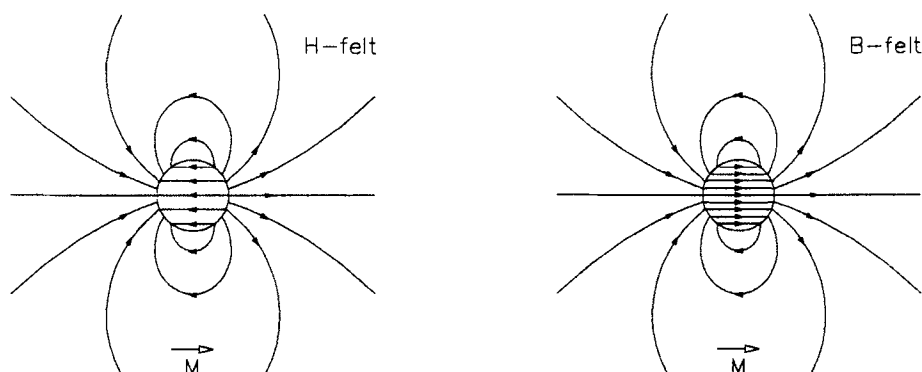
Hvis $\mu_2 > \mu_1$ (eksempelvis en magnetisk blød kugle i vacuum) sker der altså en reduktion af feltstyrken $\mathbf{H}_i$ i forhold til det oprindelige felt. Denne demagnetisering skyldes oplagt magnetiseringsstrømmen $\mathbf{j}_M$ (jvf. 8.14) på skillefladen mellem de to magnetika. Feltstyrken i et vilkårligt punkt på eller uden for kuglen findes ved at beregne $\mathbf{H} = -\nabla \varphi^*$ i sfæriske koordinater efter tabel A.4, hvilket giver

$$\mathbf{H}_e(r, \theta) = \mathbf{H}_0 + H_0 \left(\frac{a^3}{r^3} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} \right) (2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta), \quad (9.34)$$

når det oprindelige felt i z -aksens retning skilles ud. ◁

▷ Permanent magnetiseret kugle: Som eksempel på et problem af type 2) betragter vi en homogen magnetiseret kugle, se fig. 9.5, med radius a og permanent magnetisering $\mathbf{M}$ i z -aksens retning. Vi anvender igen sfæriske koordinater (r, θ) om kuglens centrum.

Her har vi ikke løst det tilsvarende dielektriske problem og må principielt starte fra bunden af med den fuldstændige løsning til Laplanceligningen, som er af typen 2.131, og så gå i gang med at bestemme koefficienter ved hjælp af grænsebetingelserne.



Figur 9.5: Den magnetiske feltstyrke $\mathbf{H}$ og den magnetiske fluxtæthed $\mathbf{B}$ i og omkring en permanent magnetiseret kugle. Feltet er homogent inde i kuglen og et dipolfelt uden for kuglen.

Man kommer dog noget lettere igennem ved nogle få begrundede gætterier om potentialets form: Inde i kuglen er magnetiseringen homogen. Det er da rimeligt at antage, at også $\mathbf{H}$ -feltet er homogent og peger i z -retningen. Et sådant felt kan afledes af et internt potential af formen

$$\varphi_i^*(r, \theta) = Ar \cos \theta. \quad (9.35)$$

Uden for kuglen er feltet i store afstande et magnetisk dipolfelt

$$\varphi_e^*(r, \theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (9.36)$$

Kuglens dipolmoment kender vi. Det er $\mathbf{m} = 4\pi a^3 \mathbf{M}/3$, da $\mathbf{M}$ er magnetisk moment per volumen. Det externe potential i store afstande bliver således

$$\varphi_e^*(r, \theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{m \cos \theta}{r^2} = \frac{a^3 M \cos \theta}{3r^2}. \quad (9.37)$$

Potentialerne φ_e^* og φ_i^* har samme vinkelafhængighed. Vi forsøger derfor med potentialet 9.37 i hele området uden for kuglen. Potentialerne må være kontinuerte på kuglens overflade, da de afledte felter ellers bliver uendelige. Sættes $r = a$ i begge potentialer bliver de identiske, dersom $A = M/3$. Hermed har vi gættet følgende potentialer inden i og uden for kuglen:

$$\varphi_i^* = \frac{Mr}{3} \cos \theta, \quad \varphi_e^* = \frac{Ma^3}{3r^2} \cos \theta. \quad (9.38)$$

Disse potentialer stemmer overens på kuglens overflade og er, indenfor deres respektive områder, fødte løsninger til Laplaceligningen. Tilbage står kun at sikre, at de deraf afledte felter opfylder grænsebetingelserne for $\mathbf{B}$ og $\mathbf{H}$. Hertil beregner vi $\mathbf{H}$ -felterne som $-\nabla \varphi^*$

$$\mathbf{H}_i = -\frac{1}{3} \mathbf{M}, \quad \mathbf{H}_e = \frac{1}{3} M \frac{a^3}{r^3} (2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta), \quad (9.39)$$

og $\mathbf{B}$ -felterne som $\mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ inde i kuglen og som $\mu_0 \mathbf{H}$ uden for kuglen:

$$\mathbf{B}_i = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M}, \quad \mathbf{B}_e = \frac{\mu_0}{3} M \frac{a^3}{r^3} (2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta). \quad (9.40)$$

Gode gæt

*Kuglens
dipolmoment*

*Felterne
findes*

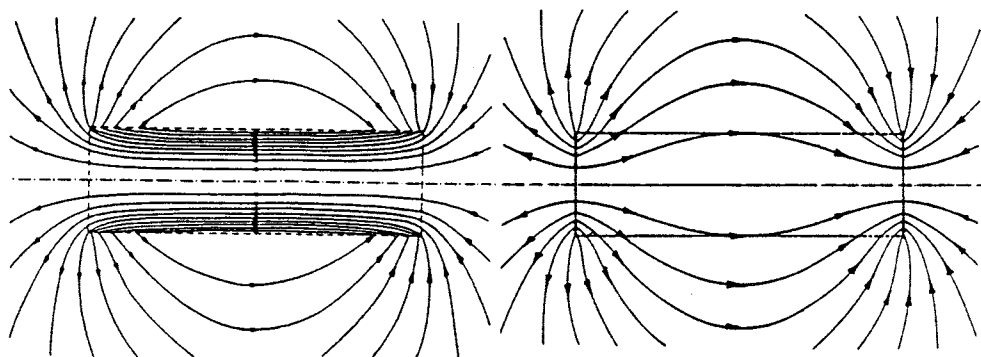
Ved projektion af disse felter ind på henholdsvis θ -retningen og r -retningen ser man, at såvel grænsebetingelsen 9.11 for $\mathbf{H}$ som grænsebetingelsen 9.7 for $\mathbf{B}$ er opfyldt.

Kuglen
demagnetiserer
sig selv

Af 9.39–9.40 og på fig. 9.5 fremgår det, at $\mathbf{H}$ -feltet inde i kuglen er modsat rettet af $\mathbf{M}$ og af $\mathbf{B}$. Man siger, at $\mathbf{H}$ -feltet er et *demagnetiserende* felt. Faktoren $\alpha = 1/3 = H/M$ i 9.39 kaldes *demagnetiseringsfaktoren*, som afhænger af legemets geometriske form. For homogent magnetiserede omdrejningsellipsoider bliver de indre felter også homogene, men med demagnetiseringsfaktorer som afhænger af excentriciteten. $\triangleleft$

Magnetiseret
cylinder

$\triangleright$ Stænger, cylindre og den slags: I praksis anvendes permanente magneter oftest i form af stænger med rektangulært eller cirkulært tværsnit, som cylindre eller skiver m.v. Felterne kan her ikke beregnes eksakt, som det er tilfældet for kugler og ellipsoider, men med de metoder, som er udviklet i det foregående, kan man give et tilnærmet billede af forholdene. Som eksempel kan vi se på en ret cylinder, fig. 9.6, med radius a , længde L og homogen magnetisering $\mathbf{M}$ langs akse.



Figur 9.6: a) $\mathbf{B}$ -feltet om en homogent magnetiseret cylinder frembragt af en bunden overfladestrøm på cylinderen. b) $\mathbf{H}$ -feltet frembragt af ekvivalente magnetiske 'overfladeladninger' på cylinderens endeflader.

Metode 1

a) Vi kan vælge at behandle eksemplet ved brug af de ekvivalente bundne strømme, som vi diskuterede i afsnit 8.2, og som er indtegnet på fig. 8.1. Da $\mathbf{M}$ er homogen, er der ikke nogen volumtæthed $\mathbf{J}_M$ af bunden strøm. Tilsvarende er overfladetætheden $\mathbf{j}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n} = 0$ på endefladerne. Derimod er der på den cylindriske flade en tæthed $\mathbf{j}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$.

Vi har dermed en strømfordeling, som svarer til den solenoide, vi behandlede i afsnit 6.5. Solenoiden her har ganske vist kun én vinding i form af et strømlag, men vi kan etablere sammenhængen med 6.46 ved ekvivalensen $j_m = NI/L$. Lægger vi her nulpunktet midt i cylinderen, finder vi efter 6.46 $\mathbf{B}$ -feltet på akse til

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{(z + L/2)^2 + a^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{(z - L/2)^2 + a^2}} \right]. \quad (9.41)$$

Herefter beregnes feltstyrken på akse som $H = B/\mu_0 - M$ i materialet og som $H = B/\mu_0$ uden for materialet. I centrum ($z = 0$) finder man således

$$B_z(0) = \frac{\mu_0 M L}{\sqrt{L^2 + 4a^2}}, \quad H_z(0) = M \left[\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4a^2}} - 1 \right]. \quad (9.42)$$

Man bemærker, at H er negativ. Der er altså tale om en demagnetisering med en demagnetiseringsfaktor, som efter 9.42 bliver $\alpha = |H/M| = 1 - L/\sqrt{L^2 + 4a^2}$.

b) Alternativt kan felterne beregnes ved hjælp af magnetiske ladningstætheder. Efter 9.18 er volumetætheden nul for det homogene M , mens der efter 9.21 er en overfladetæthed $\sigma^* = \pm M$ på de to endeflader. Opgaven er nu med 9.22 at beregne potentialet $\varphi^*(z)$ på akse af to cirkulære skiver af ladning med tætheder $\pm M$. Det er en elementær øvelse at vise, at

Metode 2

$$\varphi^*(z) = \frac{M}{2} \left[\sqrt{(z - L/2)^2 + a^2} - |z - L/2| - \sqrt{(z + L/2)^2 + a^2} + |z + L/2| \right], \quad (9.43)$$

hvor de numeriske værdier skyldes, at den positive kvadratrods anvendes. Heraf findes $\mathbf{H} = -\nabla\varphi^*$ i cylinderkoordinater. Da $\partial\varphi^*/\partial r = 0$ på akse, er der kun en H_z -komponent, som findes ved en differentiation, hvis resultat ganske kunstfærdigt kan skrives

Lange formler

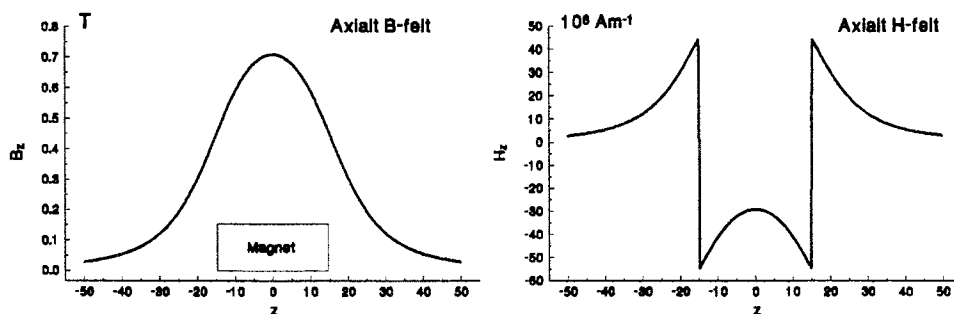
$$H_z(z) = -\frac{d\varphi^*}{dz} = \frac{M}{2} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{(z + L/2)^2 + a^2}} - \frac{z + L/2}{|z + L/2|} - \frac{z - L/2}{\sqrt{(z - L/2)^2 + a^2}} + \frac{z - L/2}{|z - L/2|} \right] = \frac{M}{2} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{(z + L/2)^2 + a^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{(z - L/2)^2 + a^2}} \right] + M \cdot \begin{cases} -1 & -L/2 < z < L/2 \\ 0 & z < -L/2, z > L/2 \end{cases} \quad (9.44)$$

Herefter findes $B = \mu_0(H + M)$ til

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{(z + L/2)^2 + a^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{(z - L/2)^2 + a^2}} \right], \quad (9.45)$$

i overensstemmelse med 9.41. De to helt forskellige betragtningsmetoder giver altså identiske resultater for felterne, som er afbildet på fig. 9.7. For en virkelig magnetiseret cylinder, eksempelvis en stangmagnet, er antagelsen om homogen magnetisering dog tvivlsom, især ude ved enderne. ◀

Samme resultat



Figur 9.7: B-feltet og H-feltet på akse af en homogent magnetiseret cylinder.

9.5 Magnetiske kredsløb

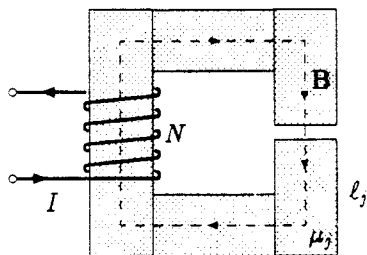
Et begreb fra praksis

Et magnetisk kredsløb (fig. 9.8) er sammensat af stykker af materiale med høj permeabilitet, oftest jern. Stykkerne danner én eller flere lukkede kredse, som dog kan være afbrudt af snævre spalter. Kredsen kan magnetiseres med en ydre strømspole, eller den kan indeholde stykker af permanent magnetiseret materiale. Magnetiske kredsløb anvendes i stor udstrækning i motorer, generatorer, transformatorer, laboratoriemagneter m.v.

9.5.1 Kredsløb af lineære materialer

Brug Ampères lov

Magnetiske kredsløb analyseres enklest ved anvendelse af Ampères lov på integral form. Vi ser først på kredsløb, som udelukkende er sammensat af lineære materialer. Lad en kreds bestå af stykker (herunder luftgab) med længderne $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_j$, tværsnitsarealerne $A_1, A_2, \dots, A_j$ og permeabiliteterne $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j$. Vi vil antage, at materialerne, bortset fra luftgabene, har relative permeabiliteter $\mu_r \gg 1$. Om luftgabene, at de er snævre i forhold til kredsens øvrige dimensioner. I kredsen danner de magnetiske fluxlinier lukkede kurver, som hovedsageligt vil løbe i det magnetiske materiale på grund af dets høje permeabilitet (sml. fig. 9.8). Er luftgabene snævre,



Figur 9.8: Et magnetisk kredsløb sammensat af stykker af materiale med høj permeabilitet og luftgab.

Samme flux

vil fluxlinierne passere dem uden større spredning. Vi kan derfor med god tilnærmelse² antage, at ethvert tværsnit i kredsen passerer af samme magnetiske flux Φ .

Lad kredsen magnetiseres af en spole med N vindinger og strømmen I . Vi anvender nu Ampères lov på en lukket vej C , som følger en fluxlinie

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = \sum_j H_j \ell_j = NI, \quad (9.46)$$

hvor integrationen er erstattet med en summation af bidragene fra kredsens enkelte stykker. For hvert stykke gælder imidlertid

$$H_j = \frac{B_j}{\mu_j} = \frac{\Phi}{\mu_j A_j}, \quad (9.47)$$

sådan, at Ampères lov antager formen

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = \sum_j \frac{\Phi}{\mu_j A_j} \ell_j = \Phi \sum_j \frac{\ell_j}{\mu_j A_j} = NI. \quad (9.48)$$

²Har tværsnittene forskellige arealer, er denne antagelse i strid med grænsebetingelsen for $\mathbf{B}$. Vi kan imidlertid forestille os, at der ved hver sådan grænse ligger en smal overgangszone, hvor $\mathbf{B}$ kontinuert ændres til sin nye værdi.

Her indgår størrelsen

$$\mathcal{R} = \sum_j \frac{\ell_j}{\mu_j A_j}, \quad (9.49)$$

*Reluktans,
et nyt begreb*

som kaldes *reluktansen* af den pågældende kreds, og som måles i reciprokke henry, $[\mathcal{R}] = \text{H}^{-1}$. Med reluktansen kan vi da skrive 9.48 som

$$NI = \Phi \mathcal{R}, \quad (9.50)$$

der har samme form som Ohms lov $\mathcal{E} = IR$. I overensstemmelse hermed kaldes amperevindingerne NI ofte kredsens *magnetomotoriske kraft*, skønt dette igen er en uheldig anvendelse af betegnelsen kraft.

*Magneto-
motorisk kraft*

Ved beregninger på magnetiske kredse er det værd at notere, at da $\mu_0 \ll \mu_j$ vil selv et snævert luftgab ofte give hovedbidraget til reluktansen 9.49. I så fald kan man enten helt negligere 'jernvejen' eller nøjes med en overslagsberegning for denne.

▷ Magnetiske og elektriske kredse sammenlignet: Formelt er der en betydelig lighed mellem elektriske og magnetiske kredsløb. I et elektrisk kredsløb er strømmen begrænset til lederens område, i et magnetisk kredsløb er fluxen begrænset til det magnetiske materiales område. I det elektriske kredsløb drives strømmen af elektromotoriske kræfter, i magnetiske af magnetomotoriske kræfter. I begge tilfælde bestemmes henholdsvis strøm og flux af en 'Ohms lov', nemlig 5.12 og 9.50:

*Analogi til
elektrisk kreds*

$$\mathcal{E} = RI, \quad NI = \mathcal{R}\Phi. \quad (9.51)$$

De ekvivalente størrelser er således

$$\mathcal{E} \rightleftharpoons NI, \quad R = \ell/\gamma A \rightleftharpoons \mathcal{R} = \ell/\mu A, \quad I \rightleftharpoons \Phi, \quad \gamma \rightleftharpoons \mu. \quad (9.52)$$

Med udnyttelse af disse ekvivalenser er det muligt at anvende Kirchhoffs love også på magnetiske kredse.

Også Kirchhoff

Analogien mellem elektriske og magnetiske kredse begrænses dog af materialeparametrene. Vi kan således ved hjælp af tabel 5.1 og tabel 8.2 sammenligne en leder omgivet af en isolator med en kreds af blødt jern i luft:

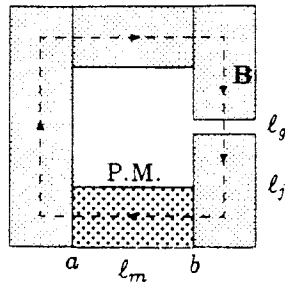
$$\frac{\mu_j}{\mu_0} \approx 5 \times 10^3, \quad \frac{\gamma_{\text{leder}}}{\gamma_{\text{isol}}} = \frac{\rho_{\text{isol}}}{\rho_{\text{leder}}} \approx 10^{22}. \quad (9.53)$$

På grund af denne forskel i de relative 'ledningsevner' er en elektrisk kreds langt mere effektiv end en magnetisk, som altid vil lække noget magnetfelt til omgivelserne.◁

9.5.2 Kredse med permanente magneter

En magnetisk kreds kan, foruden af ydre strømme, også magnetiseres når den omfatter stykker af permanent magnetiseret materiale. Fig. 9.8 viser en sådan kreds, hvor der for enkeltheds skyld ikke er medtaget en mulig ydre magnetiseringsvikling. Den permanente magnet befinder sig mellem punkterne a og b , mens resten af kredsen er blødt jern eller luftgab.

*Permanent
magnetkreds*



Figur 9.9: En magnetisk kreds med luftgab og permanent magnet.

Samme
metode

Udgangspunktet for bestemmelse af felterne er igen antagelsen om, at fluxen er den samme gennem ethvert tværsnit af kredsen og Ampères lov, som her bliver

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\ell = 0, \quad (9.54)$$

da der ikke er nogen ydre (fri) magnetiseringsstrøm. Vi deler integralet op i et integral langs den externe vej (via luftgabet) fra a til b med feltstyrke(rne) $\mathbf{H}_j$ og et integral fra b til a gennem den permanente magnet med feltstyrke $\mathbf{H}_m$. Dette giver

$$\int_a^b \mathbf{H}_j \cdot d\ell + \int_b^a \mathbf{H}_m \cdot d\ell = 0. \quad (9.55)$$

Her erstatter vi nu integrationerne med en sum over de respektive stykker af vejen, idet vi benytter skrivemåden 9.47 for H_j

$$\sum_j \frac{\Phi \ell_j}{\mu_j A_j} = - \int_b^a \mathbf{H}_m \cdot d\ell = -H_m \ell_m, \quad (9.56)$$

hvor ℓ_m er længden af den permanente magnet. Fluxen er den samme gennem alle tværsnit af kredsen, så der gælder $\Phi = B_m A_m$ og efter 9.56 derfor

$$B_m A_m \mathcal{R}_e = -H_m \ell_m, \quad (9.57)$$

hvor

$$\mathcal{R}_e = \frac{\ell_j}{\mu_j A_j} + \frac{\ell_g}{\mu_0 A_g} \approx \frac{\ell_g}{\mu_0 A_g} \quad (9.58)$$

Reluktans af
luftgab
dominerer

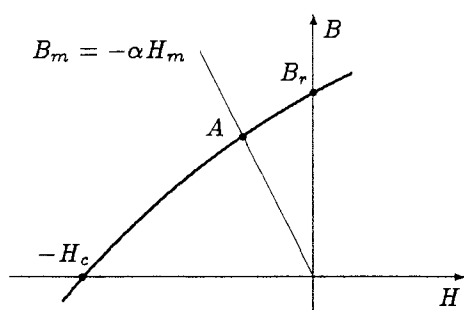
er reluktansen af den eksterne del af kredsen, bestående af blødt jern og luftgab. Som tidligere bemærket vil reluktansen af luftgabet oftest være helt dominerende, hvilket retfærdiggør approximationen i 9.58. Indføres denne i 9.57 har vi én relation mellem de ukendte felter H_m og B_m i den permanente magnet

$$B_m = -\frac{\ell_m A_g}{\ell_g A_m} \mu_0 H_m = -\alpha H_m. \quad (9.59)$$

Felterne altså er lineært forbundne.

Der er endnu en relation mellem felterne H_m og B_m , idet vi ved, at de må svare til et punkt på hysteresekurven for den permanente magnet. Indlægges linien 9.59 i 2. kvadrant vil skæringspunktet A med hysteresekurven 9.10 angive det felt, som indstiller sig i den permanente magnet. Man kalder dette punkt for magnetens *arbejdspunkt*. Dets beliggenhed afhænger altså af den

Arbejdspunkt



Figur 9.10: Bestemmelse af arbejds-punktet for det magnetiske kredsløb fig. 9.9.

betragede kreds og her især af luftgabets størrelse. Ud fra arbejds-punktet kan man dernæst bestemme fluxtætheden $B_g = B_m A_m / A_g$ i luftgabets, der som regel er den i praksis interessante størrelse.

Vi bemærker, at H_m er negativ for et positivt B_m . Som for eksemplerne med permanente magneter i afsnit 9.5 er der altså tale om et demagnetiserende felt. Det reduceres væsentligt, når luftgabets lukkes, idet linien 9.59 da bliver meget stejl og H_m derfor lille. Dette er forklaringen på, at f. eks. hestekomagneter ofte opbevares forsynet med et anker.

Demagnetisering

Kapitel 10

Magnetisk energi

Elektriske strømme eller magnetiserede materialer påvirker hinanden med magnetiske kræfter. Et system i hvile, som er opbygget af strømme og materialer, vil derfor have en potentiel *magnetisk energi*. Giver vi slip på systemets dele, vil de bevæge sig under indflydelse af kræfterne mellem dem, hvorved potentiel energi omsættes til kinetisk. Men også en isoleret, strømførende kreds har en magnetisk energi. Forbindes en spole således med en ydre elektromotorisk kraft, skabes der i kredsen en strøm, som gradvist vokser fra nul til den værdi, som bestemmes af den elektromotoriske krafts størrelse og kredsens ohmske resistans. Under strømmens opvækst er der en tidsvarierende flux i spolen, som skaber en induceret elektromotorisk kraft. Denne vil efter Lenz' lov virke imod den ydre elektromotoriske kraft, som altså ikke blot arbejder mod spændingen RI over resistansen, men også mod en induceret spænding $d\Phi/dt$ over spolen. Dette ekstra arbejde *mod* den inducerede elektromotoriske kraft modsvarer den magnetiske energi, som findes i det opbyggede magnetfelt.

Magnetisk energi

I dette kapitel skal vi undersøge den energi, som er knyttet til magnetostatiske fænomener. Som ofte fremhævet i det foregående, skyldes magnetfelter til syvende og sidst altid elektriske strømme. Vi skal derfor begynde med at se på simple systemer bygget op af trådformede kredse, som bærer *stationære* strømme. Som antydnet ovenfor, spiller den inducerede elektromotoriske kraft imidlertid en central rolle ved felternes opbygning. Så selv for stationære felter er det ved beregning af energien nødvendigt at indrage den måde felterne opbygges på og dermed ikke-stationære strømme. Dette volder dog ikke nogen principielle problemer, når blot ændringerne foregår langsomt i forhold til den tid det tager ændringen at forplante sig over kredsen. Strømmen er da til ethvert tidspunkt den samme i alle tværsnit af et lederstykke. Vi skal senere vise, at dette for harmonisk varierende strømme blot kræver, at bølgelængden af de tilhørende elektromagnetiske bølger er stor i forhold til strømkredsens udstrækning. Er denne betingelse opfyldt, kaldes tilfældet *kvasisstationært* og de stationære Kirchhoffske love 5.54 og 5.55 kan anvendes uændret. Den inducerede elektromotoriske kraft, som fysisk er fordelt over hele kredsen, indgår her kun med sin samlede værdi og kan behandles, som var den lokaliseret på lige fod med de påtrykte, ydre elektromotoriske kræfter.

Stationær og kvasisstationær strøm

10.1 Magnetisk energi af enkelt strømkreds

Enkelt kreds

Vi ser først på en enkelt, stiv og fastliggende strømkreds i sit eget magnetfelt. Strømmen i kredsen frembringes af en indkoblet ydre elektromotorisk kraft $\mathcal{E}_b$, eksempelvis et reversibelt batteri, som både kan afgive og oplagre strøm. I kredsen virker desuden den inducerede elektromotoriske kraft $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$, hvor Φ er den magnetiske flux gennem hele vindingsarealet. Har kredsen resistansen R gælder til ethvert tidspunkt, at

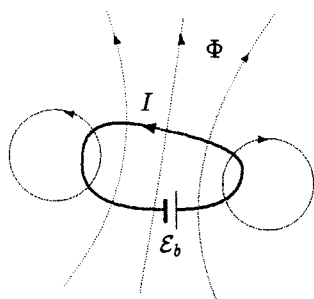
$$\mathcal{E}_b - \frac{d\Phi}{dt} = RI, \quad (10.1)$$

hvor I er den øjeblikkelige strøm. Multipliceres begge sider med ladnings-elementet $dq = I dt$, får vi efter omordning

$$\mathcal{E}_b I dt = I d\Phi + RI^2 dt. \quad (10.2)$$

Fortolkning via energiprincip

Denne ligning kan vi nu fortolke på følgende måde: Venstre side er det arbejde, som batteriet har leveret i tidselementet dt . Ligningen fortæller, at en del, $RI^2 dt$, heraf irreversibelt er omsat til Joule-varme. Den eneste anden



Figur 10.1: Den magnetiske energi af en strømførende kreds bestemmes af fluxændringen gennem kredsen.

Tilvækst i magnetisk energi

ændring er, at fluxen gennem kredsen er forøget med $\delta\Phi$. For at opretholde energisætningen må $I\delta\Phi$ efter 10.2 være den del af de ydre kræfters arbejde, som er medgået til at øge fluxen i kredsen med $\delta\Phi$. Derved er kredsens magnetiske energi U forøget med

$$\boxed{\delta U = I \delta\Phi}. \quad (10.3)$$

Vi skal tage 10.3 som grundlag for den videre diskussion af magnetisk energi i tilfælde, hvor kredsene ligger fast.

▷ Energi i selvinduktans: Hvis den betragtede kreds er lineær og stiv, er fluxændringen $\delta\Phi$ proportional med dI , idet $d\Phi = L dI$, jvf. 7.14. Ligning 10.3 antager da formen

$$dU = LI dI, \quad (10.4)$$

som integreres til

$$U = \int dU = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2, \quad (10.5)$$

da den magnetiske energi må være nul, når induktansen er strømløs. Vi har hermed fundet det vigtige udtryk

$$\boxed{U = \frac{1}{2} LI^2}. \quad (10.6)$$

for den magnetiske energi af en enkelt selvinduktans med strømmen I .

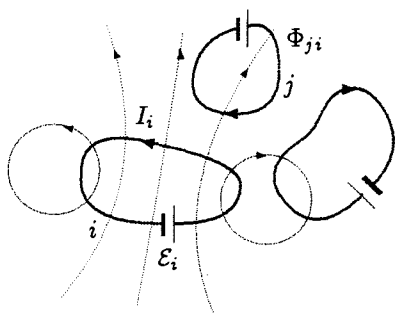
Udtrykket $U = \frac{1}{2}LI^2$ omtales undertiden som den *elektrokinetiske energi*, mens udtrykket $U = \frac{1}{2}CV^2$ (jvf. 4.20) tilsvarende omtales som den *elektropotentielle energi* i analogi med velkendte udtryk for en harmonisk oscillator. <

En analogi

10.2 Magnetisk energi af koblede kredse

Vi ser nu på et system, som består af n faste strømkredse anbragt i et magnetikum og således, at fluxen fra hver kreds helt eller delvis passerer de øvrige kredse, se fig. 10.2. Kredsene er altså magnetisk koblede. Resistansen af den

Flere kredse



Figur 10.2: Et system med n magnetisk koblede kredse.

i 'te kreds er R_i og den øjeblikkelige strøm I_i . I hver kreds virker en ydre elektromotorisk kraft $\mathcal{E}_i$. Under feltets opbygning giver disse elektromotoriske kræfter anledning til ændringer i kredsstrømmene og dermed til ændringer i den flux Φ_i , som passerer hver kreds. I analogi med 10.1 gælder det, at

$$\mathcal{E}_i - \frac{d\Phi_i}{dt} = R_i I_i, \quad (10.7)$$

men hvor situationen dog er lidt anderledes, fordi Φ_i og dermed I_i nu afhænger af, hvad der sker i de andre kredse. Det af $\mathcal{E}_i$ udførte arbejde i tidsintervallet dt bliver da

$$\delta W_i = \mathcal{E}_i I_i dt = I_i \delta \Phi_i + R_i I_i^2 dt. \quad (10.8)$$

Af dette arbejde afsættes $R_i I_i^2 dt$ som varme, mens $I_i \delta \Phi_i$ medgår til at opbygge systemets magnetiske energi U , som øges med

Tilvækst i energi

$$\delta U = \sum_{i=1}^n I_i \delta \Phi_i. \quad (10.9)$$

Den totale tilvækst i systemets magnetiske energi, når strømmene kvasistationært bringes op fra nul til deres slutværdier, bliver

$$U = \sum_{i=1}^n \int_{\Phi_{i0}}^{\Phi_i} I_i \delta \Phi_i, \quad (10.10)$$

idet Φ_{i0} er fluxen gennem den i 'te kreds, når alle strømme er nul. Denne begyndelsesflux er nul, hvis der ikke er nogen remanent magnetisering af det omgivende magnetikum. Det skal bemærkes, at den magnetiske energi kun er fuldt tilgængelig, dersom sammenhængen mellem I_i og Φ_i er entydig.

I modsat fald, det vil sige, når der er hysteres, kan en del af energien være bundet i remanent magnetisering.

Lineære kredse

Vi forudsætter nu, at kredsene ud over at være stive og faste også er *lineære*. Det vil sige, at sammenhængen mellem $\mathbf{H}$ og $\mathbf{B}$ er lineær, hvilket da også gælder sammenhængen mellem I og Φ . For de stive og faste kredse skyldes fluxændringen $\delta\Phi_i$ gennem den i 'te kreds alene strømændringer i kredsen selv og i de $n - 1$ øvrige kredse.

Energi uafhængig af vej

Vi skal nu vise, at i det lineære tilfælde er den magnetiske energi uafhængig af den måde, feltet opbygges på. På grund af lineariteten kan vi bekvemt benytte de gensidige induktanser M_{ij} indført i afsnit 7.2.2 og efter 7.24 skrive

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} dI_j. \quad (10.11)$$

Samlet arbejde

Herefter finder vi det samlede magnetiske arbejde på de n strømkredse ved strømændringerne dI_i som

$$\delta U = \sum_{i=1}^n I_i \sum_{j=1}^n M_{ij} dI_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i dI_j. \quad (10.12)$$

Der erindres om, at M_{ii} er selvinduktansen L_i af den i 'te kreds og at matricen M_{ij} er symmetrisk.

I summen 10.12 optræder kombinationen

$$M_{ij} I_i dI_j + M_{ji} I_j dI_i = M_{ij} d(I_i I_j), \quad (10.13)$$

der altså kan udtrykkes som et totalt differential, fordi M_{ij} er symmetrisk. Det går imidlertid ikke at skrive summen i 10.12 som $\sum_{i,j} M_{ij} d(I_i I_j)$, da der her optræder både M_{ij} og M_{ji} , hvilket vil give det dobbelte resultat. Derimod kan vi skrive tilvæksten 10.12 som det totale differential

$$dU = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} d(I_i I_j), \quad (10.14)$$

Total energi 1

der umiddelbart integrerer til udtrykket for den totale energi

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i I_j. \quad (10.15)$$

I dette udtryk for energien indgår kun slutstrømmene i de enkelte kredse, hvormed vi har vist, at i det lineære tilfælde er energien uafhængig af den måde, strømmene opbygges på.

En mulig vej

Vi kan f.eks. vælge at opbygge alle strømmene proportionalt sådan, at strømmen i hver kreds til et bestemt tidspunkt er $I'_i = \alpha I_i$, hvor I_i er slutstrømmen og α et tal mellem 0 og 1. På grund af lineariteten bliver den øjeblikkelige flux tilsvarende $\Phi'_i = \alpha \Phi_i$ og fluxændringen $d\Phi'_i = \Phi_i d\alpha$. Vi kan da gå tilbage til udtrykket 10.9 og skrive

$$dU = \sum_{i=1}^n I'_i d\Phi'_i = \sum_{i=1}^n \alpha I_i \Phi_i d\alpha. \quad (10.16)$$

Herefter findes totalenergien som

Total energi 2

$$U = \int dU = \int_0^1 \alpha d\alpha \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i, \quad (10.17)$$

altså

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i. \quad (10.18)$$

Strømmene kunne bringes op på andre måder, men resultatet ville være uændret, se et eksempel i opgave 10.1. Den fundamentale relation 10.18 følger også direkte af 10.15, idet $\Phi_i = \sum_j M_{ij} I_j$.

Er der kun to koblede kredse, 1 og 2, kan 10.15 skrives som

To kredse

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2, \quad (10.19)$$

hvor $M = M_{12} = M_{21}$. Der erindres om, at L_1 og L_2 altid er positive, mens fortegnet på M afhænger af strømretningerne.

▷ Ulighed mellem induktanser: Den totale magnetiske energi må altid være positiv. I tilfældet med to koblede kredse kan vi udnytte dette til at finde en interessant ulighed mellem L_1 , L_2 og M . Hertil skriver vi 10.19 som

Grænse for kobling

$$U = \frac{1}{2} I_2^2 (L_1 x^2 + 2Mx + L_2) \geq 0, \quad (10.20)$$

hvor vi har indført strømforholdet $x = I_1/I_2$. Grafen for funktionen $U(x)$ er en parabel med bunden nedad. Dens minimum ligger ved $x = -M/L_1$, som indsat i 10.20 giver betingelsen

$$M^2 \leq L_1 L_2. \quad (10.21)$$

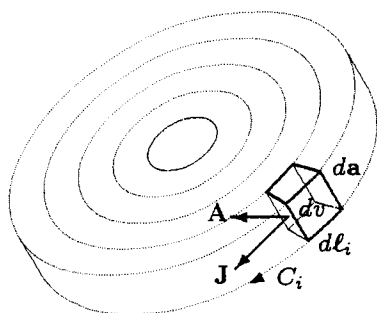
Denne relation har vi allerede forudsat ved diskussionen af magnetisk kobling (se 7.30). ◁

10.3 Energi af kontinuert strømfordeling

Udtrykket 10.18 for den magnetostatiske energi kan almindeliggøres til at gælde for energien af en kontinuert fordeling af strøm. I stedet for et antal lukkede kredse bestående af tynde ledninger med konstante strømme, ser vi nu på en stationær, *begrænset* strømfordeling beskrevet ved strømtætheden $\mathbf{J}$. Strømlinierne må her være lukkede kurver, hvoraf vi kan danne lukkede strømlinierør med tværsnit da vinkelret på $\mathbf{J}$, sml. fig. 10.3. Lad os se på et enkelt sådant strømrør, som vi betegner med index i . Strømrøret fører strømmen I_i , der kan beregnes som $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ for et vilkårligt tværsnit i røret. Den magnetiske flux Φ_i gennem en flade S_i med strømrøret som rand kan vi med Stokes' sætning skrive som

Overgang til strømlinierør

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S_i} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i, \quad (10.22)$$



Figur 10.3: Den magnetiske energi af en kontinuert strømfordeling kan beregnes ved at opdele denne i strømli-
nierør.

hvor C_i er en lukket kurve langs strømrøret. Herefter kan vi skrive den samlede magnetiske energi 10.18 af strømfordelingen som

$$U = \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{C_i} I_i \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i, \quad (10.23)$$

hvor den sidste omskrivning kan foretages, fordi I_i er konstant langs strømrøret.

Energien
udtrykt ved
 $\mathbf{J}$ og $\mathbf{A}$

I 10.23 foretager vi nu den sædvanlige substitution $I d\mathbf{l} = \mathbf{J} dv$ (sml. 6.11), hvorefter udtrykket for den magnetiske energi kan skrives

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dv. \quad (10.24)$$

Forestiller vi os, at strømfordelingens volumen V helt er udfyldt med strømrør, som overalt ligger tæt mod hinanden, kan den lidt besynderlige summation $\sum_i \oint_{C_i}$ af volumenintegraler langs et strømrør erstattes af et volumenintegral over hele strømfordelingen, hvis magnetiske energi derfor bliver

Total energi 3

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dv. \quad (10.25)$$

Integrationen skal omfatte hele strømfordelingens volumen, men derudover kan vi sådan set gøre integrationsvoluminet V så stort, som vi ønsker, da der ikke kommer noget bidrag der, hvor $\mathbf{J} = 0$. Med indførelsen af $\mathbf{A}$ har vi her taget et første skridt hen mod en feltbeskrivelse af den magnetiske energi.

10.4 Energi i det magnetiske felt

Energien
udtrykt ved
 $\mathbf{H}$ og $\mathbf{B}$

Integralet 10.25 udtrykker den magnetiske energi af en kontinuert strømfordeling ved hjælp af fordelings vektorpotential og strømtæthed. Udtrykket er i mange henseender analogt med udtrykket 4.13 for energien af en kontinuert ladningsfordeling. I afsnit 4.4 omskrev vi dette sidste udtryk sådan, at det udelukkende indeholdt de elektriske feltstørrelser $\mathbf{E}$ og $\mathbf{D}$. Vi skal nu foretage en lignende omskrivning af 10.25 sådan, at det udelukkende indeholder de magnetiske feltstørrelser $\mathbf{H}$ og $\mathbf{B}$.

Hertil udnytter vi, at efter Ampères lov på differentiell form er $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, hvormed 10.25 bliver

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dv. \quad (10.26)$$

Vi anvender nu vektoridentiteten tabel A.2:8 på formen

Vektoranalyse

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}), \quad (10.27)$$

hvormed 10.25 bliver

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv - \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dv, \quad (10.28)$$

og det sidste volumenintegral omskrives til et fladeintegral med resultatet

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv - \frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (10.29)$$

Som tidligere bemærket kan vi gøre V så stor, som vi ønsker, altså f.eks. vælge V som en kugle med radius $R \rightarrow \infty$. Efter 6.82 må vektorpotentialet på kuglens overflade aftage mindst som $1/R^2$ og det afledte felt H derfor mindst som $1/R^3$. Da kuglefladens areal kun vokser som R^2 , går overfladeintegralet i 10.29 mod nul, og alene volumenintegralet bliver tilbage. Men da $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, er vi nået frem til det vigtige udtryk for energien

Total energi 4

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv. \quad (10.30)$$

Det volumen V , der skal integreres over, omfatter i princippet hele rummet. Men da felterne i store afstande hurtigt konvergerer mod nul, er det især områderne nær ladningsfordelingen som bidrager.

Udtrykket 10.30 for den magnetiske energi af en strømfordeling, er helt analogt til udtrykket 4.32 for energien af en ladningsfordeling. Vi vil derfor fortolke 10.30 sådan, at den magnetiske energi er knyttet til det magnetiske felt i rummet og har en energitæthed u , med enheden Jm^{-3} , hvor

Energien er i feltet

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}. \quad (10.31)$$

Det er en forudsætning for 10.15 og alle følgende udtryk for den magnetiske energi, at de betragtede strømkredse er lineære. Specielt er gyldigheden af de fundamentale relationer 10.25, 10.30 og 10.31 *begrænset til lineære situationer*, hvilket man altid må huske ved anvendelserne. For lineære materialer er felterne forbundet ved $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, hvor μ er materialets permeabilitet. Vi kan derfor udtrykke energitætheden i feltet ved hvert af de to felter alene:

Obs!

$$u = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}. \quad (10.32)$$

Ofte optræder der på én gang elektriske og magnetiske felter. Er der linearitet bliver den samlede energitæthed i et sådant *elektromagnetisk felt*

Total energi 5

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}), \quad (10.33)$$

eller

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2. \quad (10.34)$$

Man kan bemærke, at det elektriske og det magnetiske felt ikke 'blander'.

Energi i
solenoid

▷ Lang solenoide med magnetikum: Vi kan benytte formalismen til at beregne energiindholdet i en lang solenoide med N vindinger og strøm I , tværsnitsareal A , længde ℓ og fyldt med et lineært magnetikum med permeabilitet μ . Den magnetiske feltstyrke H og fluxtætheden B er begge homogene og axiale og bliver helt analogt med 6.78

$$H = nI = \frac{NI}{\ell}, \quad B = \mu H = \frac{\mu NI}{\ell}. \quad (10.35)$$

Energitætheden og den totale energi i solenoiden er derfor

$$u = \frac{1}{2}BH = \frac{\mu N^2 I^2}{2\ell^2}, \quad U = uA\ell = \frac{\mu AN^2 I^2}{2\ell}. \quad (10.36)$$

Vi kan sammenholde dette med udtrykket 10.6 for energien i en selvinduktans L og derved finde L for solenoiden:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu AN^2 I^2}{2\ell} \Rightarrow L = \frac{\mu AN^2}{\ell}, \quad (10.37)$$

i overensstemmelse med 7.19, når μ_0 erstattes med μ . ◁

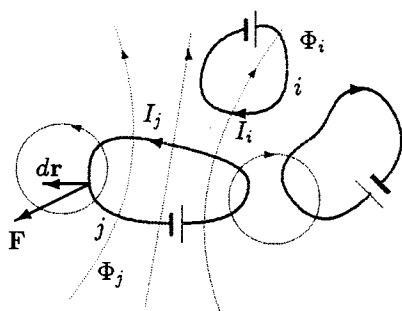
10.5 Kræfter og momenter i magnetostatiken

Lad os igen betragte et system af n stive, magnetisk koblede strømkredse. Da hver enkelt kreds befinder sig i feltet fra de andre kredse, vil den være påvirket af kræfter og kraftmomenter. Giver vi slip på en bestemt kreds vil den derfor som regel bevæge sig, idet den forskydes eller drejes. Dette ændrer fluxene gennem alle kredse og der induceres elektromotoriske kræfter i kredsen selv og de øvrige kredse, hvorved situationen bliver uoverskuelig.

Vi kan imidlertid forestille os, at de elektromotoriske kræfter i kredsene er af en sådan beskaffenhed, at de holder strømmene I_i konstante, uanset hvad der kommer af ydre påvirkninger. En sådan elektromotorisk kraft kaldes en *konstantstrøms-generator*. I sin simpleste form kan den blot være en spændingskilde (et batteri), hvis spænding er meget højere end de elektromotoriske kræfter, som induceres. Forsynes strømkredsen gennem en passende stor resistans, bestemmer denne praktisk talt alene strømmens størrelse.

System med bevægelse

Konstante strømme



Figur 10.4: System af magnetiske kredse med faste strømme. Flytning af en kreds under påvirkning af feltet giver en forøgelse af dets energi.

Vi lader nu en enkelt kreds få en translatorisk forskydning dr under påvirkning af den samlede magnetiske kraft F , som virker på den. Derved udfører *systemet* et mekanisk arbejde dW på enkeltkredsen, som bliver

Arbejde på kreds

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (10.38)$$

Arbejdet sker på dels på bekostning af systemets magnetiske energi, som ændrer sig med $-dU$ og dels ved, at batterierne giver et tilskud dW_b . Vi kan derfor opstille en energibalance

Energibalance

$$dW = -dU + dW_b. \quad (10.39)$$

De to bidrag på højre side kan sættes i relation til hinanden. Den magnetiske energi af systemet er givet ved 10.18 sådan, at vi har

$$U = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i \quad \Rightarrow \quad dU = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i, \quad (10.40)$$

eftersom alle strømme holdes konstante.

Det er batterierne, som sørger for at holde strømmene konstante. Dertil må de overvinde de inducerede elektromotoriske kræfter $-d\Phi_i/dt$, hvilket i lighed med 10.9 kræver et arbejde

$$dW_b = \sum_i I_i d\Phi_i. \quad (10.41)$$

Herefter giver 10.39 det samlede arbejde af system og batterier

$$dW = -dU + dW_b = -\frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i + \sum_i I_i d\Phi_i = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i = +dU. \quad (10.42)$$

På grund af tilskuddet fra batterierne øger systemet altså sin magnetiske energi, når det udfører arbejde.

Kraften
beregnes

Også kraften $\mathbf{F}$ på enkeltkredsen kan findes ved en energibetragtning. Når alle strømme er faste og kun beliggenheden af den betragtede kreds ændres, vil systemets magnetiske energi alene være en funktion $U(\mathbf{r})$ af positionen $\mathbf{r}$ af denne kreds. Differentialet dU kan da beregnes på sædvanlig måde og ved benyttelse af 10.38 og 10.42 kan man skrive

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz, \quad (10.43)$$

hvoraf

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right). \quad (10.44)$$

Kraften bliver altså i dette tilfælde *plus* gradienten af feltenergien:

$$\boxed{\mathbf{F} = +\nabla U}, \quad I \text{ konstant.} \quad (10.45)$$

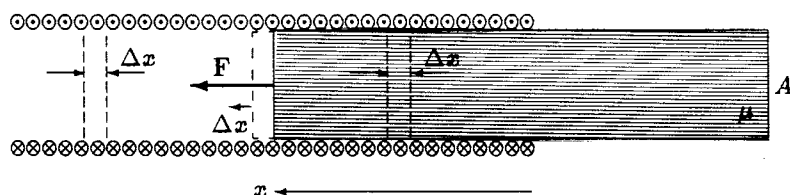
Kraftmoment

Ved tilsvarende overvejelser kan man finde det kraftmoment, som virker på en enkeltkreds. Er denne bundet til at dreje sig om en bestemt akse, kan man udtrykke feltenergien som $U(\theta)$, hvor θ er drejningsvinklen i forhold til en tilfældig nulvinkel. Kraftmomentet bliver da

$$\boxed{\tau = +\frac{\partial U}{\partial \theta}}, \quad I \text{ konstant.} \quad (10.46)$$

Kraft på et
magnetikum

▷ Magnetisk stang i spole: Som et eksempel i tilknytning til det foranstående, kan vi se på en cylindrisk stang af blødt jern med permeabilitet μ , som er delvis indskudt i en spole. Her er vi ikke interesseret i kraften på spolen, men på et stykke magnetikum, som er en del af det samlede system. Kraften på stangen stammer fra et kompliceret, inhomogent feltforløb nær spolens og stangens ender, men kan enkelt findes ved en energibetragtning. Lad spolen have længden ℓ og N vindinger med den fastholdte strøm I . Langt fra enderne vil H -feltet være ret homogent og både i materiale og i vacuum have størrelsen $H = NI/\ell$, jvf. 6.78. Den magnetiske energitæthed bliver da $\frac{1}{2}\mu H^2$ i den indskudte del af stangen og $\frac{1}{2}\mu_0 H^2$ i spolen udenfor. Vi giver nu stangen en virtuel forskydning Δx ind i spolen. Her ved ændres de komplicerede felter nær enderne ikke væsentligt og man kan sige, jvf. fig. 10.5, at nettoændringen er, at et homogent område med længde



Figur 10.5: Kraft på magnetisk stang i en spole

Δx er overgået fra at være vacuum til at være magnetikum. Har stangen tværsnitsarealet A , giver dette en energiændring for systemet

$$\Delta U = \frac{1}{2} H^2 (\mu - \mu_0) A \Delta x. \quad (10.47)$$

Da strømmen holdes konstant skal kraften på stangen beregnes som plus gradienten af den magnetiske energi og bliver altså

Magnetisk kanon

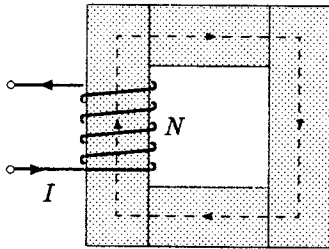
$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} H^2 (\mu - \mu_0) A. \quad (10.48)$$

Denne kraft er positiv, dvs., at den går i retning af x på figuren, og vil altså trække stangen ind i spolen. Indretter man det således, at spolestrømmen automatisk afbrydes, når stangen er trukket helt ind, kan denne med stor fart fortsætte ud af spolens anden ende (*Birkelands kanon*). $\triangleleft$

10.6 Energi i ferromagnetika

I det foregående har vi hovedsagelig undersøgt magnetiske systemer som indeholdt lineære magnetiske materialer. Men de vigtigste magnetiske materialer er ferromagnetika, hvor sammenhængen mellem $\mathbf{H}$ og $\mathbf{B}$ ikke er lineær og ofte ikke entydig, sådan som det blev diskuteret i afsnit 8.4.1. Vi skal her se på energiforholdene i systemer som indeholder ferromagnetiske materialer og hvor hysteresese er fremtrædende.

Ikke-lineære materialer



Figur 10.6: Magnetisk kreds opbygget af ferromagnetisk materiale.

Konkret ser vi på en magnetisk kreds, fig. 10.6, fremstillet af det ferromagnetiske materiale. Kredsen magnetiseres af en spole med strøm I og N vindinger. Vi regner med, at der er samme flux Φ gennem alle tværsnit af kredsen. Ved beregning af energien kan vi ikke benytte det lineære udtryk 10.18, men må gå tilbage til det alment gyldige arbejdsdifferential 10.3. Efter dette kræver en fluxændring $\delta\Phi$, at den drivende elektromotoriske kraft udfører et differentielt arbejde

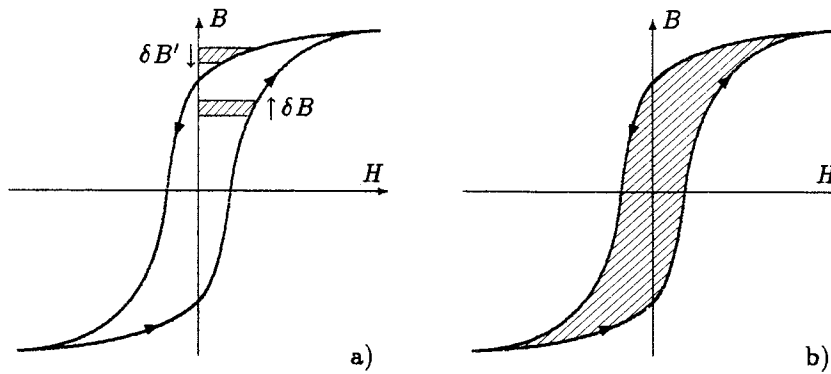
Ferromagnetisk kreds

$$\delta W_b = NI \delta\Phi, \quad (10.49)$$

idet der er en induceret elektromotorisk kraft at arbejde imod i hver af de N vindinger. Amperevindingerne NI kan, jvf. 9.46 erstattes med $\oint \mathbf{H} \cdot d\ell$ langs en vilkårlig fluxlinie i kredsen, således, at

Differentielt arbejde

$$\delta W_b = \delta\Phi \oint \mathbf{H} \cdot d\ell = \oint A \delta B \mathbf{H} \cdot d\ell, \quad (10.50)$$



Figur 10.7: Arbejdet ved magnetisering af et ferromagnetikum udtrykt som arealer af hysteresekurven.

hvor A er magnetkredsens tværsnit. Da $d\ell$ og $\mathbf{B}$ er tangenter til fluxlinien, har de overalt samme retning. Vi kan derfor flytte vektorkarakteren fra $d\ell$ til $\mathbf{B}$ og skrive

$$\delta W_b = \oint A \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d\ell = \int_V \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} dv, \quad (10.51)$$

idet linieintegralet langs hele fluxvejen erstattes med et volumenintegral, hvor $dv = A d\ell$ og hvor $V = \oint dv = \oint A d\ell$ er hele kredsens volumen. Vi kan fortolke 10.51 sådan, at der til ændring af materialets magnetisering med $\delta \mathbf{B}$ kræves et ydre arbejde (fra batterierne), som per volumen er

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}. \quad (10.52)$$

Arbejdet som
areal af
hysteresekurve

Vi ser nu på materialets hysteresekurve fig. 10.7. Ændres materialets magnetisering med et δB som vist på figuren, så vil der hertil efter 10.52 kræves et positivt arbejde dw_b per volumen, som svarer til den tilhørende skraverede strimmel på fig. 10.7a. Fortsættes kurvens gennemløb ad den nedadgående gren således, at fluxtætheden ændres med det viste $\delta B'$, svarer arbejdet igen til den skraverede strimmel, men dette arbejde er negativt, fordi $\delta B'$ er negativ, mens H er positiv. Gennemløbes hele hysteresekurven overbeviser man sig ved hjælp af differentialen 10.52 let om, at dette per volumen kræver et arbejde, som er det af hysteresekurven indesluttede areal, fig. 10.7b, altså

$$w_b = \oint \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}, \quad (10.53)$$

hvor kredsintegralet nu går langs hysteresekurven.

Energitaab ved
magnetisering

Efter gennemløbet af hysteresekurven er materialet vendt tilbage til sin oprindelige tilstand, og dets magnetiske energi må derfor være uændret. Kredsintegreret 10.53 er positivt og udtrykker det arbejde, som den ydre elektromotoriske kraft per volumen har udført på materialet. Dette arbejde er et energitaab, som er medgået til at vende de magnetiske momenter i materialet mod friktionskræfterne og optræder som varme i materialet. Bemærk, at 10.53 er energitaabet for ét gennemløb af hysteresekurven. Er den drivende elektromotoriske kraft en vekselstrøm, bliver den effekt som afsættes derfor direkte proportional med frekvensen.

Kapitel 11

Vekselstrøm

I kapitel 5 behandlede vi elektriske netværk, som var sammensat af konstante elektromotoriske kræfter og resistorer i lukkede masker. Vi var i stand til at beregne de elektriske jævnstrømme i de enkelte grene af et sådant netværk ved at dele det op i serie- eller parallelforbindelser af resistanser og elektromotoriske kræfter eller, når dette ikke var muligt, ved anvendelse af *Kirchhoffs love* 5.54 og 5.55.

Netværk igen

I dette afsnit skal vi udvide behandlingen af elektriske kredse og netværk til at omfatte elektromotoriske kræfter og dermed strømme, som varierer med tiden. Af passive komponenter kan der da, udover *resistorer*, i kredse også indgå *capacitorer* og *induktorer*, som har væsentlige virkninger på tidsvarierende spændinger og strømme.

Flere passive komponenter

Ved behandlingen af magnetisk energi omtalte vi kvasistationære strømme som strømme, der varierer så langsomt, at strømmen er den samme i alle tværsnit af et lederstykke. Vi skal siden se, at en elektrisk forstyrrelse langs en leder udbreder sig med lyshastigheden c eller i hvert fald med en betydelig brøkdel deraf. Har kredsen en lineær udstrækning L , er den tid, det tager for forstyrrelsen at nå alle dele af kredsen, derfor af størrelsesordenen $t = L/c$. Inden for dette tidsinterval må den drivende elektromotoriske kraft og dermed strømmen lokalt ikke ændre sig væsentligt, hvis betingelsen for kvasistationaritet skal være opfyldt. Varierer den påtrykte elektromotoriske kraft harmonisk med svingningstiden $\tau = 1/\nu$, hvor ν er frekvensen, kan vi udtrykke betingelsen for kvasistationaritet som

Betingelse for kvasistationær strøm

$$t \ll \tau \Rightarrow L/c \ll 1/\nu \Rightarrow \boxed{L \ll c/\nu = \lambda}, \quad (11.1)$$

idet λ er bølgelængden af en elektromagnetisk bølge i vacuum med samme frekvens som svingningen i kredsen. Betingelsen for kvasistationaritet er således meget anskueligt, at kredsen skal være *lille* i sammenligning med bølgelængden af den elektromagnetiske stråling, kredsen i givet fald ville udsende. Dette er ikke noget meget restriktivt krav. For almindelig 50 Hz vekselstrøm kan et 1000 km transmissionsnet betragtes som kvasistationært. Almindeligt laboratorieudstyr med en udstrækning på 1 m vil være kvasistationært op til frekvenser på 100 Mhz. I hurtige computere kan der imidlertid i forbindelse med de skarpt formede elektriske impulser forekomme så høje frekvenser, at afvigelsen fra kvasistationaritet bliver mærkbar.

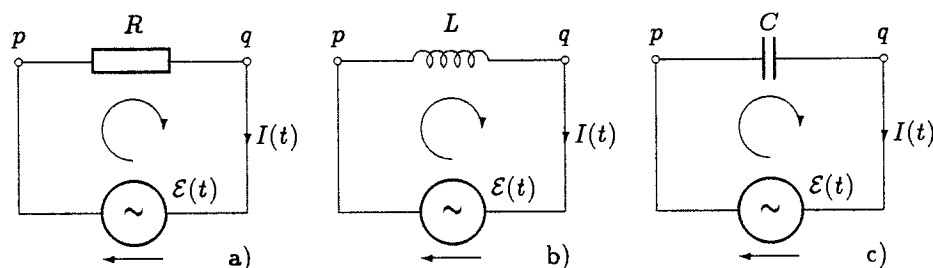
Hvor stor er en lille kreds?

I det følgende skal vi overalt forudsætte kvasistationaritet. Dette medfører, som vi skal se, at de metoder, vi anvendte for jævnstrømsnetværk i afsnit 5.7, kan udvikles til meget kraftige redskaber også for analyse af netværk med tidsvarierende strømme.

11.1 Komponenter og maskeligninger

Ideelle komponenter

Som forberedelse til den generelle behandling skal vi først undersøge, hvordan de fundamentale netværkskomponenter resistans R , induktans L og kapacitans C opfører sig, når de forbindes i serie med en tidsvarierende elektromotorisk kraft. Vi vil antage, at disse komponenter er *ideelle* sådan, at vi eksempelvis kan se bort fra den ladning, der forekommer på overfladen af en resistor eller en induktor, når den har et potential. Dette svarer til, at disse komponenter ikke har nogen kapacitans. Vi vil gå ud fra, at noget tilsvarende gælder generelt, således at R , L og C står for de rene egenskaber resistans, induktans og kapacitans. Ligeledes vil vi gå ud fra, at de forbindende ledninger ikke har nogen af disse egenskaber. Afvigelser fra idealitet optræder naturligvis for alle fysiske kredse og komponenter, men eksempelvis den indre resistans i en spole antages da at kunne indføres som en lokaliseret, særskilt resistans i serie med spolen.



Figur 11.1: Seriekredse med de fundamentale komponenter R , L eller C .

R alene

Vi ser først på en resistans, som er forbundet i serie med en tidsvarierende elektromotorisk kraft $\mathcal{E}(t)$, fig. 11.1a. Her vil der til enhver tid løbe en strøm $I(t)$ i kredsen bestemt af Ohms lov 5.49 eller 5.55.

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = RI(t).} \quad (11.2)$$

I maskens foreskrevne omløbsretning er der fra punkt p til punkt q et spændingsfald $V = RI$ over resistansen. Ligesom for jævnstrøm udtrykker 11.2, at den elektromotoriske kraft er lig det ydre spændingsfald i kredsen.

L alene

Vi ser dernæst på en situation fig. 11.1b, med en induktans L som eneste komponent. En strømændring i induktansen bevirker, at der i denne induceres en elektromotorisk kraft $-L dI/dt$. Retningen af den inducerede elektromotoriske kraft er sådan, at den virker imod den påtrykte. Har punkt p til et bestemt tidspunkt en positiv spænding i forhold til punkt q , er der et spændingsfald $V = L dI/dt$ i den foreskrevne omløbsretning sådan, at

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = L \frac{dI(t)}{dt}.} \quad (11.3)$$

Alternativt kan sagen opfattes sådan, at der optræder to elektromotoriske kræfter $\mathcal{E}$ og $-L dI/dt$ i en resistansfri kreds, hvor da $\mathcal{E} - L dI/dt = 0$ i overensstemmelse med 11.3.

Endelig er der på fig. 11.1c vist en enkelt capacitans C i serie med den elektromotoriske kraft. Har punktet p til et vist tidspunkt t en positiv spænding V i forhold til punkt q , bærer den venstre plade en positiv ladning $Q = CV$. Vi kan for enkelheds skyld forudsætte, at ladningen var $Q = 0$ til tidspunktet $t = 0$. Der gælder da

C alene

$$Q = \int_0^t I(t) dt. \quad (11.4)$$

Spændingsfaldet $V = Q/C$ er igen lig kredsens elektromotoriske kraft, så for capacitanskredsen kan vi skrive

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt. \quad (11.5)$$

Hermed kan vi da opskrive den grundlæggende maskeligning for den kombinerede RLC -seriekreds vist på fig. 11.2, som bliver

RLC i serie

$$\mathcal{E}(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt. \quad (11.6)$$

Denne integral-differentialligning udtrykker Kirchhoffs 2. lov for en seriekreds. Rækkefølgen af komponenterne er ligegyldig. Ligningen udtrykker blot, at den påtrykte elektromotoriske kraft er summen af spændingsfaldene i kredsen. Kirchhoffs 1. lov reducerer i dette tilfælde til et udsagn om, at strømmen til ethvert tidspunkt er den samme gennem alle tværsnit af kredsen.

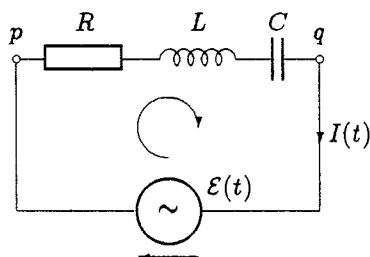
Fra 11.6 kan vi finde en differentialligning for ladningen $Q(t)$ på capacitansen. Idet der gælder $I = dQ/dt$ og $dI/dt = d^2Q/dt^2$ bliver ligningen

Ladning på capacitor

$$\mathcal{E}(t) = L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q. \quad (11.7)$$

I stedet kunne vi differentiere 11.6 én gang efter tiden og finde en differentialligning for strømmen I :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I. \quad (11.8)$$



Figur 11.2: Kreds bestående af en tidsvarierende elektromotorisk kraft i serie med kombinationen RLC .

Velkendt differentialligning

Ligningerne 11.7 og 11.8 er lineære differentialligninger af 2. orden med konstante koefficienter. Som vist i matematikken løses sådanne ligninger ved først at finde den fuldstændige løsning til den homogene ligning, som fås ved at sætte $\mathcal{E}(t) = 0$. Denne løsning kan altid findes ved hjælp af differentialligningens *karakterligning*, og den vil indeholde to arbitrære konstanter. Den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning for et givet $\mathcal{E}(t)$ findes ved at addere en vilkårlig løsning til den inhomogene ligning til løsningen af den homogene ligning. De arbitrære konstanter må derefter bestemmes ud fra begyndelsesbetingelserne. Vi skal i det følgende se flere eksempler på anvendelsen af denne generelle metode.

Transienter defineret

Fysisk kan løsningen til 11.8 i det homogene tilfælde beskrive den strøm, der findes i kredsen, når den ikke er påvirket af nogen ydre elektromotorisk kraft, men blot er startet med en eller anden begyndelsesbetingelse. Denne strøm vil snart dø ud, idet der afsættes effekt i kredsens resistans. Man får imidlertid også den homogene ligning, når den påtrykte elektromotoriske kraft er konstant. Indeholder kredsen ikke nogen capacitor, bliver løsningen efter en tid en konstant jævnstrøm bestemt af kredsens resistans. Er der en capacitor i kredsen, bliver der ingen varig strøm, men en konstant slutspænding over capaciteten. Denne type fænomener skal vi under ét kalde *transiente* (forbigående). Transienter behandles i afsnit 11.2.

Den vigtige sinusspænding

I praksis er de vigtigste tilfælde dem, hvor den påtrykte elektromotoriske kraft er en sinusformet vekselspænding. Ved indkoblingen af denne kan der opstå transiente fænomener, som imidlertid efter en tid dør ud, hvorpå der i kredsen kun forekommer en vekselstrøm med samme frekvens som den påtrykte spænding og med konstant amplitude og fase. En sådan vekselstrøm kaldes *stationær*. Stationære vekselstrømme behandles i afsnit 11.3.

Kirchhoffs love

Komponenterne R , L , C og desuden gensidig induktans M , kan selv sagt indgå i mere komplicerede netværk med flere masker og eventuelt flere påtrykte elektromotoriske kræfter. Det værktøj, som her må anvendes, er fortsat Kirchhoffs love, som vi kan angive på formen

1. Summen af alle strømme, som løber ind mod en knude er nul, altså

$$\sum_{\text{knude}} I_j = 0, \quad (11.9)$$

hvor j antager værdierne for de grene, som mødes i knuden.

2. Summen af de elektromotoriske kræfter i en maske er lig summen af spændingsfaldene V_j over komponenterne i hver gren af masken, altså

$$\sum_{\text{maske}} \mathcal{E}_j = \sum_{\text{maske}} V_j. \quad (11.10)$$

Spændingsfaldene for henholdsvis resistans, induktans, gensidig induktans og kapacitans er

$$V_j = R_j I_j, \quad V_j = L_j \frac{dI_j}{dt}, \quad V_j = \sum_k M_{jk} \frac{dI_k}{dt}, \quad V_j = \frac{1}{C_j} \int_0^t I_j dt, \quad (11.11)$$

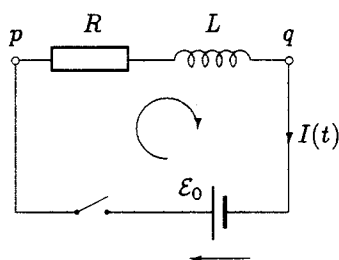
hvor k går over de grene, som har en gensidig induktans til gren j .

I det generelle tilfælde er maskeligningerne et system af sammenhørende integral-differentialligninger, som hurtigt bliver meget kompliceret. Vi skal dog se, at der sker væsentlige forenklinger, når de påtrykte elektromotoriske kræfter varierer harmonisk med tiden.

11.2 Transienter

En transient i et elektrisk netværk er et ikke-periodisk forløb fremkaldt af en forbigående ydre påvirkning. I dette afsnit skal vi især interessere os for tilfælde, hvor påvirkningen er simpel ind- eller udkobling af en konstant elektromotorisk kraft. Løsningen af de optrædende differentiaalligninger er da meget enkel. I praksis er den ydre påvirkning ofte elektriske impulser af mere kompliceret art, hvor differentiaalligningerne mest hensigtsmæssigt løses ved andre metoder, herunder anvendelse af den såkaldte *Laplacetransformation*.

*Forbigående
påvirkning*



Figur 11.3: Seriekreds med R og L og konstant elektromotorisk kraft $\mathcal{E}_0$.

► **Serieforbindelse af R og L :** Som første eksempel skal vi (fig. 11.3) se på en serieforbindelse af en resistans R og en induktans L . Den ydre påvirkning er en konstant elektromotorisk kraft $\mathcal{E}_0$, eksempelvis et batteri, som pludselig indkobles ved hjælp af en kontakt. Vi skal antage, at indkoblingen sker til tiden $t = 0$ sådan, at $\mathcal{E} = 0$ for $t < 0$ og $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ for $t \geq 0$, som vist på fig. 11.4a.

R og L

Da der ikke er nogen kapacitans i kredsen, får maskeligningen 11.6 den simple form

$$\mathcal{E} = RI + L \frac{dI}{dt}, \quad (11.12)$$

altså en 1. ordens differentiaalligning.

Vi løser først den homogene ligning, som findes ved at sætte $\mathcal{E} = 0$, og som kan skrives på formen

Metode

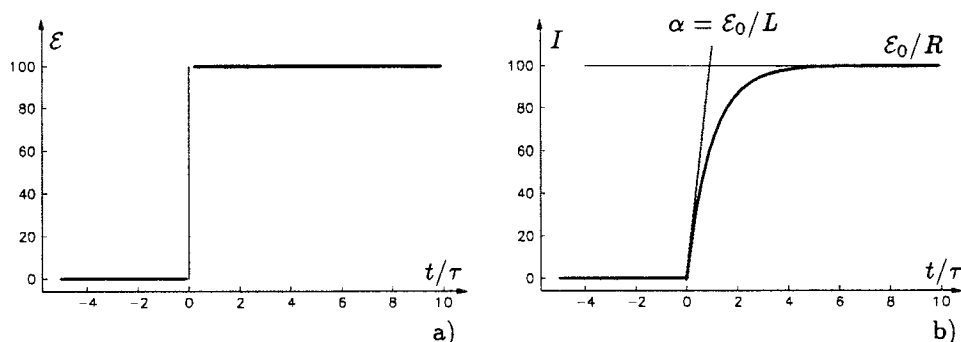
$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I. \quad (11.13)$$

Denne ligning har løsningen

$$I(t) = Ke^{-Rt/L}, \quad (11.14)$$

hvor K er en arbitrær konstant.

Vi skal nu finde integralet til den inhomogene ligning. For $t < 0$ er denne identisk med den homogene ligning og har løsningen $I = 0$, da kredsen er strømfri før indkoblingen af $\mathcal{E}_0$. For $t \geq 0$ ser man umiddelbart, at $I = \mathcal{E}_0/R$ er et partikulært integral. Fysisk er $\mathcal{E}_0/R$ den stationære jævnstrøm, som



Figur 11.4: Et transient forløb af spænding og strøm i en RL -kreds.

til slut indstiller sig i kredsen. Dette ses også af den inhomogene ligning, idet dI/dt sættes til 0. Det fuldstændige integral for $t \geq 0$ bliver altså

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} - K e^{-Rt/L}. \quad (11.15)$$

Begyndelses-
betingelse
brugt

Konstanten K skal nu bestemmes fra begyndelsesbetingelserne. Integralkurven 11.15 må starte i punktet $(t, I) = (0, 0)$. Det følger af, at strømmen gennem induktoren ikke brat kan ændre sig fra 0 for $t < 0$ til en endelig værdi for $t = 0$, hvilket ville medføre en uendelig høj induceret spænding $L dI/dt$ i strid med 11.12. Efter 11.15 bliver da $K = \mathcal{E}_0/R$ og således

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} [1 - e^{-Rt/L}]. \quad (11.16)$$

Dette strømforløb er vist på fig. 11.4b.

Exponenten i 11.15 eller 11.16 kan skrives som $-t/(L/R)$. Størrelsen

$$\tau = L/R \quad (11.17)$$

Tidskonstant
defineret

er således en tid, som kaldes *tidskonstanten* for den pågældende kreds. Jo mindre tidskonstant, des hurtigere når strømmen op på sin slutværdi $\mathcal{E}_0/R$. For $t = \tau$ er I 63% af slutværdien, for $t = 5\tau$ er den 99%. Man kan også bemærke, at kurvens begyndeshældning er $dI/dt = \mathcal{E}_0/L$, hvilket også følger af 11.12 med $I = 0$. Uden at løse differentialligningen kan man ved hjælp af disse enkle sammenhænge skitsere strømforløbet med god nøjagtighed.

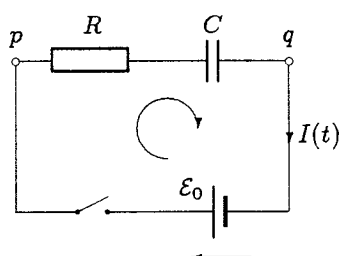
Med en lignende metode kan man beregne strømmen, dersom batteriet i en stationær RL -kreds pludselig fjernes og erstattes af kortslutning

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-Rt/L}. \quad (11.18)$$

Strømmen aftager her exponentielt mod nul fra sin stationære værdi. <

R og C

▷ Serieforbindelse af R og C : Vi skal nu kort se på (fig. 11.5) en serieforbindelse af en resistans R og en kapacitans C . Den ydre påvirkning er igen en pludselig indkobling af en konstant elektromotorisk kraft $\mathcal{E}_0$ til tiden $t = 0$, som vist på fig. 11.6. Problemer af denne type mødes ofte ved op- eller afladning af kondensatorer eller individuelle ledere. I dette tilfælde er



Figur 11.5: Seriekreds med R og C og konstant elektromotorisk kraft $\mathcal{E}_0$.

der ikke nogen induktans i kredsen og maskeligningen 11.6 får formen

$$\mathcal{E} = RI + \frac{1}{C} \int_0^t I dt, \quad (11.19)$$

altså en integralligning. Ved differentiation heraf under hensyn til, at $\mathcal{E}$ er konstant, finder vi den homogene differentialligning

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0, \quad (11.20)$$

som har løsningen

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC}. \quad (11.21)$$

Her er I_0 begyndelsestrømmen, som efter 11.19 bliver $I_0 = \mathcal{E}_0/R$, idet vi benytter, at ladningen på capacatoren er 0 for $t = 0$. Den endelige løsning til problemet bliver således

Aftagende strøm

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-t/RC}. \quad (11.22)$$

Dette strømforløb er vist på fig. 11.6a. Tidskonstanten bliver her

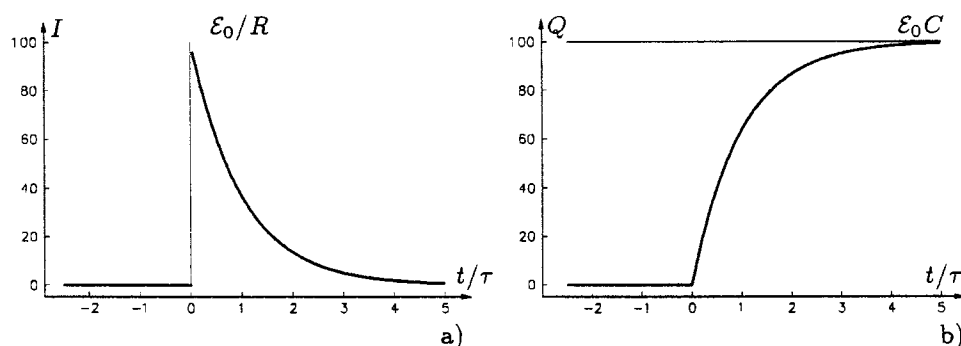
$$\tau = RC. \quad (11.23)$$

Ladningen på capacatoren kan findes ved direkte integration af differentialligningen 11.7 eller enklere, ved integration af 11.22 fra 0 til t . Resultatet bliver

Voksende ladning

$$Q(t) = \mathcal{E}_0 C [1 - e^{-t/RC}]. \quad (11.24)$$

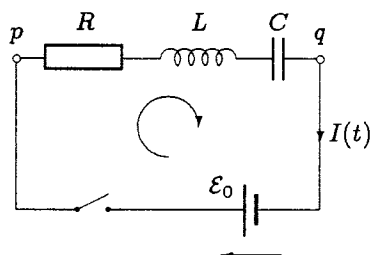
Ladningen vokser her mod sin slutværdi $Q = \mathcal{E}_0 C$, sml. fig. 11.6b og 2.153. $\triangleleft$



Figur 11.6: Et transient forløb af strøm og kondensatorladning i en RC -kreds.

R , L og C

▷ Serieforbindelse af R , L og C : Som sidste eksempel skal vi se på den fuldstændige seriekreds fig. 11.7, hvor der både er en resistans, en induktans og en kapacitans tilstede. Strømførløbet for en pludselig indkobling af en ydre elektromotorisk kraft bliver da mere kompliceret og må opdeles i en række specialtilfælde.



Figur 11.7: Seriekreds med R , L og C og konstant elektromotorisk kraft ε_0 .

Homogen
ligning

Det er her hensigtsmæssigt at starte med den grundlæggende maskeligning på differentieret form, altså 11.8. Da den påtrykte elektromotoriske kraft er konstant både for $t < 0$ og $t \geq 0$, bliver ligningen homogen og af 2. orden. Efter division med L kan den skrives som

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0. \quad (11.25)$$

Linieelement
fastlægges

Da der er en serieinduktans i kredsen, må begyndelsesstrømmen være 0 og tilsvarende må ladningen på capacitoren efter 11.4 være 0. Af 11.6 følger da straks, at det søgte integral må indeholde linieelementet $(t, I, dI/dt) = (0, 0, \varepsilon_0/L)$.

Differentialligningen 11.23 har karakterligningen

$$r^2 + \frac{R}{L} r + \frac{1}{LC} = 0, \quad (11.26)$$

med rødderne

$$r = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (11.27)$$

3 tilfælde:

Ved den videre diskussion må vi nu skelne mellem tre tilfælde bestemt af fortegnet på diskriminanten:

a) $R > 2\sqrt{L/C}$ en situation, der betegnes som *overdæmpning*. Karakterligningen har her to reelle rødder, som vi kan skrive

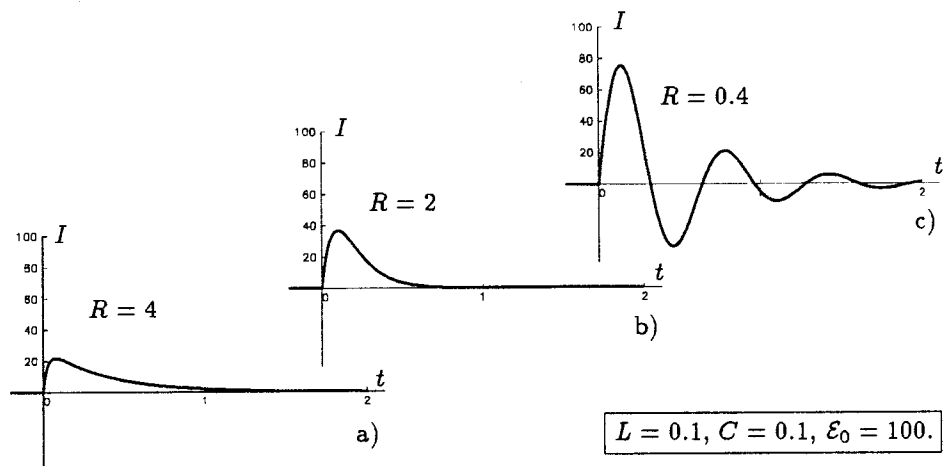
$$r_1 = -\frac{R}{2L} + \alpha, \quad r_2 = -\frac{R}{2L} - \alpha, \quad (11.28)$$

hvor

$$\alpha = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \quad (11.29)$$

som er reel. Det fuldstændige integral bliver

$$I = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}, \quad (11.30)$$



Figur 11.8: Strømførløbet ved overdæmpning, kritisk dæmpning og underdæmpning i RLC -kreds.

hvor konstanterne k_1 og k_2 skal bestemmes, så det partikulære integral går gennem linieelementet $(t, I, dI/dt) = (0, 0, \mathcal{E}_0/L)$. Man finder $k_1 = -k_2 = \mathcal{E}_0/2\alpha L$, hvorefter strømmen bliver

Over-
dæmpning

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{2\alpha L} e^{-Rt/2L} (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}). \quad (11.31)$$

Det overdæmpede strømførløb er vist på fig. 11.8a.

b) $R = 2\sqrt{L/C}$ en situation, der betegnes som *kritisk dæmpning*. Karakterligningen har her sammenfaldende, reelle rødder

$$r_1 = r_2 = -\frac{R}{2L}, \quad (11.32)$$

hvortil der svarer det fuldstændige integral

$$I = k_1 e^{r_1 t} + k_2 t e^{r_1 t}. \quad (11.33)$$

Det partikulære integral skal indeholde linieelementet $(0, 0, \mathcal{E}_0/L)$, hvilket giver $k_1 = 0$ og $k_2 = \mathcal{E}_0/L$ og strømmen

Kritisk
dæmpning

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{L} t e^{-Rt/2L}. \quad (11.34)$$

Det kritisk dæmpede strømførløb er vist på fig. 11.8b.

c) $R < 2\sqrt{L/C}$ en situation, der betegnes som *underdæmpning*. Karakterligningen har to komplekse rødder, der kan skrives som

Under-
dæmpning

$$r_1 = -\frac{R}{2L} + i\omega_n, \quad r_2 = -\frac{R}{2L} - i\omega_n, \quad (11.35)$$

hvor vi har indført kredsens *naturlige frekvens*

Frekvens

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad (11.36)$$

som er reel, og for svag dæmpning (R lille) meget nær *resonansfrekvensen* $1/\sqrt{LC}$, som vi siden skal møde. Det fuldstændige integral bliver

$$I = e^{-Rt/2L}(k_1 e^{i\omega_n t} + k_2 e^{-i\omega_n t}). \quad (11.37)$$

Oscillerende
strøm

Det partikulære integral skal gå gennem linieelementet $(0, 0, \mathcal{E}_0/L)$, hvilket giver $k_1 = -k_2 = \mathcal{E}_0/2i\omega_n L$ og strømmen

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega_n L} e^{-Rt/2L} \sin \omega_n t. \quad (11.38)$$

Dette underdæmpede strømforløb, som til forskel fra de to foregående er oscillatorisk, er vist på fig. 11.8c. <

▷ Svagt dæmpet svingning: Hvis $R \ll 2\sqrt{L/C}$ for kredsen fig. 11.7 giver 11.38 en praktisk talt ren sinussvingning (fri svingning) med cyklisk frekvens $\omega = 1/\sqrt{LC}$ og periode $T = 2\pi/\omega$. Forholdet mellem den maximale strøm for to successive udsving, m og $m+1$, er med god tilnærmelse bestemt af exponential funktionen alene. Man skriver sædvanligvis

$$\delta = \ln \frac{I_m}{I_{m+1}} \simeq \frac{RT}{2L} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\pi R}{L\omega}, \quad (11.39)$$

Godhed Q

hvor δ kaldes det *logaritmiske decrement*. Den dimensionsløse størrelse,

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{L\omega}{R} \quad (11.40)$$

(ikke ladning!), omtales som kredsens *kvalitetsfaktor* eller *godhed*. <

▷ Effekt og energi ved transienter: Den øjeblikkelige effekt, som afgives af den elektromotoriske kraft under en transient, er $P = \mathcal{E}_0 I(t)$. Effekten afsættes dels som varme i kredsens resistanser og dels som elektrokinetisk og elektropotentiel energi i induktanser og capacitanser.

Energi
bevaret

Som eksempel kan vi se på opladningen af en capacitor, som illustreret på fig. 11.5-11.6. Lad U være den af batteriet afgivne energi under hele forløbet og U_R og U_C den energi, som henholdsvis er afsat i R og oplagret i C . Med benyttelse af udtrykkene 11.22 og 11.24 for strøm og ladning bliver

$$\begin{aligned} U &= \int_0^t \mathcal{E}_0 I dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-t/RC} dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} \left[-RC e^{-t/RC} \right]_0^\infty = \mathcal{E}_0^2 C, \\ U_R &= \int_0^\infty RI^2 dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} \left[-\frac{RC}{2} e^{-2t/RC} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2 C, \\ U_C &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2 C, \end{aligned}$$

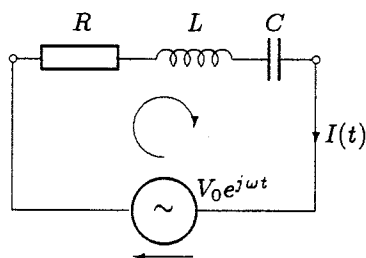
hvor man bemærker, at $U = U_R + U_C$ og $U_R = U_C = U/2$. Ved opladningen oplagres således kun halvdelen af energien i capacitoren, mens den anden halvdel tabes i resistansen. Dette gælder også, hvis resistansen udelukkende er indre resistans i den elektromotoriske kraft. <

11.3 Sinusformet vekselstrøm

Vi skal nu betragte vekselstrømme, som er periodiske sådan, at et givet strømforløb gentager sig efter en vis tidsperiode τ , der kaldes svingningstiden. De vigtigste tilfælde er dem, hvor strømmen er en sinusfunktion af tiden. Dels fordi sådanne strømme i praksis spiller langt den største rolle. Dels fordi andre periodiske forløb efter Fouriers teorem altid kan opløses i eller syntetiseres fra harmonisk varierende strømme. I de følgende koncentrerer vi os derfor om beskrivelsen af kredsløb, hvor strømme og spændinger varierer harmonisk med en enkelt cyklisk frekvens $\omega = 2\pi/\tau$. Det skal dog huskes, at en løsning til et kredsløbsproblem, eksempelvis et udtryk for strømmen for en given påtrykt elektromotorisk kraft, vil afhænge af frekvensen. Ved analyse eller syntese af ikke-harmoniske forløb er det derfor nødvendigt, at betragte hver Fourier-komponent for sig.

*Periodisk
vekselstrøm*

*Harmonisk
emk*



Figur 11.9: RLC seriekreds med påtrykt harmonisk varierende spænding.

Vi kan indføre nogle vigtige metoder og begreber ved at betragte RLC -seriekredsen 11.9. Den påtrykte elektromotoriske kraft, som vi i dette afsnit oftest blot vil kalde spændingen og betegne med $V = V(t)$, varierer harmonisk med tiden som

$$V = V_0 \cos \omega t. \quad (11.41)$$

Opgaven er, at finde strømmen i kredsen ved løsning af den grundlæggende maskeligning, som vi skal anvende på den differentierede form 11.8 og som her bliver

$$-\omega V_0 \sin \omega t = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I. \quad (11.42)$$

Vi løser nu først den homogene ligning og adderer dernæst et partikulært integral til den inhomogene ligning. Men den homogene ligning er identisk med 11.25 og dens løsninger vil have én af formerne 11.31, 11.34 eller 11.38, som alle er exponentielt dæmpede med faktoren $\exp(-Rt/2L)$. Den homogene løsning bidrager til strømmen efter, at spændingen tilsluttes, eksempelvis til $t = 0$, men dør bort efter nogle få tidskonstanter forløb. Vi er derfor hovedsagelig interesseret i at finde den partikulære løsning til 11.42. Dette er den tvungne svingnings problem, hvis løsning er en harmonisk svingende strøm med samme frekvens, men ikke nødvendigvis samme fase, som den påtrykte spænding.

Ved løsning af vekselstrømsproblemer er det ofte fordelagtigt at arbejde med *komplekse* spændinger og komplekse strømme. I stedet for den reelle spænding 11.41, indfører vi derfor den komplekse spænding

1. Reel spænding

*2. Komplex
spænding*

$$\boxed{V = V_0 e^{j\omega t}}, \quad (11.43)$$

hvor vi, i overensstemmelse med sædvanlig elektroteknisk praksis, anvender j til at betegne den komplekse enhed i . Er V_0 reel, er realdelen af 11.43 den fysiske påtrykte spænding 11.41. Der er dog ikke noget i vejen for at lade V_0 være kompleks. Realdelen af 11.43 angiver da fysisk en påtrykt spænding, som er faseforskudt i forhold til 11.41.

Den komplekse strøm i kredsen vil vi skrive som

$$I = I_0 e^{j\omega t}, \quad (11.44)$$

hvor I_0 i almindelighed vil være kompleks.

Vi finder den komplekse strøm ved at indsætte 11.43 og 11.44 i differentiaalligningen 11.42, hvilket giver

$$j\omega V_0 e^{j\omega t} = \left[-\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C} \right] I_0 e^{j\omega t}. \quad (11.45)$$

Her kommer
det smarte

Efter bortforkortning af den exponentielle tidsfaktor og division med $j\omega$ bliver

$$V_0 = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] I_0, \quad (11.46)$$

som er en *algebraisk ligning* til bestemmelse af relationen mellem I_0 og V_0 for RCL -seriekredsen. Herefter er problemet med at finde den til en given vekselspænding svarende strøm i princippet løst, idet 11.46 bestemmer det komplekse I_0 . Den tidsvarierende strøm bestemmes da af 11.44 og realdelen heraf giver den til realdelen af 11.43 svarende *fysiske strøm*. Vi skal mere detaljeret diskutere denne løsning i de følgende afsnit.

11.3.1 Impedans

Vi kan skrive relationerne 11.45 og 11.46 som

$$V = ZI, \quad \text{eller} \quad V_0 = ZI_0, \quad (11.47)$$

hvor den første relation forbinder den tidsvarierende spænding V og den tidsvarierende strøm I , den anden den konstante spænding V_0 og den konstante strøm I_0 . Oftest vil man underforstå den harmoniske tidsfaktor $e^{j\omega t}$ og ikke skelne mellem V og V_0 eller mellem I og I_0 . Relationerne 11.47 er fuldstændig analoge med Ohms lov 5.12, men hvor nu alle de indgående størrelser er komplekse. Vi har specielt indført den komplekse størrelse

Udvidet
Ohms lov

$$Z = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right), \quad (11.48)$$

Impedans
måles i Ω

som kaldes seriekredsens *impedans* og måles i Ω . Bemærk, at impedansen af en resistans alene er R , af en induktans alene $j\omega L$ og af en kapacitans alene $1/j\omega C$.

Impedans er et meget vigtigt begreb i elektrotekniken. Det er ikke specielt knyttet til seriekredse. Med henvisning til 11.47 kan man tale om impedansen af en hvilken som helst kombination af passive komponenter, som forbinder to punkter af en gren. Impedans har, som det fremgår, kun

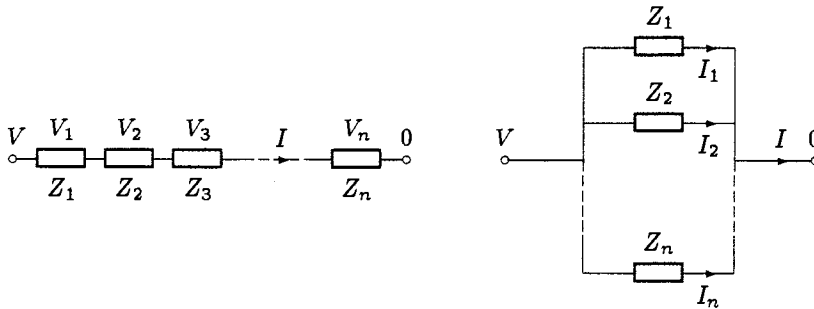
mening for harmonisk varierende spændinger og strømme og afhænger af frekvensen. Man skriver ofte

$$\boxed{Z = R + jX,} \quad (11.49)$$

hvor R kaldes *resistanskomponenten* og X *reaktansen*. For den ovenfor betragtede seriekreds er resistanskomponenten blot kredsens resistans, mens reaktansen er $X = L\omega - 1/C\omega$. For andre kredse gælder andre, som regel mere komplicerede udtryk.

Resistans og reaktans

I elektriske diagrammer angives en uspecificeret impedans Z med samme symbol som en resistans, altså $\square$. Impedanser kan forbindes sammen i serie eller parallel, se fig. 11.10. Den samlede impedans beregnes efter fuldstændig samme regler som ved sammensætning af resistanser.



Figur 11.10: Impedanser i serie og i parallel.

I serieforbindelse af impedanserne $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, løber der samme strøm I gennem dem alle. Spændingen over hver impedans bliver $V_1 = Z_1 I$, $V_2 = Z_2 I, \dots, V_n = Z_n I$. Den totale spænding V over alle impedanserne er da bestemt ved

Impedanser i serie

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n)I = ZI. \quad (11.50)$$

Den ekvivalente impedans Z af n serieforbundne impedanser bliver altså

$$\boxed{Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n.} \quad (11.51)$$

I parallelforbindelse er der samme spænding V over alle impedanser. Gennem dem løber strømmene $I_1 = V/Z_1, I_2 = V/Z_2, \dots, I_n = V/Z_n$. Den samlede strøm I gennem alle impedanserne bliver derfor

Impedanser i parallel

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n} \right) V = \frac{V}{Z}. \quad (11.52)$$

Den ekvivalente impedans Z af n parallelforbundne impedanser bestemmes altså af

$$\boxed{\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}.} \quad (11.53)$$

For kun to parallelforbundne impedanser benytter man oftest med fordel udtrykket

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (11.54)$$

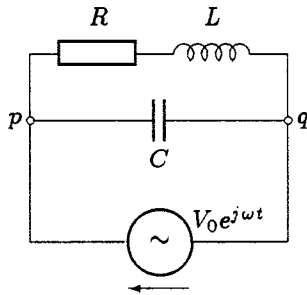
der undertiden skrives som $Z_1 \parallel Z_2$.

Gode råd

Så længe impedanser blot er uspecificerede komplekse størrelser Z er beregninger med dem ikke mere komplicerede end med resistanser. Det samme gælder løsningen af Kirchhoffs ligninger for strømmene I . Ved større beregninger står man sig derfor ved så langt som muligt at benytte denne form. Til slut er det dog som regel nødvendigt at indføre udtrykket 11.48 for impedansen i de enkelte grene af et netværk, hvilket ved bogstavregning hurtigt kan føre til besværlige regnestykker. Er impedanserne givet som talværdier, bliver beregningerne væsentlig enklere og kan særdeles effektivt udføres med en elektronisk regnemaskine.

Ret komplekst

▷ Impedans ved parallelforbindelse: Som eksempel på omfanget af beregningerne ved blot tre komponenter, kan vi finde impedansen af den hyppigt forekommende kombination fig. 11.11, hvor en induktans L i serie med en resistans R er forbundet parallelt med en kapacitans C .



Figur 11.11: Parallelforbindelse af RL og C .

Ved direkte indsætning i 11.54 af $Z_1 = R + j\omega L$ og $Z_2 = 1/j\omega C$ finder man for impedansen Z mellem punkterne p og q :

$$\begin{aligned} Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} &= \frac{(R + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{(R + j\omega L) \left(R - j\omega L - \frac{1}{j\omega C} \right) \frac{1}{j\omega C}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \\ &= \frac{(R + j\omega L) [(1 - \omega^2 LC) - j\omega RC]}{\omega^2 R^2 C^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}, \end{aligned}$$

*Resistans
og reaktans*

hvorefter man kan adskille realdel og komplexdel og dermed, jvf. udtrykket $Z = R + jX$, finde resistanskomposant og reaktans hver for sig

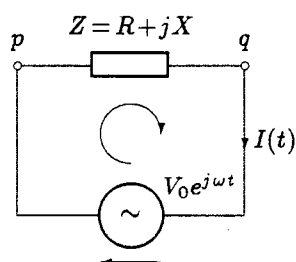
$$Z = \frac{R}{\omega^2 R^2 C^2 + (1 - \omega^2 LC)^2} + j \frac{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega R^2 C}{\omega^2 R^2 C^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}. \quad (11.55)$$

Som det fremgår, er resistanskomposanten her frekvensafhængig og hverken resistanskomposanten eller reaktansen har nogen simpel relation til impedanserne af de enkelte komponenter. ◁

11.3.2 Vekselstrøm og vekselspænding som vektorer

Vekselstrømsproblemer behandles både effektivt og regnemæssigt sikkert med rent algebraiske metoder anvendt på komplekse størrelser. Det kan dog i visse situationer være fordelagtigt at anskueliggøre impedanser, strømme og spændinger som *vektorer*. Disse kan udmærket være reelle, men af hensyn til forbindelsen med det foregående skal vi her benytte vektorer i den komplekse plan. Konkret kan vi tænke på en seriekreds som vist på fig. 11.12, hvor den viste enkelte impedans kan repræsentere et kompliceret netværk, som forbinder punkterne p og q .

*Et andet
billede*



Figur 11.12: Serie-kreds med elektromotorisk kraft og en enkelt belastningsimpedans.

Enhver impedans kan skrives på formen

$$Z = R + jX, \quad (11.56)$$

*Impedans på
polar form*

men i mange forbindelser er det hensigtsmæssigt sideløbende at anvende impedansen på polar form

$$Z = |Z|e^{j\varphi}. \quad (11.57)$$

Impedansens absolutte værdi (modulus) er

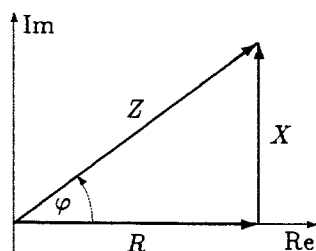
$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (11.58)$$

mens fasevinklen (argumentet) φ bestemmes ved

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}, \quad (11.59)$$

eller ved en af relationerne

$$\cos \varphi = \frac{R}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{X}{|Z|} = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}. \quad (11.60)$$



Figur 11.13: Vektordiagram for en impedans. Diagrammet omtales som *impedanstrekanten*. Se også fig. 11.15.

Impedans-
diagram

Relationerne 11.56-11.60 er illustreret på vektordiagrammet fig. 11.13, hvor resistanskomponenten ligger langs den reelle akse og reaktansen langs den imaginære. Med passive komponenter er resistanskomponenten altid positiv sådan, at $\cos \varphi \geq 0$. Fasevinklen kommer derfor til at ligge i intervallet $\pi/2 \geq \varphi \geq -\pi/2$. Reaktansen derimod kan have begge fortegn. Med henvisning til impedansen 11.48 af den simple seriekreds, kalder man en positiv reaktans *induktiv*, mens en negativ reaktans kaldes *capacitiv*. I det induktive tilfælde blive fasevinklen positiv, i det capacitive negativ.

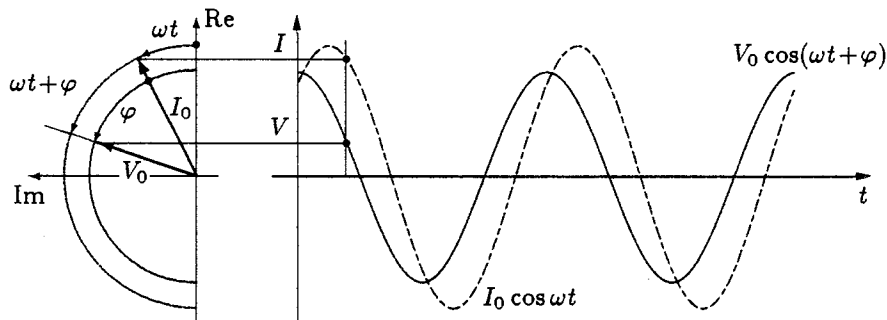
Strøm givet

Vi antager nu, at der i kredsen fig. 11.12 løber en harmonisk varierende strøm

$$I = I_0 e^{j\omega t}, \quad (11.61)$$

Roterende
vektorer

hvor vi kan opfatte I_0 som reel. I et vektordiagram fremstilles denne strøm ved en vektor med længde I_0 , som roterer med vinkelhastighed ω . Til tiden $t = 0$ ligger vektoren langs den reelle akse, til tiden t har den drejet sig en vinkel ωt , som vist på fig. 11.14. Den fysiske strøm er til enhver tid strømvektorens projektion $I_0 \cos \omega t$ på den reelle akse.



Figur 11.14: Sinusformet vekselstrøm og spænding som roterende vektorer.

Spændingen over impedansen bliver efter 11.47 og 11.57

$$V = ZI = |Z|e^{j\varphi} I_0 e^{j\omega t} = |Z|I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (11.62)$$

Spænding
fundet

Den komplekse spænding repræsenteres af en vektor med længde $|Z|I_0$, der roterer med samme vinkelhastighed ω som strømvektoren, men drejet en fast vinkel φ i forhold til denne. Vi kan skrive spændingen som

$$V = V_0 e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (11.63)$$

Da φ er explicit angivet, bliver $V_0 = |Z|I_0$ reel. Den fysiske spænding er spændingsvektorens projektion $V_0 \cos(\omega t + \varphi)$ på den reelle akse. Er φ positiv, siger man, jvf. omløbsretningen på vektordiagrammet, at strømmen følger efter spændingen.

Spænding givet

Er det omvendt spændingen, der er givet som

$$V = V_0 e^{j\omega t}, \quad (11.64)$$

finder man strømmen som

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{1}{|Z|} e^{-j\varphi} V_0 e^{j\omega t} = \frac{V_0}{|Z|} e^{j(\omega t - \varphi)}. \quad (11.65)$$

Den komplekse strøm repræsenteres her af en vektor med længde $V_0/|Z|$, som er drejet en vinkel $-\varphi$ i forhold til spændingsvektoren. For φ positiv følger strømmen igen efter spændingen. Vi kan skrive strømmen som

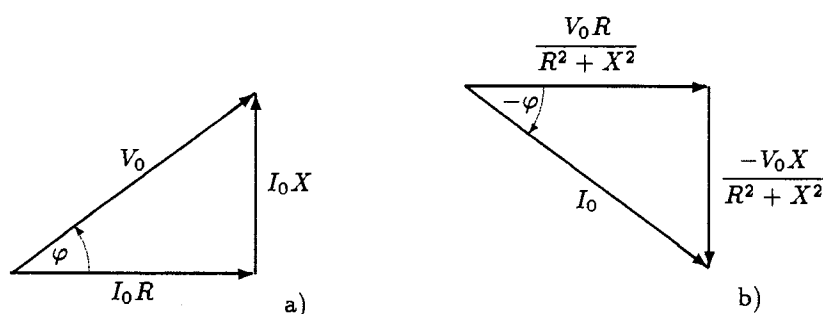
Strøm fundet

$$I = I_0 e^{j(\omega t - \varphi)}, \quad (11.66)$$

hvor $I_0 = V_0/|Z|$ er reel.

I vektordiagrammet roterer V og I sammen som vektorer af fast længde og med en fast vinkel mellem sig. På samme måde som man ved algebraiske beregninger ser bort fra den harmoniske tidsfaktor $e^{j\omega t}$, kan man her oftest

Diagram for



Figur 11.15: a) Bestemmelse af spændingen over en impedans når strømmen er givet. b) Bestemmelse af strømmen gennem en impedans, når spændingen er givet.

se bort fra vektorernes rotation og kun interessere sig for deres indbyrdes størrelse og beliggenhed.

Betragter vi f. eks. 11.61 til $t = 0$, ligger I -vektoren langs den reelle akse. Den tilhørende spænding bliver da efter 11.62 og 11.60

$I \Rightarrow V$

$$V_0 = |Z|I_0 e^{j\varphi} = |Z|I_0(\cos \varphi + j \sin \varphi) = I_0(R + jX), \quad (11.67)$$

som også følger direkte af 11.47. Hertil svarer vektordiagrammet fig. 11.15a, som er ligedannet med impedanstrekanten 11.13 med alle dimensioner multipliceret med I_0 .

Benytter vi på samme måde 11.64 til $t = 0$, er det V -vektoren, som ligger langs den reelle akse. Strømmen bliver her efter 11.65 og 11.60

$V \Rightarrow I$

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j\varphi} = \frac{V_0}{|Z|}(\cos \varphi - j \sin \varphi) = \frac{V_0}{R^2 + X^2}(R - jX). \quad (11.68)$$

Det tilsvarende vektordiagram er vist på fig. 11.15b. Det er ligedannet med impedanstrekanten spejlet i den reelle akse og med alle dimensioner multipliceret med $V_0/(R^2 + X^2)$.

11.3.3 Effekt i vekselstrømskredse

Effekt
-lige nu

Den øjeblikkelige effekt $P(t)$, som afsættes i en vekselstrømskreds, er på sædvanlig måde produktet af strøm og spænding, altså

$$P(t) = I(t)V(t). \quad (11.69)$$

I det stationære tilfælde er det imidlertid mere relevant at kende *tidsmiddelværdien* af effekten. Desuden skal man være opmærksom på, at strøm og spænding i 11.69 skal være de fysiske størrelser, altså være reelle. Da resultatet af en netværksberegning ofte vil foreligge som komplekse værdier, er det bekvemt at kunne udtrykke middeffekten direkte ved dem.

Middelværdi
komplekst

For at opnå dette anvender vi følgende generelle teorem (se *Bølger* eq. 5.22-5.23): Hvis det gælder om to komplekse, harmonisk varierende størrelser, f og g , at

$$f = f_0 e^{j\omega t} \quad \text{og} \quad g = g_0 e^{j\omega t}, \quad (11.70)$$

hvor f_0 og g_0 er komplekse størrelser, som ikke afhænger af tiden, da er

$$\langle \text{Re } f \circ \text{Re } g \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(f^* \circ g), \quad (11.71)$$

hvor $\circ$ efter situationen angiver ordinær, skalar eller vektoriel multiplikation.

Nyttige udtryk

Vi anvender nu 11.71 på effekten i en vekselstrømskreds, hvor strøm og spænding er givet ved udtryk af formen 11.61 og 11.62. Middeffekten er da bestemt ved hvert af følgende udtryk:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}(I^* V) = \frac{1}{2} \text{Re}(I_0 V_0 e^{j\varphi}) \\ &= \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \varphi = \frac{1}{2} (V_0^2 / |Z|) \cos \varphi = \frac{1}{2} |Z| I_0^2 \cos \varphi, \end{aligned} \quad (11.72)$$

Fasevinklens
betydning

Disse udtryk understreger, at vekselstrømseffekten afhænger af både størrelsen af strøm og spænding og af fasevinkelen. Faktoren $\cos \varphi$ kaldes *effekt-faktoren*. Er strøm og spænding i fase, dvs. $\varphi = 0$, som det er tilfældet for en ren resistans, bliver effekt faktoren 1. Har strøm og spænding en faseforskel på $\pm \pi/2$, som det er tilfældet for en ren induktans eller kapacitans, bliver effekt faktoren 0, og der afsættes ikke effekt i disse komponenter.

Lad os knytte de fortsatte overvejelser til en simpel seriekreds, som vist på fig. 11.9. Benytter vi det sidste udtryk i 11.72 for $\langle P \rangle$ sammen med 11.60, ser man, at effekten i *impedansen* bliver

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_0^2. \quad (11.73)$$

Al effekt til
resistansen

Men den øjeblikkelige effekt i *resistansen* bliver jo $R I_0^2 \cos^2 \omega t$, der har middelværdien $\frac{1}{2} R I_0^2$. Hele den effekt, som afgives af generatoren afsættes således i resistansen. Der kan ganske vist medgå øjeblikkelig effekt til at opbygge felterne i kredsens kapacitans og induktans, men lidt senere i perioden vil sådanne felter igen aftage, og den oplagrede energi vil returnere til generatoren. Capacitans og induktans er således effektmæssigt neutrale, men de påvirker selvfølgelig den effekt der afsættes i resistansen i og med, at de indgår i den samlede impedans, som bestemmer strømmen gennem resistansen.

I 11.72 angiver I_0 og V_0 de maximale udsving for strøm og spænding. Ofte anvendes i stedet såkaldte *effektive* værdier, der for en sinusformet strøm eller spænding er

*Effektiv
værdi*

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad V_{eff} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}. \quad (11.74)$$

Med de effektive værdier bliver udtrykkene for effekten fra 11.72

$$\langle P \rangle = I_{eff} V_{eff} \cos \varphi = (V_{eff}^2 / |Z|) \cos \varphi = |Z| I_{eff}^2 \cos \varphi. \quad (11.75)$$

I praksis angiver man som regel effektive værdier. Der er derfor mere smæk i 220 V vekselspænding, som har en spidsværdi på $220 \times \sqrt{2} = 311$ V, end i 220 V jævnspænding.

11.3.4 Resonanskredse

I elektriske kredse, som indeholder både induktanser og kapacitanser, kan der for bestemte frekvenser opstå *resonans*, hvor strøm eller spænding antager extreme værdier. Vi skal her indskrænke os til simple kredse, som dem vist på fig. 11.9 eller 11.11, hvor der kun forekommer en enkelt maske med både et L og et C . Disse kredse har kun en enkelt sådan frekvens. Strømmen i seriekredsen 11.9 bestemmes af 11.68

*Fænomenet
resonans*

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j\varphi}, \quad (11.76)$$

hvor impedans og fasevinkel efter 11.48, 11.58 og 11.59 bliver

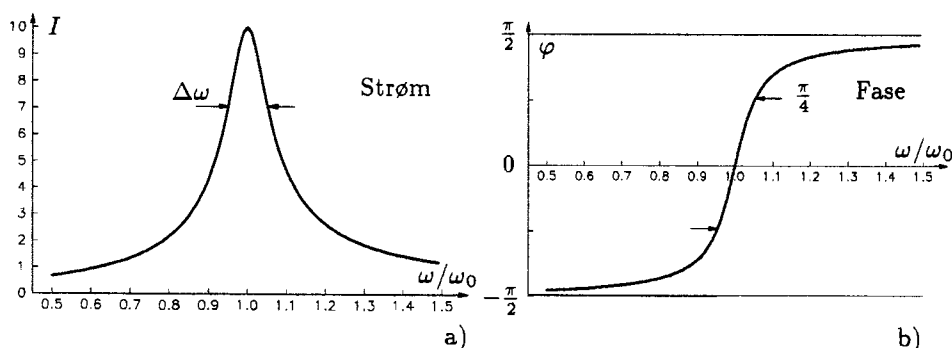
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{L\omega - 1/C\omega}{R}. \quad (11.77)$$

Impedansen antager sin mindste værdi R , når reaktansen er 0. Dette sker for den frekvens ω_0 hvor $L\omega_0 - 1/C\omega_0 = 0$, altså

*Resonans-
frekvens*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (11.78)$$

som er *resonansfrekvensen*. Ved resonansfrekvensen bliver Z rent ohmsk (reel) og fasevinklen φ mellem strøm og spænding bliver 0, i overensstemmelse



Figur 11.16: a) Strømmen i en serie resonanskreds i nærheden af resonansfrekvensen. b) Fasevinklens ændring i nærheden af resonans.

hermed. Efter 11.76 bliver strømmen da maximal med værdien $I_{max} = V_0/R$. Strømmens og fasevinklens forløb i nærheden af resonans som funktion af frekvensen er vist på fig. 11.16

Resonansens
bredde

Resonanskurven fig. 11.16a har en bredde, som for et givet L og C afhænger af størrelsen af R . Jo mindre R , des skarpere resonans. Man angiver ofte resonanskurvens bredde ved afstanden i frekvens mellem de to punkter af kurven, hvor effekten i kredsen er faldet til det halve af maximumseffekten. Efter 11.73 svarer dette til, at strømmen er reduceret med en faktor $1/\sqrt{2}$. Beliggenheden af dette frekvensinterval $\Delta\omega$ fremgår af fig. 11.16.

Bestemmelse
af $\Delta\omega$

Vi kan bestemme $\Delta\omega$ ved følgende overvejelse: Skal strømmen reduceres med en faktor $1/\sqrt{2}$ må impedansen forøges fra sin minimale værdi R til $R\sqrt{2}$, hvilket efter 11.77 indtræffer når

$$L\omega - 1/C\omega = \pm R. \quad (11.79)$$

Heraf følger andengradsligningerne

$$\omega^2 \pm \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \quad (11.80)$$

med løsningerne

$$\omega = \pm \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}. \quad (11.81)$$

$\Delta\omega$ bestemt

Da ω altid skal være positiv kan kun den positive kvadratrods bruges, sådan at forskellen mellem de to frekvenser, jvf. fig. 11.16 bliver

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}. \quad (11.82)$$

Ved svag dæmpning, dvs. $R \ll 2\sqrt{L/C}$, er kvadratroden ikke meget forskellig fra resonansfrekvensen, og punkterne med halv effekt ligger derfor symmetrisk om denne og dermed om resonanskurvens maximum. Man angiver ofte resonanskurvens bredde i forhold til resonansfrekvensen

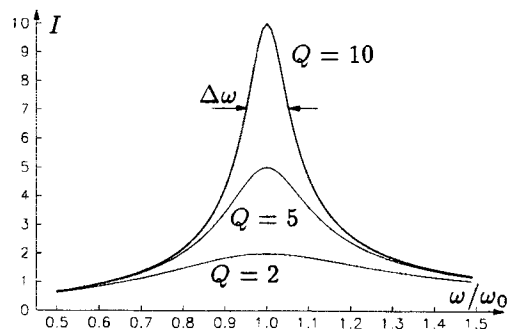
$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{L\omega_0}, \quad (11.83)$$

Godhed Q

hvis reciprokke værdi bliver

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\omega_0}{R}, \quad (11.84)$$

der betegnes som kredsens godhed eller blot som dens Q , sml. 11.40.



Figur 11.17: Resonanskurvens udseende afhænger stærkt af kredsens Q .

Kapitel 12

Maxwells ligninger

På dette tidspunkt er vore begrundelser for systemet af Maxwells ligninger 1.1-1.4 næsten komplette. Der er dog endnu en vigtig tilføjelse at gøre til den 4. ligning eller Ampères lov, som vi efter 8.23 og 8.25 kan skrive på henholdsvis differentiel eller integral form

Målet nær

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = I. \quad (12.1)$$

Kurveintegralet går her langs en lukket Ampèrevej C , som afgrænser fladen S . Disse ligninger skal vi nu fuldstændiggøre, som Maxwell gjorde det i 1873, og derved nå frem til det samlede ligningssystem, der redegør for alle klassiske elektromagnetiske fænomener.

12.1 Forskydningsstrømmen

Vi kan let indse, at ligningerne 12.1 ikke generelt kan stemme med det billede, vi iøvrigt har dannet os af de elektromagnetiske fænomener. Tager vi således divergensen af den differentielle Ampère-lov, finder vi

Der mangler noget

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}. \quad (12.2)$$

Divergensen af enhver rotation er nul, mens vi efter kontinuitetsligningen 5.8 har $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$, som kun i det stationære tilfælde er 0. I det dynamiske tilfælde har vi derfor konflikten

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 \neq \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0. \quad (12.3)$$

Maxwell indså, at problemet var en ufuldstændig definition af strømtætheden $\mathbf{J}$ i 12.1. I stedet for $\mathbf{J}$ må man anvende en strømtæthed $\mathbf{J}'$, hvis divergens er nul. Et sådant $\mathbf{J}'$ kan findes ved at udnytte kontinuitetsligningen sammen med den første Maxwell ligning 3.26, altså $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$. Hermed bliver

Problemet

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), \quad (12.4)$$

der også kan skrives som

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (12.5)$$

Definerer vi derfor en strømtæthed

$$\mathbf{J}' = \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), \quad (12.6)$$

Målet nået

bliver $\nabla \cdot \mathbf{J}' = 0$, og Ampères lov tager den alment gyldige form

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (12.7)$$

Ledningsstrøm
og forskyd-
ningsstrøm

Her kalder man $\mathbf{J}$ for *ledningsstrømtætheden*, på engelsk *conduction current density*, og $\partial \mathbf{D} / \partial t$ for *forskydningsstrømtætheden*, på engelsk *displacement current density*. Maxwells fortjeneste var at indse, at de begge må medtages. Som vi siden skal se, spiller forskydningsstrømmen en afgørende rolle ved hurtigt varierende fænomener.

Strømmen i en
capacitor

I de kvasistationære tilfælde, vi hidtil har betragtet, er der også forskydningsstrømme. Man får et indblik i forskydningsstrømmens natur ved at betragte situationen på fig. 12.1, hvor en capacitor oplades med en strøm, som øjeblikkeligt er I . Vi lægger en Ampèrevæg C rundt om ledningen og betragter to flader S_1 og S_2 , der begge har C som rand.

Gennem fladen S_1 passerer strømmen I . Der er intet $\mathbf{D}$ -felt og derfor ingen forskydningsstrøm her. Ampères lov giver da

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = I. \quad (12.8)$$

Ser vi imidlertid på fladen S_2 , som passerer mellem kondensatorpladerne, så er der ingen ledningsstrøm gennem denne. Uden forskydningsstrøm ville vi med Ampères lov igen ende i en konflikt, idet

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0, \quad (12.9)$$

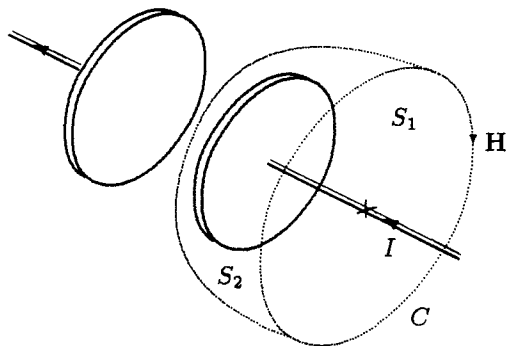
som ikke stemmer med 12.8.

Nu stemmer
det hele

Medtager vi forskydningsstrømmen, løses konflikten. Har kondensatorens plader den øjeblikkelige ladning q og arealet A , bliver $\mathbf{D}$ -feltets størrelse $D = q/A$ og

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = A \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{dq}{dt} = I, \quad (12.10)$$

som helt stemmer med 12.8.



Figur 12.1: Forskydningsstrømmen sikrer gyldigheden af Ampères lov for en kondensator under opladning.

12.2 Det færdige ligningssystem

Vi kan nu, sammen med nogle få kommentarer, præsentere det fuldstændige system af Maxwells ligninger. Det vil sige de fire ligninger 3.26, 6.51, 7.7 og den netop udledte 12.7:

*De fire
ligninger*

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (12.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (12.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (12.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (12.14)$$

Dette er et system af sammenhørende partielle differentialligninger. Som omtalt i de tidligere kapitler, hviler de alle på eksperimentelle erfaringer, som er blevet ekstrapoleret og almindeliggjort. Ligningernes løsninger er felterne $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ og $\mathbf{H}$ som funktion af sted og tid $(\mathbf{r}, t)$. Felternes kilder er ladningstætheden ρ og strømtætheden $\mathbf{J}$, som i almindelighed også vil være funktioner af $(\mathbf{r}, t)$.

*Differentiel
form*

Hvad enten der er tale om felter i vacuum eller felter i materialer, er det nødvendigt at kende de materialeligninger, som knytter felterne sammen. Vi har tidligere diskuteret disse, som eksempelvis er indeholdt i relationerne 3.29, 3.32, 5.10 og 8.28. Er der tale om lineære materialer, kan de sammenfattes i

*Materiale-
ligninger*

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}. \quad (12.15)$$

Det skal bemærkes, at de fire ligninger 12.11-12.14 er afhængige, idet de to divergensligninger kan udledes af de to rotationsligninger samt af kontinuitetsligningen, se opgave 12.2. I overensstemmelse hermed reducerer materialeligningerne 12.15 de uafhængige felter fra fire til to. Divergensligningerne medtages dog oftest på grund af deres umiddelbare fysiske indhold.

Maxwells ligninger på differentiel form er særlig anvendelige ved studiet af hurtigt varierende felter, der udbreder sig i rummet som elektromagnetiske bølger, hvilket bliver emnet i de følgende kapitler. Ved mange praktiske problemer og for kvasistationære felter kan det være mere hensigtsmæssigt at anvende ligningerne på integral form. Vi har tidligere fundet integralformerne for de tre første ligninger. Anvendes Stokes sætning på den fjerde ligning, finder man tilsvarende den generaliserede Ampères lov 12.19:

*Integral
form*

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q, \quad (12.16)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0, \quad (12.17)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (12.18)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I + \frac{d\Psi}{dt}. \quad (12.19)$$

I 12.19 betegner Ψ den elektriske flux, som tidligere er indført ved 3.24.

*Teoriens
fuldstændighed*

Når de fire Maxwell ligninger og materialeligningerne suppleres med udtrykket for Lorentzkraften

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (12.20)$$

har man de nødvendige redskaber til at kunne behandle ethvert klassisk problem vedrørende elektromagnetisme og elektromagnetisk vekselvirkning. Denne påstand, som selvfølgelig ikke kan bevises, bygger hovedsagelig på, at man gennem mere end hundrede år har anvendt netop disse ligninger på alle slags problemer i makroskopisk skala uden at træffe noget tilfælde, hvor de har vist sig utilstrækkelige.

Materialer

Som teorien er blevet præsenteret her tages virkningen af materialer i betragtning gennem indførelse af felterne $\mathbf{D}$ og $\mathbf{H}$, som er forbundne med de primære felter $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ gennem materialeligningerne. Dette er en praktisk metode, som viser sin store styrke ved behandlingen af makroskopiske problemer med materialer. På det atomare niveau udspiller alt sig på en måde i vacuum, men man må så medregne de ladninger og strømme, som forekommer i de enkelte atomer og molekyler. Vi har antydnet lidt heraf ved den mikroskopiske teori for dielektrika og magnetika. Dette er kompliceret, men indebærer den fordel, at man kan nøjes med at betragte kun to elektromagnetiske felter, nemlig $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$, som direkte er definerede ved Lorentzkraften.

12.3 Energi og energistrøm i feltet

Energitæthed

For statiske felter har vi tidligere fundet den elektromagnetiske energitæthed, som for lineære medier er givet ved 10.33

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}). \quad (12.21)$$

Da nu de fuldstændige dynamiske ligninger er til rådighed, kan vi undersøge forholdene for tidsvarierende felter. Hertil går vi ud fra de to rotationsligninger 12.13 og 12.14, som multipliceres skalært med henholdsvis $\mathbf{H}$ og $\mathbf{E}$ og dernæst subtraheres. Dette giver

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (12.22)$$

Her kan venstre side omskrives til en divergens ved hjælp af vektorrelationen tabel A.2:8 sådan, at

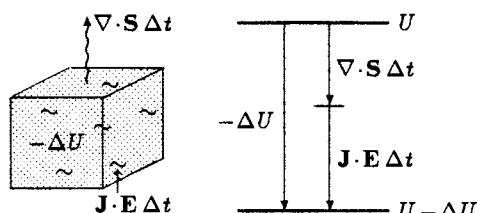
$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (12.23)$$

*Lineært
medium!*

Lad nu det betragtede medium være lineært med konstant permittivitet ϵ og permeabilitet μ . Vi kan da foretage en frem- og tilbageskrivning af differentialledene på højre side, idet

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \mathbf{H}^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}, \quad (12.24)$$

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (12.25)$$



Figur 12.2: Energibalancen i et elektromagnetisk felt.

Herefter kan 12.23 omskrives til

Matematik

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}, \quad (12.26)$$

hvis indhold bliver tydeligere ved integration over et volumen V

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv. \quad (12.27)$$

Det første volumenintegral kan ved hjælp af divergensteoremet omskrives til et integral over fladen S , som afgrænser V . Det andet volumenintegral kan, med støtte i det statiske udtryk 12.21, identificeres som den totale elektromagnetiske energi U indeholdt i V . Efter omordning kan vi skrive

$$-\frac{dU}{dt} = \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv. \quad (12.28)$$

Denne ligning kan nu fortolkes på følgende måde: Venstre side er den effekt, som forsvinder ud af volumen V . Volumenintegralet over $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ genkender vi fra 5.38. Det er den effekt, der i V afsættes som Joule-varme af strømtætheden $\mathbf{J}$. Overfladeintegralet er nyt, men det repræsenterer tydeligvis 'noget' gennem overfladen S . Skal der være energibevarelse, må dette 'noget', være den del af effekten, der ikke omsættes til varme (eller andet arbejde) i V , og som efter ligningen forsvinder gennem overfladen. På denne baggrund er det naturligt at opfatte vektoren

Fysik

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}}, \quad [S] = \text{Wm}^{-2}, \quad (12.29)$$

som den udstrømmende elektromagnetiske effekt per areal.

Vektoren $\mathbf{S}$ kaldes *Poynting vektoren*. Den blev indført af *J.H. Poynting* i 1884, og er væsentlig for forståelsen af energi og effekt i det elektromagnetiske felt. Poynting vektorens fortolkning som effektstrømtæthed har dog givet anledning til mange diskussioner. For eksempel kan man til $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ lægge et vilkårligt vektorfelt $\nabla \times \mathbf{G}$. Ligningerne 12.26 og 12.28 er da stadig gyldige, men Poyntingvektoren bliver en anden. Eksperimenter, man kan udtænke for at finde ud af, hvad der er rigtigt, vil næsten alle kontrollere den altid gyldige relation 12.28 og ikke 12.29. Men selv om Poyntingvektoren undertiden fører til overraskende resultater, ser man aldrig noget, som er i strid med, hvad vi ellers ved om det elektromagnetiske felt. Så indtil andet måtte foreligge, er der god grund til at anse det simple udtryk 12.29 for korrekt. Se det følgende eksempel og opgaverne 12.6 og 12.7.

Poyntings vektor

Lokal energi-
bevarelse

Indfører vi energitætheden u og Poyntingvektoren $\mathbf{S}$ i det differentielle udtryk 12.26, kan det skrives

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}, \quad (12.30)$$

med dimensionen Wm^{-3} . Mens 12.28 udtrykker energibevarelse i en del V af rummet, udtrykker 12.30 *lokal* energibevarelse (i et punkt).

Kontinuitets-
ligning

Hvis specielt $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = 0$, hvilket for eksempel er tilfældet i et isolerende medium, får vi ligningen

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0}, \quad (12.31)$$

der helt har samme form som kontinuitetsligningen 5.8 for elektrisk ladning. Ligningen udtrykker, at under de nævnte omstændigheder er elektromagnetisk energi en bevaret størrelse.

▷ Opladning af en capacitor: Vi har tidligere fundet energien $U = \frac{1}{2}CV^2$ i en capacitor med capacitans C og spænding V . Med henvisning til fig. 12.3 kan vi ved brug af Poynting vektoren give en alternativ beregning for en cirkulær pladekondensator.

Den mærkelige
Poynting-
vektor

Til tiden t er der en spænding $v = v(t)$ over capaciteten. Feltstyrken i dielektrik特 er aksial og har størrelsen $E = v/a$, hvor a er pladeafstanden. Den elektriske flux gennem dielektrik特 bliver da $\Psi = DA = A\epsilon v/a$, hvor A er pladearealet. Den magnetiske feltstyrke på dielektrikets cylindriske overflade er tangentiell. Retningerne af $\mathbf{E}$ og $\mathbf{H}$ er vist på figuren og giver en Poyntingvektor rettet *ind* i dielektrik特. Har pladerne radius r , kan størrelsen af H bestemmes ved brug af den generaliserede Ampères lov 12.19, hvorefter Poyntingvektorens størrelse kan beregnes:

$$H = \frac{d\Psi}{dt} \frac{1}{2\pi r} = \frac{\epsilon A}{2\pi r a} \frac{dv}{dt} \Rightarrow S = EH = \frac{\epsilon A}{2\pi r a^2} v \frac{dv}{dt}.$$

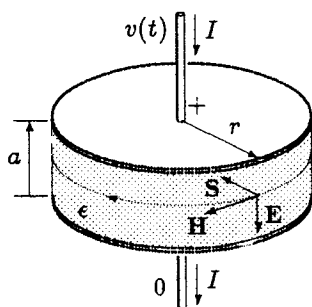
Strømmen af $\mathbf{S}$ gennem dielektrikets cylindriske overflade er tilvæksten i capacitorens energi per tid. Vi har altså

$$\frac{dU}{dt} = 2\pi r a S = \frac{\epsilon A}{a} v \frac{dv}{dt} \Rightarrow U = \frac{\epsilon A}{a} \int_0^V v dv = \frac{1}{2} \frac{\epsilon A}{a} V^2 = \frac{1}{2} CV^2,$$

som helt er i overensstemmelse med det tidligere udledte udtryk 4.20.

Skal man nu
tro det?

Efter Poyntings teori er energien i capaciteten altså ikke noget, som er kommet gennem ledningerne. Imod al intuition er den strømmet til capaciteten fra rummet *udenfor* ind gennem dielektrikets cylindriske overflade. ◁



Figur 12.3: Energiindholdet i en capacitor kan beregnes som Poyntingvektorens strøm til dielektrik特 mellem pladerne.

12.4 Bølgeligningen for elektromagnetiske bølger

En meget vigtig følge af de fuldstændige Maxwell ligninger er muligheden af bølgebevægelse i det elektromagnetiske felt. Dette stod straks fra begyndelsen Maxwell klart, og han viste, at sådanne bølger i vacuum vil udbrede sig med lyshastigheden. Det var derfor nærliggende at slutte, at lys *var* elektromagnetiske bølger, hvilket bidrog stærkt til at afslutte en århundredgammel diskussion om lysets natur.

Bølger og lys

Vi skal her udlede den almindelige bølgeligning for elektromagnetiske bølger i et homogent medium. Mediet anses for at være uendelig udstrakt, isotropt og lineært, karakteriseret ved de tre materialeligninger 12.15. Problemet om, hvor disse bølger kommer fra, gemmes til senere. Vi skal antage, at der ikke ophobes fri ladning og derfor sætte $\rho = 0$ i 12.11. Da der er tale om et ledende medium, hvor der findes en elektrisk feltstyrke, må vi stadig medtage en strømtæthed $\mathbf{J}$ i 12.14.

Forudsætninger

Vi begynder med at udlede bølgeligningen for $\mathbf{H}$ -feltet, som forekommer i den 4. Maxwell ligning

4. Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (12.32)$$

Her tager vi rotationen på begge sider af lighedstegnet med resultatet

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{D}, \quad (12.33)$$

hvor differentiationen efter sted og tid er ombyttet i sidste led. Materialeligningerne $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ og $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ benyttes dernæst til at indføre $\mathbf{E}$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \gamma \nabla \times \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}. \quad (12.34)$$

Vi vil nu gerne indføre magnetfeltet $\mathbf{H}$ i stedet for det elektriske felt $\mathbf{E}$. Hertil benyttes den 3. Maxwell ligning på formen

3. Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (12.35)$$

for at eliminere $\nabla \times \mathbf{E}$, der optræder to gange i 12.34. Dette giver

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -\gamma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (12.36)$$

I tabel A.2:4 finder vi identiteten $\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2$, hvormed ligningen kan omformes til

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = -\gamma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (12.37)$$

Ifølge den 2. Maxwell ligning $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, forsvinder ligningens første led. Efter omordning har vi da den ønskede bølgeligning

2. Maxwell

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} - \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.} \quad (12.38)$$

Bølgeligning
for $\mathbf{E}$

Vi kan udlede en helt tilsvarende bølgeligning for $\mathbf{E}$ -feltet, som optræder i 3. Maxwell ligning

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (12.39)$$

Igen tager vi rotationen på begge sider af lighedstegnet og ombytter differentiationsordenen

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (12.40)$$

hvorpå materialeligningen $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ benyttes til at indføre $\mathbf{H}$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H}. \quad (12.41)$$

4. Maxwell

Vi vil nu gerne indføre det elektriske felt $\mathbf{E}$ i stedet for magnetfeltet $\mathbf{H}$. Derfor benyttes den 4. Maxwell ligning på formen

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (12.42)$$

til at eliminere $\nabla \times \mathbf{H}$ i 12.41. Dette giver

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\gamma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (12.43)$$

hvorefter identiteten $\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2$ omformer ligningen til

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\gamma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (12.44)$$

1. Maxwell!

Udnytter vi endelig den 1. Maxwell ligning med forudsætningen $\rho = 0$, bliver $\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ sådan, at ligningens første led forsvinder. Hermed har vi den ønskede bølgeligning

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.} \quad (12.45)$$

Udledningen af bølgeligningerne gør brug af *alle* Maxwell ligningerne, hvilket understreger ligningernes sammenhørende karakter. I ligningerne 12.32-12.38 og 12.42-12.45 er det instruktivt at følge det led, som nedstammer fra forskydningsstrømmen $\partial \mathbf{D} / \partial t$ (det optræder altid som sidste led). Man ser da, at det er forskydningsstrømmen, som giver anledning til den 2. tidsafledede af feltet, uden hvilken der ikke ville være nogen bølgeligning. Maxwells bidrag til fuldstændiggørelse af ligningssystemet er således helt afgørende for dets mest bemærkelsesværdige resultat, de elektromagnetiske bølger.

Ingen
dæmpning

Bølgeligningerne 12.38 og 12.45 er af samme type, som dem vi studerede i kapitel 2 i *Bølger*. Ligningernes andet led indeholder *dæmpning*, hvilket klart skyldes, at mediet har en konduktivitet γ . Er mediet et ikke-ledende dielektrikum, hvor altså $\gamma = 0$, bliver de udæmpede ligninger

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0,} \quad \boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.} \quad (12.46)$$

Fra den generelle diskussion af bølgeligninger ved vi, at koefficienten til den 2. tidsafledede bestemmer bølgenes udbredelseshastighed v . Er der specielt tale om elektromagnetiske bølger i vacuum bliver

*Bølgens
hastighed*

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (12.47)$$

hvor man ved indsætning af ϵ_0 og μ_0 kan overbevise sig om, at $v = c$, hvor c er lyshastigheden i vacuum. Dette har dog ikke helt den dramatisk overbevisende kraft, som da Maxwell indsatte sin tids konstanter, i princippet bestemt ved målinger med spoler, kondensatorer og den slags udstyr, og derved fandt en værdi, som stemte med den lyshastighed, man mente, hørte til i en helt anden gren af fysiken.

12.5 Løsning af bølgeligningen

Ved løsningen af de elektromagnetiske bølgeligninger må man være opmærksom på, at det fundamentalt drejer sig om at finde løsninger til Maxwells ligninger. Bølgeligningerne er en følge af Maxwells ligninger, men det omvendte er ikke tilfældet. Man må derfor for enhver løsning kontrollere, om denne nu også løser det samlede system af Maxwells ligninger (se opgave 12.4). En ofte brugbar metode er først at søge en løsning til bølgeligningen 12.45 for $\mathbf{E}$. Denne kan så indsættes i den 3. Maxwell ligning 12.13, som dernæst integreres for at finde $\mathbf{B}$. De øvrige felter følger dernæst af materialeligningene 12.15. Denne metode sikrer automatisk, at alle Maxwell ligningerne er opfyldt.

*Maxwells
ligninger skal
være opfyldt*

Som for andre bølgefænomener er *harmoniske* løsninger til de elektromagnetiske bølgeligninger af afgørende betydning. Vi skal diskutere løsninger til bølgeligningen i flere af de følgende kapitler, men som illustration kan det allerede her være på sin plads at se på en harmonisk bølge i et udstrakt medium.

*Harmoniske
løsninger*

Det er mest bekvemt at benytte komplekse bølger. Vi antager derfor, at løsningen til 12.45 kan skrives på formen

*Kompleks
bølge*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (12.48)$$

hvor den negative exponent er valgt for at stemme overens med de sædvanlige konventioner for udbredelsesretningen. Se bølger, afsnit 3.2. Vektorfunktionen $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vil i almindelighed være kompleks og kan således indeholde en skjult fasekonstant.

Vi indsætter nu udtrykket 12.48 i bølgeligningen 12.45 og finder

$$(\nabla^2 \mathbf{E} + i\omega\gamma\mu\mathbf{E} + \omega^2\epsilon\mu\mathbf{E}) e^{-i\omega t} = 0. \quad (12.49)$$

Som sædvanlig kan vi se bort fra den harmonisk varierende tidsfaktor sådan, at ligningen reducerer til en differentilligning for $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ alene:

*Ligning for
 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ alene*

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} + i\omega\gamma\mu\mathbf{E} + \omega^2\epsilon\mu\mathbf{E} = 0.} \quad (12.50)$$

Vi specialiserer nu til det fundamentale tilfælde af elektromagnetiske bølger i vacuum, hvor materialeparametrene er $\gamma = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$ og $\mu = \mu_0$.

*Plan bølge
i vacuum*

For en *plan* bølge, som udbreder sig i x -aksens retning, skal udsvinget være uafhængigt af y og z , dvs. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x)$. Under disse omstændigheder bliver differentialligningen 12.50

$$\boxed{\frac{d^2 \mathbf{E}}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0}, \quad (12.51)$$

idet vi efter 12.47 har indført

$$\boxed{c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (12.52)$$

*Velkendt
ligning*

For hver af komponenterne af $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ er dette differentialligningen for en harmonisk oscillator, som har løsningerne

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0 e^{\pm i k x}. \quad (12.53)$$

Her er $\mathbf{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$ en fast vektor og k bølgetallet, som i overensstemmelse med *Bølger* 3.13, bliver

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (12.54)$$

Medtager vi den harmoniske tidsfaktor er bølgeligningens løsning derfor

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx \pm \omega t)}. \quad (12.55)$$

i det betragtede éndimensionale tilfælde.

*Felternes
retning*

▷ Feltvektorerne i éndimensional bølge: Selv om 12.55 løser bølgeligningen, er det som sagt ikke sikkert, at Maxwell ligningerne også er tilfredsstillet. Med en fremadskridende plan bølge af formen 12.55 som eksempel, skal vi her vise, at netop kravet om, at samtlige Maxwell ligninger skal tilfredsstilles, giver en række nye og væsentlige oplysninger om bølgen.

I det laddningsfri vacuum bliver den 1. Maxwell ligning

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = E_{0x} i k e^{i(kx - \omega t)} = 0, \quad (12.56)$$

$\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$

hvilket medfører $E_{0x} = 0$, altså som ekstra betingelse, at $\mathbf{E}$ -vektoren er vinkelret på udbredelsesretningen og derfor af formen

$$\mathbf{E} = (0, E_{0y}, E_{0z}) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (12.57)$$

For at finde $\mathbf{H}$ beregner vi rotationen af $\mathbf{E}$ -feltet ved hjælp af A.26

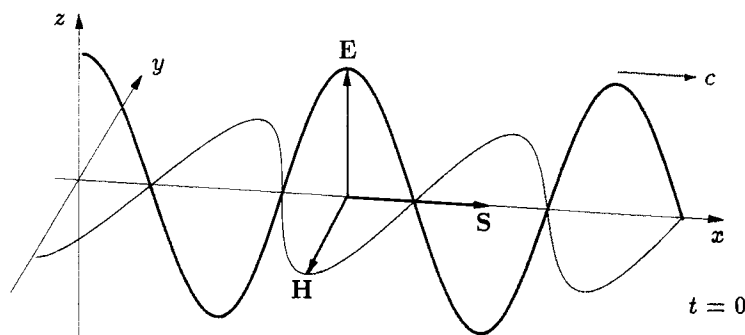
$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} = (0, -ik E_{0z}, ik E_{0y}) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (12.58)$$

Den 3. Maxwell ligning medfører derefter, at

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0} (0, ik E_{0z}, -ik E_{0y}) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (12.59)$$

som ved integration efter t giver

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_0 i \omega} (0, ik E_{0z}, -ik E_{0y}) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (12.60)$$



Figur 12.4: Elektromagnetisk bølge som udbreder sig i x-aksens retning.

eller, lidt mere overskueligt

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega} (0, -k E_{0z}, k E_{0y}) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (12.61)$$

$\mathbf{H}$ -vektoren er altså også vinkelret på udbredelsesretningen. Af 12.57 og 12.60 ses, at $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$ så $\mathbf{E}$ og $\mathbf{H}$ desuden er vinkelrette på hinanden.

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\perp \mathbf{k} \\ \mathbf{E} &\perp \mathbf{H} \end{aligned}$$

Da $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ overbeviser man sig let om, at $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ sådan, at den 3. Maxwell ligning er opfyldt. Af 12.61 og 12.57 følger desuden

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0 \omega} (0, -ik^2 E_{0y}, -ik^2 E_{0z}) e^{i(kx - \omega t)} \\ &= -\frac{i\omega}{\mu_0 c^2} (0, E_{0y}, E_{0z}) e^{i(kx - \omega t)} \\ &= -i\omega \epsilon_0 (0, E_{0y}, E_{0z}) e^{i(kx - \omega t)} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (12.62)$$

således, at i det strømfri vacuum er også den 4. Maxwell ligning opfyldt.

Endelig kan vi ved brug af 11.71 finde tidsmiddelværdien af Poyntingvektoren for den plane bølge

Poyntingvektoren

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \frac{k}{\mu_0 \omega} (E_{0y}^2 + E_{0z}^2, 0, 0) = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \mathbf{e}_x, \quad (12.63)$$

hvor 12.54 er anvendt ved den sidste omskrivning. Energien i en elektromagnetisk bølge strømmer således som forventeligt i bølgens udbredelsesretning. Bølgerne $\mathbf{E}(x)$ og $\mathbf{H}(x)$ samt Poyntingvektoren $\mathbf{S}$ er illustreret på fig. 12.4. De her viste relationer for en plan bølge er specialtilfælde af relationer, som vi mere effektivt skal udlede i kapitel 13. ◁

12.6 Grænsebetingelser for felterne

For de statiske elektromagnetiske felter har vi i afsnittene 3.6 og 9.2 tidligere fundet grænsebetingelserne ved overgang fra ét medium til et andet. De dér givne udledninger holder til ethvert øjeblik også for tidsvarierende felter, og vi skal uden yderligere argumenter blot overtage resultaterne. Disse kan sammenfattes i følgende fire relationer, der er opstillet i samme rækkefølge, som de tilsvarende Maxwell ligninger 12.11-12.14. Overfladenormalen $\mathbf{n}$ er

Genbrug

rettet fra medium 1 mod medium 2:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma, \quad (12.64)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (12.65)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (12.66)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}. \quad (12.67)$$

Der erindres om, at i 12.64 er σ overfladetætheden af fri ladning og, at i 12.67 er $\mathbf{j}$ tilsvarende tætheden af fri overfladestrøm på en uendelig god leder.

Harmoniske
felter

Der er lidt mere at sige om forholdene nær overfladen af en god leder. Lad de to medier være lineære med materialeparametrene $(\epsilon_1, \mu_1, \gamma_1)$ og $(\epsilon_2, \mu_2, \gamma_2)$. Indskrænker vi os til det hyppigt forekommende tilfælde, hvor alle felter og kilder varierer harmonisk med tiden som $e^{-i\omega t}$, kan vi skrive 4. og 3. Maxwell ligning for medium 1 som

$$\nabla \times \mathbf{H}_1 = \gamma_1 \mathbf{E}_1 - i\omega \epsilon_1 \mathbf{E}_1, \quad \nabla \times \mathbf{E}_1 = i\omega \mu_1 \mathbf{H}_1, \quad (12.68)$$

hvoraf

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\gamma_1 - i\omega \epsilon_1} \nabla \times \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{H}_1 = \frac{1}{i\omega \mu_1} \nabla \times \mathbf{E}_1. \quad (12.69)$$

Ingen felter
i perfekt leder

Gør vi den fysisk rimelig antagelse, at felterne *inde* i materiale 1 er kontinuerede, er $\nabla \times \mathbf{H}_1$ i 12.68 endelig. Efter 12.69 betyder det, at $\mathbf{E}_1$ og dermed $\mathbf{H}_1$ går mod nul, dersom konduktiviteten $\gamma_1 \rightarrow \infty$. I det indre af en perfekt leder forsvinder alle *oscillerende* felter. Da felterne da kun findes i medium 2, kan vi undvære index 2, og grænsebetingelserne bliver

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \sigma, \quad (12.70)$$

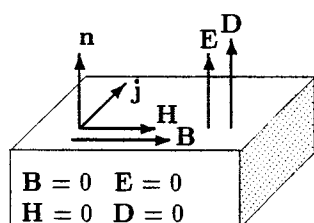
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (12.71)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad (12.72)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{j}. \quad (12.73)$$

Vektorer på
overfladen

Her udtrykker 12.71, at normalkomponenten af $\mathbf{B}$ er 0. Vektoren $\mathbf{B}$ og dermed $\mathbf{H}$ er altså parallel med overfladen. Tilsvarende udtrykker 12.72 at tangentialkomponenten af $\mathbf{E}$ er 0. Vektoren $\mathbf{E}$ og dermed $\mathbf{D}$ er altså normal til overfladen. Betingelserne 12.70 og 12.73 bestemmer de tidsvarierende



Metal:

$$\mathbf{D} = 0,$$

$$\mathbf{B} = 0,$$

$$\mathbf{E} = 0,$$

$$\mathbf{H} = 0.$$

Vacuum:

$$\mathbf{D} = \sigma \mathbf{n},$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{n},$$

$$\mathbf{E} = \sigma \mathbf{n} / \epsilon_0,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{j} \times \mathbf{n}.$$

Figur 12.5: De elektromagnetiske feltvektorer på overfladen af en perfekt leder.

ladningstætheder σ og strømtætheder j , som en påtrykt elektromagnetisk bølge vil inducere i overfladen. Vektorernes beliggenhed og deres størrelser, når medium 1 er et metal og medium 2 vacuum, er vist på fig. 12.5.

Kapitel 13

Elektromagnetiske bølger

I forrige kapitel viste vi, at bølgeligningen kan udledes fra de fire Maxwell ligninger. Deraf følger, at der blandt løsningerne til Maxwell ligningerne er nogle, der beskriver udbredelsen af bølger i det elektromagnetiske felt. Som et enkelt eksempel har vi undersøgt en plan, harmonisk bølge, der i vacuum udbreder sig i x -aksens retning.

*Bølger som
løsning*

I dette kapitel skal vi mere generelt se på elektromagnetiske bølgers udbredelse i både isolerende og ledende medier, igen med hovedvægt på plane harmoniske bølger. Behandlingen drejer sig om generelle træk ved bølgeudbredelse i udstrakte medier. Man skal dog altid huske på, at det elektromagnetiske spektrum er meget omfattende og strækker sig fra radiobølger med frekvenser på måske 10^4 Hz til hård gammastråling med frekvenser på 10^{22} Hz eller mere, hvor kvanteeffekterne er dominerende. Der er karakteristiske træk ved hvert frekvensområde, som må tages i betragtning ved undersøgelse af bølgeudbredelsen. Eksempelvis er frekvensen afgørende for, hvilke materialeparametre der er relevante. Fælles for alle elektromagnetiske bølger er dog, at de i vacuum udbreder sig med hastigheden c .

E.M. spektrum

13.1 Plane monokromatiske bølger i dielektrika

Bølgeligningen for elektromagnetiske bølger i et ikke-ledende, lineært og homogent dielektrisk medium med permittivitet ϵ og permeabilitet μ er givet ved 12.46

*E.M. bølger
i medier*

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (13.1)$$

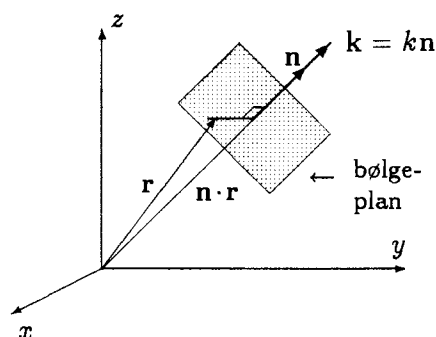
med en helt tilsvarende ligning for $\mathbf{B}$ -feltet. Fasehastigheden v for bølgen i mediet er bestemt ved $1/v^2 = \epsilon\mu$, altså

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (13.2)$$

Blandt løsningerne til 13.1 skal vi især interessere os for plane, monokromatiske bølger med vilkårlig udbredelsesretning. Sådanne bølger kan beskrives ved en kompleks bølgefunktion af formen

*Plan, har-
monisk bølge*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (13.3)$$



Figur 13.1: Udbredelse af plan bølge i rummet.

Definitioner

Denne bølge er *plan*, fordi feltvektoren $\mathbf{E}$ er den samme i alle punkter af enhver plan vinkelret på den faste udbredelsesretning bestemt ved bølgevektoren $\mathbf{k} = k\mathbf{n} = (k_x, k_y, k_z)$, hvor $\mathbf{n}$ er normalvektoren til bølgeplanen. Bølgen er *monokromatisk* (dvs. ensfarvet, en betegnelse som er hentet fra det visuelle område), fordi der kun forekommer en enkelt frekvens ω og derfor også kun et enkelt bølgetal k .

Ved indsætning af 13.3 i bølgeligningen 13.1, ser man, at denne reducerer til en relation mellem ω og k :

$$(-k^2 + \omega^2 \epsilon \mu) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \Rightarrow k = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu} = \frac{\omega}{v}, \quad (13.4)$$

Refraktionsindex n

som kaldes *dispersionsrelationen* for elektromagnetiske bølger i mediet. Materialets *refraktionsindex* n er en dimensionsløs størrelse, defineret ved

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{v}, \quad (13.5)$$

hvor vi har indført den relative permittivitet $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ og den relative permeabilitet $\mu_r = \mu/\mu_0$. Fra et bølgesynspunkt er refraktionsindex forholdet mellem fasehastigheden c i vacuum og fasehastigheden v i mediet.

Dispersionsrelation

Indføres refraktionsindexet kan dispersionsrelationen 13.4 skrives som

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} n = k_0 n, \quad (13.6)$$

hvor $k_0 = \omega/c$ er bølgetallet i vacuum. Man skal være opmærksom på, at materialeparameteren ϵ , og dermed v og n , normalt vil afhænge af frekvensen ω . Dispersionsrelationen er derfor mere kompliceret, end den umiddelbart tager sig ud. For de fleste dielektriske materialer gælder på den anden side, at $\mu \approx \mu_0$ dvs. $\mu_r \approx 1$. Man kan derfor efter 13.5 oftest sætte $n = \sqrt{\epsilon_r}$.

Vi skal nu finde betingelserne for, at den plane bølge 13.3 er en løsning til de samlede Maxwell ligninger. Vi antager, at der ikke er eksternt påtrykte kiladeladninger og -strømme, og da mediet yderligere er ikke-ledende, er strømtætheden altid nul. Maxwells ligninger 12.11–12.14 bliver da

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (13.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (13.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (13.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (13.10)$$

Ved integration af 13.9 kan man finde **B**-feltet ud fra **E**-feltet 13.3. Det vil klart give et felt, med samme bølgefaktor $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ som **E**-feltet. Da felterne **D** og **H** er lineært forbundne med felterne **E** og **B**, har alle felter samme bølgefaktor. Dette simplificerer differentiationerne i 13.7–13.10 væsentligt. Efter opgave 13.8 gælder det jo for en vilkårlig plan harmonisk bølge,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (13.11)$$

at

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{F}, \quad \nabla \times \mathbf{F} = i\mathbf{k} \times \mathbf{F}, \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{F}. \quad (13.12)$$

Vi kan derfor anvende substitutionerne $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ og $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$, hvorefter 13.7–13.10 bliver

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (13.13)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (13.14)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}, \quad (13.15)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}. \quad (13.16)$$

I det følgende skal vi som regel beskrive en elektromagnetisk bølge ved de to fundamentale felter **E** og **B**. Vi antager, at mediet er lineært med materialeparametrene ϵ og μ og eliminerer **D** = $\epsilon \mathbf{E}$ fra 13.13 og **H** = $\mathbf{B}/\mu$ fra 13.16. Anvendes desuden udtrykket 13.2 for bølgehastigheden, finder man følgende rent algebraiske vektorrelationer for den plane, harmoniske bølge i et lineært medium

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (13.17)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (13.18)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}, \quad (13.19)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{v^2} \mathbf{E}. \quad (13.20)$$

De harmoniske bølger **E** og **B** er indført som komplekse bølger. I forbindelse med relationerne 13.17–13.20 må vi nødvendigvis præcisere, hvad der menes med en kompleks feltvektor. Vi skriver dertil bølgerne på formen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (13.21)$$

hvor de faste vektorer **E**₀ og **B**₀ i almindelighed har komplekse komponenter. Ved den komplekse **E**-vektor skal vi forstå vektoren

$$\mathbf{E} = (E_{0x} e^{i\phi_x}, E_{0y} e^{i\phi_y}, E_{0z} e^{i\phi_z}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (13.22)$$

hvor hver komponent altså har sin egen fasevinkel ϕ . Et tilsvarende udtryk kan angives for **B**-feltet, men komponenterne og faserne har i almindelighed ikke nogen simpel relation til dem for **E**-feltet.

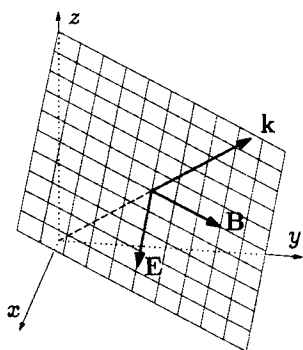
Relationen 13.17 kan fortolkes som et udsagn om, at den komplekse vektor **E** er vinkelret på den reelle vektor **k**. Det vil sige, at såvel den reelle som den imaginære del af **E** har skalarproduktet nul med **k**. Taler vi om de fysiske felter, er det tilstrækkeligt at sige, at realdelen af **E** har skalarproduktet nul med **k**. I begge tilfælde bliver de explicitte udtryk for $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$ komplicerede på

*Alle felter
harmoniske*

*To udvalgte
felter*

*Hvad er
en kompleks
vektor?*

*Betydning af
skalarprodukt*



Figur 13.2: Feltvektorenes beliggenhed i en plan, elektromagnetisk bølge.

grund af faserne. Endnu tungere bliver det at benytte 13.19 til at bestemme B-feltet ud fra E-feltet.

Fasens
betydning

I næste afsnit skal vi undersøge den fysiske betydning af faseforskelle mellem felternes komponenter. Her gør vi blot den simplificerende antagelse, at alle komponenter af E-feltet har den samme fase sådan, at felterne ganske enkelt kan skrives

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)}, \quad (13.23)$$

hvor $\mathbf{E}_0$ og $\mathbf{B}_0 = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 / \omega$ nu er reelle vektorer.

Ligningerne 13.17-13.20 udtrykker da følgende vigtige relationer mellem de reelle feltvektorer $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ og bølgevektoren $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \perp \mathbf{k}, \quad (13.24)$$

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{B}, \quad (13.25)$$

$$|\mathbf{B}| = \frac{k}{\omega} |\mathbf{E}| = \frac{n}{c} |\mathbf{E}|. \quad (13.26)$$

Feltvektorer
fastlagt

Disse relationer fastlægger feltvektorenes relative beliggenhed og størrelse i en elektromagnetisk bølge, hvor felterne $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ altid svinger i to faste på hinanden vinkelrette planer, som indeholder bølgevektoren, se fig. 13.2. En sådan bølge skal vi i næste afsnit kalde en *lineært polariseret* bølge.

13.2 Polarisation

E.M. bølger er
transversale

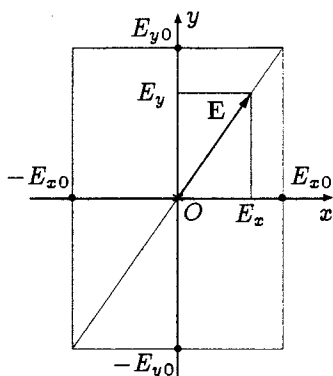
De elektromagnetiske bølger i forrige afsnit er *transversale*, idet feltvektorerne er vinkelrette på udbredelsesretningen. Hvis feltvektoren $\mathbf{E}$ udelukkende svinger i en bestemt retning i rummet (vinkelret på udbredelsesretningen), siger man, at bølgen er *lineært polariseret* i denne retning.

Lineær
polarisation

Lad os tænke på en sådan lineært polariseret bølge, hvor E-vektoren svinger harmonisk i en fast plan, som indeholder udbredelsesretningen. Vi kan uden skade forenkle den følgende diskussion ved at lægge z-aksen i udbredelsesretningen. Bølgen observeres i et fast punkt O på akse, hvor feltvektorens svingninger i planen opløses efter to (tilfældige) på hinanden vinkelrette retninger, der tages som y -akse og z -akse i et sædvanligt højrekoodinatsystem, se fig. 13.5.

Det er her mest overskueligt at anvende reelle vektorer. For realdelen af $\mathbf{E}$ kan vi da skrive

$$E_x = E_{x0} \cos(kz - \omega t), \quad E_y = E_{y0} \cos(kz - \omega t), \quad (13.27)$$



Figur 13.3: Feltvektoren i en lineært polariseret bølge opløst i sine komponenter efter to på hinanden vinkelrette retninger x og y .

hvor E_{x0} og E_{y0} er de maksimale udsving i retningerne x og y . De to svingninger 13.27 er i fase, og $\mathbf{E}$ -vektorens endepunkt vil, som vist på fig. 13.3, bevæge sig på en ret linie gennem nulpunktet O .

Man kan imidlertid også forestille sig en bølge, som er en superposition af et E_x og et E_y , som *ikke* er i fase, men har en fast faseforskel ϕ . Delbølgerne bliver da

*Superposition
med faseforskel*

$$E_x = E_{x0} \cos(kz - \omega t), \quad E_y = E_{y0} \cos(kz - \omega t + \phi). \quad (13.28)$$

Er ϕ positiv, siger man, at E_x er *foran* E_y i fase (fordi der skal mere ωt til i y -bølgen for at nå dertil i fase, hvor x -bølgen allerede var. Sml. diskussionen i afsnit 10.3.2 om vekselstrøm, hvor dog ωt har modsat fortegn).

Bevægelsen af $\mathbf{E}$ -vektorens endepunkt i xy -planen følger i almindelighed en ellipse indskrevet i et rektangel, hvis sider er parallelle med x - og y -akserne i afstande, som er henholdsvis $\pm E_{y0}$ og $\pm E_{x0}$. Man taler derfor om *elliptisk polarisation*. Man kan vise (opgave 17.7), at ellipsens ligning er

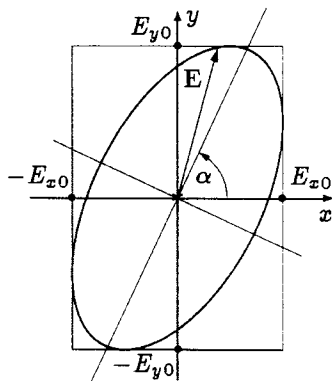
*Elliptisk
polarisation*

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)\cos\phi = \sin^2\phi \quad (13.29)$$

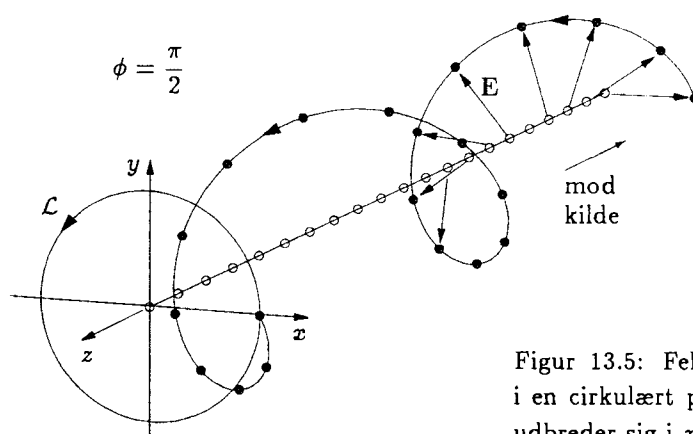
og, at dens storakse danner en vinkel α med x -aksen, som er bestemt ved

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2E_{x0}E_{y0}}{E_{x0}^2 - E_{y0}^2} \cos\phi. \quad (13.30)$$

Lineær polarisation er et specialtilfælde af elliptisk svarende til $\phi = 0$ eller $\phi = \pi$. Polarisationsretningen falder da i en af rektanglets to diagonaler.



Figur 13.4: Bevægelsen af den elektriske vektors endepunkt i en elliptisk polariseret bølge.



Figur 13.5: Feltvektorens bevægelse i en cirkulært polariseret bølge, som udbreder sig i z-retningen.

Cirkulær polarisation

Et andet specialtilfælde optræder, når $\phi = \pm\pi/2$ og samtidig $E_{x0} = E_{y0}$. Ellipsen udarter da til en cirkel og man taler om *cirkulær polarisation*. Fig. 13.5 illustrerer E-vektorens bevægelse i rummet for en plan, cirkulært polariseret bølge, som udbreder sig i z-aksens retning.

Omløbets retning

Bemærk, at ϕ også bestemmer E-vektorens omløbsretning. Denne kan fastlægges ved at betragte vektoren $\mathbf{E} \times \dot{\mathbf{E}}$, som kan beregnes af 13.27, f. eks. for $z = 0$

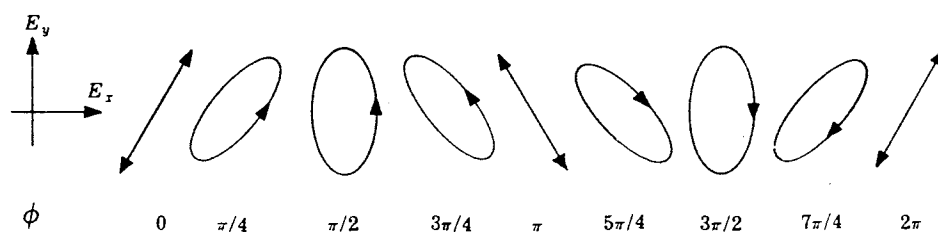
$$\mathbf{E} \times \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \sim \sin \omega t \cos(\omega t - \phi) - \cos \omega t \sin(\omega t - \phi) = \sin \phi. \quad (13.31)$$

Bølgens tilstand bestemt ved fasen

Med henvisning til fig. 13.5 kan vi nu diskutere feltvektorens omløbsretning. Ser vi ind mod kilden, svarer et positivt $\sin \phi$ til rotation *mod* uret. Dette kaldes *venstre-polarisation* og bølgen siges at være i en $\mathcal{L}$ -tilstand. Et negativt $\sin \phi$ svarer omvendt til rotation *med* uret. Dette kaldes *højre-polarisation* og bølgen siges at være i en $\mathcal{R}$ -tilstand. Disse betegnelser, som ofte anvendes til at angive polarisationstilstanden af lysbølger, er desværre de modsatte af, hvad en 'højrehåndregel' ville give. I en lineært polariseret bølge svinger feltvektoren i en bestemt plan. Bølgen omtales derfor også som *plan-polariseret* og siges at være i en $\mathcal{P}$ -tilstand. Fig. 13.6 viser hvordan ellipsens form og beliggenhed ændres med faseforskellen ϕ .

Polarisation af lys

Polarisation optræder ved alle former for elektromagnetiske bølger, men har særlig betydning for bølger i det visuelle område, altså for *lys*. Polarisationen giver dér anledning til en række fænomener af stor teoretisk og praktisk interesse. Vi skal nærmere drøfte nogle af disse i *Optik*.



Figur 13.6: Lysets polarisationstilstand er bestemt af faseforskellen ϕ mellem de to komponenter.

13.3 Energi i en elektromagnetisk bølge

I kapitel 10 fandt vi *energitætheden* u i det elektromagnetiske felt:

Energi og

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}), \quad (13.32)$$

og i kapitel 12 *energistrømtætheden* udtrykt ved Poyntingvektoren $\mathbf{S}$:

Energistrøm

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (13.33)$$

Derefter kunne lokal energibevarelse udtrykkes ved kontinuitetsligningen

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (13.34)$$

som gælder for et ikke-ledende medium. Der mindes om, at udtrykkene er udledt under forudsætning af et *lineært* medium, dvs. et medium hvor $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ og $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, og hvor ϵ og μ er konstanter. I det følgende skal vi som regel antage, at $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ og $\mu = \mu_0$. Selv om intet stof er helt uden magnetiske egenskaber, er den sidste tilnærmelse meget god, da magnetiske susceptibiliteter typisk er 4-5 størrelsesordener mindre end elektriske.

Kun lineære medier!

Under disse forudsætninger kan 13.32 og 13.33 uden videre anvendes på en elektromagnetisk bølge. Oftest er vi interesseret i at beregne tidsmiddelværdierne af u og $\mathbf{S}$. Dertil anvender vi igen det almindelige udtryk for tidsmiddelværdien af en kvadratisk størrelse

$$\langle (\operatorname{Re} f) \circ (\operatorname{Re} g) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (f^* \circ g). \quad (13.35)$$

For energitætheden finder vi således efter 13.32

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} \operatorname{Re} (\epsilon \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{4} \operatorname{Re} (\mu_0 \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}). \quad (13.36)$$

Er bølgen plan kan $\mathbf{H}$ elimineres ved at benytte 13.26, som giver $|\mathbf{B}| = \mu_0 |\mathbf{H}| = n |\mathbf{E}|/c$. Den *samlede* elektriske og magnetiske energitæthed i den plane bølge får da det enkle udtryk

Energitæthed i plan bølge

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{E}_0|^2. \quad (13.37)$$

Bemærk, at tids- og stedsvariationen, jvf. 13.3, forsvinder ved beregningen af absolutkvadratet $|\mathbf{E}|^2$.

Tilsvarende kan man beregne middelværdien af Poyntingvektoren

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}). \quad (13.38)$$

Da $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, peger vektorproduktet i bølgens udbredelsesretning. Er bølgen plan elimineres $\mathbf{H}$ på samme måde som før, og vi kan skrive

Intensitet af plan bølge

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{n}{\mu_0 c} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{e}_k, \quad (13.39)$$

hvor $\mathbf{e}_k$ er en enhedsvektor i udbredelsesretningen. Heraf følger, at Poyntingvektoren og energitætheden er forbundet ved relationen

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle u \rangle \mathbf{v}_f, \quad (13.40)$$

hvor $\mathbf{v}_f = c/n$ er bølgens fasehastighed i mediet. Ligning 13.40 udtrykker, at den energi, som det næste sekund strømmer gennem et areal på 1 m^2 vinkelret på stråleretningen, er indeholdt i en søjle af længden $\mathbf{v}_f$.

13.4 Plane bølger i ledende medier

*E.M. bølger
i ledere*

Selv om de vigtigste fænomener er knyttet til elektromagnetiske bølger i dielektrika, er der dog også situationer, hvor der optræder ledende medier. Som vi skal se, er bølgerne i en leder stærkt dæmpede. Det er netop dette som gør ledere, især metaller, til gode reflektorer for lys og andre elektromagnetiske bølger.

$\gamma \neq 0$

Vi skal derfor kort undersøge udbredelsen af en elektromagnetisk bølge i et ledende medium. Den fysiske forskel fra en isolator er, at konduktiviteten $\gamma \neq 0$, hvilket betyder, at det elektriske felt skaber en strømtæthed $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$. I kapitel 13 har vi allerede udledt den bølgeligning, som da må anvendes:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (13.41)$$

idet vi generelt ser på et medium med permittivitet ϵ og permeabilitet μ . Vi får den dielektriske situation, beskrevet ved bølgeligningen 13.1, blot ved at sætte $\gamma = 0$, hvilket gentagne gange kan benyttes i det følgende.

Til bølgeligningen 13.41 søger vi nu harmoniske løsninger af formen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (13.42)$$

Ved indsætning i 13.41 får vi da en 2. ordens differentiaalligning for $\mathbf{E}(\mathbf{r})$:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \{i\omega\gamma\mu + \omega^2\epsilon\mu\}\mathbf{E} = 0. \quad (13.43)$$

*Komplex
permittivitet*

Man ser umiddelbart, at denne differentiaalligning har samme form som den ville have i et dielektrikum, idet der blot er sket substitutionen

$$\omega^2\epsilon\mu \rightarrow i\omega\gamma\mu + \omega^2\epsilon\mu = \omega^2 \left(\epsilon + \frac{i\gamma}{\omega} \right) \mu. \quad (13.44)$$

Forskellen til det dielektriske tilfælde er, at permittiviteten ϵ er erstattet med en *komplex* permittivitet, som vi skal betegne med $\hat{\epsilon}$. Vi har således substitutionen

$$\epsilon \rightarrow \hat{\epsilon} = \epsilon + \frac{i\gamma}{\omega}. \quad (13.45)$$

Komplekst n

Tilsvarende kan vi indføre et komplekst refraktionsindex $\hat{n}$, i analogi med 13.5:

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \rightarrow \hat{n} = \sqrt{\frac{\hat{\epsilon}\mu}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\mu_r \left(\epsilon_r + \frac{i\gamma}{\epsilon_0\omega} \right)}. \quad (13.46)$$

*Realdel og
kompleksdel*

Det viser sig nu hensigtsmæssigt explicit at kende den reelle og den imaginære del af refraktionsindexet hver for sig. Vi skriver derfor

$$\hat{n} = \eta + i\kappa, \quad (13.47)$$

hvor η og κ er reelle. For at udtrykke η og κ ved materialeparametrene ϵ og μ kvadrerer vi $\hat{n}$ efter 13.46 og 13.47 og sætter, hver for sig, realdele og imaginærdele lig hinanden. Heraf følger

$$\eta^2 - \kappa^2 = \mu_r \epsilon_r, \quad (13.48)$$

$$2\eta\kappa = \mu_r \frac{\gamma}{\omega\epsilon_0}. \quad (13.49)$$

Løses disse ligninger for η og κ får man de ønskede udtryk

Absorptions-
index κ

$$\eta = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + (\gamma/\omega\epsilon)^2}}{2}}, \quad \kappa = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + (\gamma/\omega\epsilon)^2}}{2}}. \quad (13.50)$$

Fortegnene ved roduddragningerne er valgt sådan, at η og κ bliver positive, reelle størrelser. Man ser, at for $\gamma = 0$ stemmer η overens med det sædvanlige refraktionsindex $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$. Af grunde, som vi straks kommer til, kaldes imaginærdelen κ for *absorptionsindexet*. Det er 0 for $\gamma = 0$.

Vi kan herefter umiddelbart overtage resultaterne fra afsnit 13.1. Efter 13.4 erstattes bølgevektoren $\mathbf{k}$ med en kompleks bølgevektor $\hat{\mathbf{k}}$, idet

$$\mathbf{k} = n\mathbf{k}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{k}} = \hat{n}\mathbf{k}_0 = (\eta + i\kappa)\mathbf{k}_0. \quad (13.51)$$

Vi er nu klar til at tolke det fysiske indhold af disse formelle regninger. Den harmoniske planbølge løsning til bølgeligningen i det ledende medium fremkommer ved substitutionen

Hvad betyder
det?

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \rightarrow e^{i(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = e^{i((\eta + i\kappa)\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (13.52)$$

Med det sidste udtryk kan vi efter 13.42 skrive en (planpolariseret) løsning til bølgeligningen som

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i((\eta + i\kappa)\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{-\kappa \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} e^{i(\eta \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (13.53)$$

I materialet har vi således en *dæmpet* harmonisk bølge. Indføres afstanden z målt langs udbredelsesretningen, er $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} = k_0 z$. Bølgens amplitude bestemmes da af $\exp(-\kappa k_0 z)$. Amplituden aftager med en faktor $1/e$ over en længde

$$\delta = \frac{1}{\kappa k_0} = \frac{\lambda_0}{2\pi\kappa}, \quad (13.54)$$

som kaldes *indtrængningsdybden*.

Hvor dybt en bølge trænger ind i et materiale afhænger både af materialeparametrene ϵ , μ og γ og af bølgens frekvens ω . Som det ses af udtrykket 13.50 for κ , er den afgørende størrelse $\gamma/\omega\epsilon$, idet ϵ_r og μ_r ikke er meget forskellige fra 1.

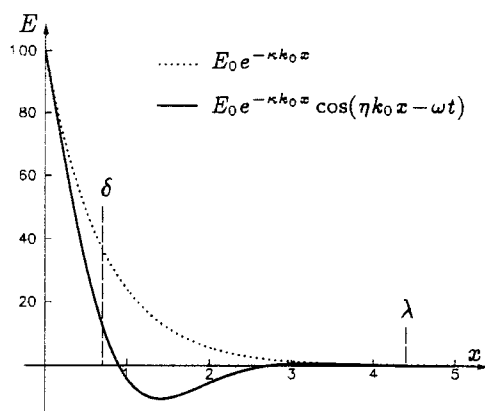
Hvor langt
når bølgen?

For en god leder som kobber er $\gamma \approx 6 \times 10^7$ og $\epsilon \approx \epsilon_0 \approx 10^{-11}$. Det vil sige, at $\gamma/\epsilon \approx 6 \times 10^{18}$. For frekvenser $\nu \leq 10^{17}$ Hz er $\gamma/\epsilon\omega \gg 1$. Selv om den her udviklede teori ikke gælder for så høje frekvenser, fordi metallens atomare struktur da spiller ind (se afsnit 5.5 om relaxationstid), så viser argumentet dog, at for ledere er $\gamma/\epsilon\omega$ det helt dominerende led i 13.50. Vi kan derfor skrive $\kappa = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \sqrt{\gamma/2\epsilon\omega}$. Da desuden $k_0 = \omega/c$, bliver indtrængningsdybden for metaller

Indtræng-
ning i metal

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma\omega\mu}}, \quad (13.55)$$

der kan anses for gyldig for alle frekvenser $\nu \leq 10^{14}$ Hz, dvs. op til i nærheden af frekvensen for synligt lys.



Figur 13.7: I en leder udbreder elektromagnetisk stråling sig som en dæmpet bølge.

Det er værd at bemærke, at for $\gamma/\epsilon\omega \gg 1$ giver 13.50, at $\eta = \kappa$. Efter 13.53 bliver bølgetallet i materialet $k = \eta k_0$ og bølgelængden derfor

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\eta k_0} = \frac{\lambda_0}{\eta} = 2\pi\delta. \quad (13.56)$$

Bølgelængden i metallet er således 2π gange indtrængningsdybden og er, da $\eta = \gamma/\epsilon\omega \gg 1$, væsentlig kortere end bølgelængden i vacuum.

*Jævnstrøm
går dybt*

For meget lave frekvenser viser 13.55, at indtrængningdybden bliver meget stor, for jævnstrøm i princippet uendelig. Dette stemmer med vores tidligere opfattelse, at i en ledning er feltstyrken, og dermed strømtætheden, homogent fordelt over ledningens tværsnit (se afsnit 5.2.1).

Kapitel 14

Elektromagnetisk stråling

Kilderne til elektromagnetiske bølger er tidsvarierende strømme og ladninger fordelt i en større eller mindre del af rummet. Man siger, at kilderne udsender *elektromagnetisk stråling*. Eksempler på sådanne kilder er radioantenner af forskellig art, elektriske kredsløb, som drives med højfrekvente vekselstrømme, og accelererede partikler. Kilderne kan også være atomare systemer, men for dem kan strålingsudsendelsen kun beskrives fuldt korrekt ved kvantemekaniske metoder. Selv da er der dog vigtige aspekter, der belyses af den klassiske elektromagnetiske strålingsteori, som er emnet for dette kapitel.

Hvor kommer bølgerne fra?

14.1 De elektromagnetiske potentialer

Ved behandlingen af strålingsfænomener er det en fordel at benytte de elektromagnetiske potentialer φ og $\mathbf{A}$. Indtil nu har vi imidlertid kun anvendt disse potentialer i stationære tilfælde og må derfor først overveje, hvilke ændringer i formalismen, der er nødvendige, når de elektromagnetiske felter varierer i tid.

Dynamiske potentialer

Efter den 2. Maxwell ligning 12.12 gælder det altid, at $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Vi kan derfor fortsat finde et vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ således, at

Vektorpotentialet

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (14.1)$$

Derimod kan vi ikke uden videre beregne et sådant vektorpotential ved hjælp af 6.60. I næste afsnit skal vi se, hvorledes udtrykket må modificeres for også at omfatte tidsvarierende felter.

I det stationære tilfælde var $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, hvilket medførte, at der kunne findes et skalarpotential φ . Er felterne tidsvarierende, gælder der efter den 3. Maxwell ligning, at

Skalarpotentialet

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (14.2)$$

og $\mathbf{E}$ -feltet er således ikke noget gradientfelt. Vi kan imidlertid skrive ligningen som

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (14.3)$$

og derpå indføre $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Antager vi, at felterne er tilstrækkeligt kontinuerte til, at differentiation efter tid og efter sted kan ombyttes, kan 14.3 skrives

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (14.4)$$

Den er ny!

Denne ligning viser, at feltet $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ er rotationsfrit og følgelig kan skrives som (minus) gradienten af et skalarfelt φ . Vi har derfor den vigtige relation

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}, \quad (14.5)$$

men der gøres opmærksom på, at skalarpotentialet her er et andet end det statiske og ikke lader sig beregne eksempelvis med 2.32.

Der er valgfrihed

Som i de statiske tilfælde er potentialerne ikke entydigt bestemte ved 14.1 eller 14.5. Betegner $\xi(\mathbf{r}, t)$ således et vilkårligt skalarfelt og er $\mathbf{A}'$ og φ' potentialer, som opfylder 14.1 og 14.5, da vil potentialerne

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \xi \quad (14.6)$$

og

$$\varphi = \varphi' - \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (14.7)$$

være lige så brugbare, idet også de opfylder 14.1 og 14.5:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}' + \nabla \times \nabla \xi = \nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{B} \quad (14.8)$$

og

$$-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi' + \frac{\partial \nabla \xi}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \frac{\partial \nabla \xi}{\partial t} = -\nabla \varphi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = \mathbf{E}. \quad (14.9)$$

14.2 Bølgeligningen med kilder

Inhomogene bølgeligninger

Vi skal nu vise, at potentialerne $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ og $\varphi(\mathbf{r}, t)$ hver tilfredsstiller en inhomogen bølgeligning med henholdsvis strømtætheden $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ og ladningstætheden $\rho(\mathbf{r}, t)$ som kilde.

Vi tager igen udgangspunkt i de fire Maxwell ligninger 12.11–12.14. Er potentialerne kendte, er den 2. og den 3. Maxwell ligning automatisk opfyldt på grund af definitionerne 14.1 og 14.5. Den 1. og den 4. Maxwell ligning giver da de relationer, som knytter potentialerne til kilderne.

Mediet lineært og isolerende

Vi skal kun betragte tilfælde, hvor det omgivende medium er homogent og lineært med permittivitet ϵ og permeabilitet μ . Yderligere antages, at mediets ledningsevne er 0. Strømtætheden $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ skyldes da udelukkende udefra påtrykte strømme i kilderne. Tilsvarende kan der ifølge kontinuitetsligningen kun være en tidsvarierende ladningstæthed, hvor der er en strøm, altså igen i kilderne.

Vi skriver nu den 4. Maxwell ligning som

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (14.10)$$

og udnytter lineariteten til at eliminere $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ og $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ sådan, at

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}. \quad (14.11)$$

Her kan vi da indføre de elektromagnetiske potentialer med resultatet

Slem ligning

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mu \mathbf{J}, \quad (14.12)$$

hvorefter identiteten $\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2$ i tabel A2:8 giver

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \mathbf{J}. \quad (14.13)$$

De to første led kan fint indgå i en bølgeligning, mens leddet i parentes ser bekymmerligt ud. Det ville derfor være særdeles bekvemt, hvis potentialerne opfyldte den ekstra betingelse

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.} \quad (14.14)$$

Denne betingelse kaldes *Lorentzbetingelsen*, og den er analog med Coulombbetingelsen $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, som vi anvendte ved stationære felter jvf. 6.61. I slutningen af dette afsnit skal vi vise, at den frihed, som 14.6 og 14.7 giver ved valget af potentialer, er tilstrækkelig til, at Lorentzbetingelsen altid kan opfyldes. Her skal vi blot gå ud fra, at den er opfyldt sådan, at 14.13 bliver

Lorentz-betingelsen

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J},} \quad (14.15)$$

som er den søgte inhomogene bølgeligning, der forbinder vektorpotentialet $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ med kilden $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$.

Ligning for A

For at finde den tilsvarende bølgeligning for φ begynder vi med den 1. Maxwell ligning på formen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (14.16)$$

og indsætter $\mathbf{E}$ efter 14.5, hvilket giver

$$-\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (14.17)$$

Herefter kan $\nabla \cdot \mathbf{A}$ indføres ved hjælp af Lorentzbetingelsen 14.14 sådan, at

$$\boxed{\nabla^2 \varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon},} \quad (14.18)$$

som er den søgte bølgeligning, der forbinder skalarpotentialet $\varphi(\mathbf{r}, t)$ med kilden $\rho(\mathbf{r}, t)$.

Ligning for φ

I praksis vil udsendelsen og udbredelsen af elektromagnetisk stråling oftest ske i vacuum eller luft. I 14.14, 14.15 og 14.18 gælder da $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ og $\epsilon\mu = 1/c^2$.

Lorentz-
betingelsen

▷ Lorentzbetingelsen: Vi skal her vise, at Lorentzbetingelsen 14.14 altid kan opfyldes. Lad $(\mathbf{A}', \varphi')$ være potentialer som korrekt giver felterne $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Vi søger en skalarfunktion ξ , som med 14.6 og 14.7 giver potentialer $(\mathbf{A}, \varphi)$, der opfylder Lorentzbetingelsen. Ved indsætning i 14.14 finder man

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \nabla^2 \xi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

dvs., at betingelsen er opfyldt dersom

$$\nabla^2 \xi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \left(\nabla \cdot \mathbf{A}' + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right).$$

kan opfyldes

Men dette er jo en inhomogen bølgeligning, hvor kildeleddet på højre side er en kendt funktion, eftersom $\mathbf{A}'$ og φ' er kendte. Er højre side nul, opfylder de oprindelige potentialer allerede Lorentzbetingelsen. Er højre side ikke nul, vil løsning af differentiaalligningen give et ξ , som igen giver et $(\mathbf{A}, \varphi)$, der opfylder Lorentzbetingelsen. ◁

14.3 Løsning af bølgeligningen med kilder

Problemet

Den næste opgave bliver nu at løse de inhomogene bølgeligninger 14.15 og 14.18 for felterne $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ og $\varphi(\mathbf{r}, t)$ med foreskrevne kilder $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ og $\rho(\mathbf{r}, t)$. Vi skal antage, at kildefelterne kun forekommer i en begrænset del af rummet.

Opgaven kan løses matematisk stringent ved brug af den såkaldte *Green*-funktionsteknik. Det skal vi her give afkald på og nøjes med løse argumenter, som dog fører til det rigtige resultat og gør dette plausibelt.

Da fordelingen af strøm og ladning er begrænset er $\rho = 0$ og $\mathbf{J} = 0$ i den største del af rummet. Bølgeligningerne 14.15 og 14.18 er da homogene differentiaalligninger med løsninger, hvoraf nogle blev undersøgt i forrige kapitel. Løsningerne til de inhomogene ligninger fås ved, at man til den generelle løsning til den homogene ligning lægger en vilkårlig partikulær løsning til den inhomogene ligning. Det, vi søger, er en sådan partikulær løsning.

Oscillerende
punktkilde

Vi kan se på bølgeligningen 14.18 i vacuum og med en oscillerende punktladning $q(t)$ som kilde. Dette er ganske vist en fysisk urimelighed, da ladningen ikke har noget sted at oscillere hen, men matematisk kan den godt lede til en løsning. Vi lægger nulpunktet i punktladningen. I rummet gælder der da

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (14.19)$$

Singularitet

undtagen netop i nulpunktet. Vi kan omgive dette med en lille kugle K med radius δ og integrere over kuglens volumen, hvilket på grund af 14.18, giver

$$\int_K \left(\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) dv = -\frac{q(t)}{\epsilon_0}. \quad (14.20)$$

Sfærisk
symmetri

Der er tydeligvis sfærisk symmetri i dette problem sådan, at løsningen til den homogene ligning 14.19 er af formen $\varphi = \varphi(r, t)$ hvor r er afstanden fra nulpunktet. Bølgeligningen i sfæriske koordinater bliver da

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (14.21)$$

Vi har tidligere studeret et tilsvarende problem i *Bølger*, afsnit 2.2.2 og som løsning fundet en udadgående kuglebølge af formen $f(r - vt)/r$, hvor v er fasehastigheden. I tilfældet her er det bekvemt at skrive løsningen som

*Kuglebølge
som løsning*

$$\varphi(r, t) = \frac{f(t - r/c)}{r}, \quad (14.22)$$

hvor f er en vilkårlig funktion, som nu skal vælges sådan, at den inhomogene bølgeligning tilfredsstilles.

Går vi meget nær til nulpunktet, kan vi se bort fra r/c i funktionens argument sådan, at $\varphi(r, t) = f(t)/r$. Dette ønsker vi at indsætte i integralet 14.20. For det første led kan vi skrive

*Nær nul-
punktet*

$$\nabla^2 \varphi = \nabla^2 \frac{f}{r} = f \nabla^2 \frac{1}{r} = f \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} = -f \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (14.23)$$

mens der for den 2. tidsafledede gælder

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (14.24)$$

I grænsen $\delta \rightarrow 0$ giver dette led 0 ved integrationen, da det forholder sig som δ^{-1} , mens kuglens volumen forholder sig som δ^3 . Tilbage bliver da volumenintegralet af $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3)$, som vi tidligere i 2.44 har fundet til 4π . Vi ender derfor med

Lille kugle

$$\int_K \nabla^2 \varphi dv = -4\pi f(t) = -\frac{q(t)}{\epsilon_0} \Rightarrow f(t) = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0} \quad (14.25)$$

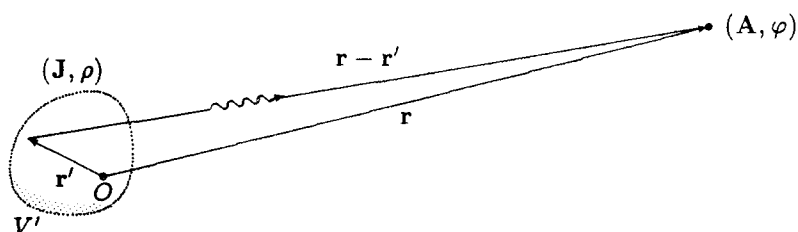
og har altså sandsynliggjort relationen

$$\varphi(r, t) = \frac{f(t - r/c)}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(t - r/c)}{r}, \quad (14.26)$$

som bestemmer potentialet fra den oscillerende punktkilde overalt i rummet.

Hermed har vi nået den afgørende indsigt, at potentialet til tiden t i afstanden r fra kilden ikke bestemmes af den øjeblikkelige ladning $q(t)$, men af ladningen $q(t - r/c)$ til det tidligere tidspunkt $t^* = t - r/c$, som kaldes den *retardedede tid*. Det fysiske indhold er tydeligvis, at den ladning, som bestemmer det øjeblikkelige felt i et fjernt punkt, ikke er ladningen nu, men den ladning som fandtes tiden r/c tidligere. Meget anskueligt er r/c netop er den tid, det tager for en elektromagnetisk forstyrrelse at nå frem fra kilden til iagttageren i afstanden r .

Retarderet tid



Figur 14.1: Kildepunkt og målepunkt ved beregning af retarderede potentialer.

Generalisation

For en udstrakt kilde må den retarderede tid indføres for hvert punkt af ladningsfordelingen, som dernæst integreres over fordelingsvolumen. For de tre komponenter af vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ kan man gennemføre en helt tilsvarende argumentation. Kildeleddene er da de tre komponenter af $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t^*)$, altså strømtætheden til den retarderede tid. De dynamiske udtryk for de tidligere udledte statiske potentialer 2.32 og 6.60 bliver da

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (14.27)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (14.28)$$

De retarderede potentialer

Disse udtryk kaldes de *retarderede potentialer*. Ved indsætning kan man eftervise, at de tilfredsstiller bølgligningerne 14.15 og 14.18, som direkte fører tilbage til 4. og 1. Maxwell ligning, som derfor også er opfyldt. Som tidligere anført, er 2. og 3. Maxwell ligning automatisk opfyldt, når felterne afledes af potentialerne. Endelig kan man vise, at potentialerne 14.27 og 14.28 også opfylder Lorentzbetingelsen 14.14. De retarderede potentialer kan derfor siges at være den endegyldige løsning til Maxwells ligninger, uanset hvad man måtte forestille sig af strømme og ladninger.

kan det hele

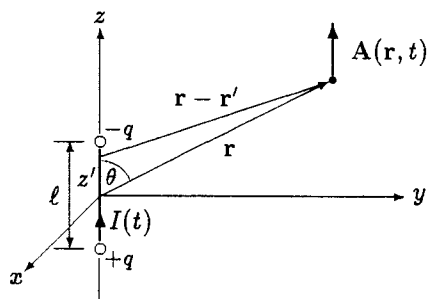
14.4 Udstråling fra en elektrisk dipol

Dipolens betydning

Vi skal nu anvende formalismen fra forrige afsnit til at undersøge udstrålingen fra en lille, oscillerende elektrisk dipol. Denne type stråling har stor teoretisk og praktisk betydning, fordi større og mere komplicerede systemer ofte kan tænkes opbygget af små dipoler. Yderligere kan mange træk af udstrålingen fra kvantesystemer, som molekyler, atomer og atomkerner, beskrives ved hjælp af den klassiske teori for elektriske dipoler. Dette selv om strålingen fra et kvantesystem skyldes fotonudsendelse i forbindelse med diskontinuerte ændringer i ladningsfordelingerne og ikke kontinuert energiudsendelse, som fra en oscillerende dipol.

Hertz dipol

Det simplest mulige eksempel er en *Hertz dipol*, som blot består af to ledende kugler forbundet med en capacitansfri ledning med længde ℓ . Har dipolen totalladningen 0, må de to kugler til ethvert tidspunkt have lige store, men modsatte ladninger $\pm q(t)$, da der ikke kan være ladning på ledningen.



Figur 14.2: Beregning af udstrålingen fra en Hertz dipol.

Dipolen tænkes anbragt langs z -aksen i et koordinatsystem symmetrisk om nulpunktet, således at kuglerne befinder sig i punkterne $z = \pm \ell/2$. Vi forestiller os, at ladningerne oscillerer frem og tilbage mellem kuglerne under påvirkning af en højfrekvent, ydre vekselspænding. Strømmen i forbindelsesledningen vil da være

$$I(t) = \dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}. \quad (14.29)$$

Den første opgave bliver nu at beregne det retarderede vektorpotential i et vilkårligt punkt P i rummet med stedvektoren $\mathbf{r}$. Kildepunktet ligger altid på z -aksen, så dets beliggenhed kan angives ved $\mathbf{r}' = z'\mathbf{e}_z$, hvor $\mathbf{e}_z$ er enhedsvektoren langs z -aksen. Ved indsætning i 14.28 foretager vi den sædvanlige substitution $\mathbf{J}d\mathbf{v} = I d\ell' \equiv I dz'$, som bringer os fra et volumenintegral til et linieintegral. Da strømmen altid er i z -aksens retning, må vektorpotentialet være parallelt med denne, og vi kan nøjes med at angive komponenten A_z , som bestemmes ved integralet

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{I(z', t - |\mathbf{r} - \mathbf{e}_z z'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{e}_z z'|} dz'. \quad (14.30)$$

Beregningen af retarderede potentialer vanskeliggøres betydeligt af, at den retarderede tid er forskellig for forskellige punkter af det udstrålende system. Vi ser det illustreret her, hvor størrelsen $|\mathbf{r} - \mathbf{e}_z z'|$ forekommer både i integrandens nævner og i den retarderede tid. Denne type vanskelighed må som regel løses ved passende tilnærmelser.

Forudsættes det, at der observeres i en afstand, som er stor i forhold til dipolens længde, kan vi foretage approximationen

$$|\mathbf{r} - \mathbf{e}_z z'| = (r^2 - 2z'\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z + z'^2)^{1/2} \approx r \left(1 - \frac{2z'\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z}{r^2} \right)^{1/2} \approx r - z' \cos \theta, \quad (14.31)$$

hvor θ er polarvinklen for vektoren $\mathbf{r}$.

Ved beregningen af integralet ville det være bekvemt, om man helt kunne se bort fra integrandens afhængighed af z' . For nævneren er der ikke noget særligt problem. Da observationsafstanden er stor i forhold til dipolens længde, kan man uden videre anvende approximationen $r - z' \cos \theta \approx r$. I tælleren må man imidlertid være lidt mere forsigtig. Strømmen oscillerer med høj frekvens og derfor kan selv en lille ændring i den retarderede tid give en stor ændring i strømmen.

Retardationen for et bestemt punkt af dipolen bestemmes efter 14.31 af tidsintervallet $\Delta t = z' \cos \theta / c < \ell / c$. Skal vi kunne anvende samme retardation for alle punkter, må dette tidsinterval være lille i forhold til svingningstiden τ for strømmen. Vi får derfor betingelsen

$$\frac{\ell}{c} \ll \tau \Rightarrow \ell \ll c\tau = \lambda, \quad (14.32)$$

hvor λ er bølgelængden af den udsendte stråling.

For store afstande ($r \gg \ell$) og en lille dipol ($\ell \ll \lambda$) kan vi altså negligere z' -afhængigheden af retardationen. Den sidste betingelse er den, vi tidligere (jvf. 11.1) har stillet for, at strømmen kan anses for den samme i alle tværsnit af en kreds. I tilfældet her skal strømmen være den samme i

*Retarderet
vektorpotential*

Et problem

Approximation

*Betingelse
for samme
retardation*

alle tværsnit af ledningen mellem de to kugler. Dette har vi implicit forudsat ved at gøre ledningen capacitansfri.

*Vektorpotential
fundet*

Med disse forudsætninger bliver integranden i 14.30 uafhængig af z' , og udtrykket for vektorpotentialet bliver simpelthen

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \ell}{4\pi r} I(t - r/c). \quad (14.33)$$

*Genvej til
skalarpotential*

Vi kunne nu gå videre, og beregne skalarpotentialet ved hjælp af 14.27. Dette kræver dog nogen påpasselighed med approximationerne, da potentialet bliver en differens mellem bidrag fra to numerisk lige store ladninger, som kun adskiller sig ved en lidt forskellig placering i rummet. Det er derfor regnemæssigt simplere at finde skalarpotentialet ud fra vektorpotentialet ved hjælp af Lorentzbetingelsen, som vi jo ved er opfyldt for potentialerne 14.27 og 14.28.

Vi anvender derfor 14.14 til at finde $\partial\varphi/\partial t$ og indsætter vektorpotentialet efter 14.33

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= -c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} I(t - r/c) \\ &= -\frac{\ell}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z}{r^3} I(t - r/c) + \frac{z}{r^2 c} \dot{I}(t - r/c) \right]. \end{aligned} \quad (14.34)$$

*Skalarpotential
fundet*

Ved beregningen af divergensen er det benyttet, at der kun findes en A_z -komponent og desuden den ofte nyttige regel, at $\partial r/\partial z = z/r$. Skalarpotentialet findes derefter ved integration over tiden, idet man husker, at $I = \dot{q}$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^2} \left[\frac{q(t - r/c)}{r} + \frac{I(t - r/c)}{c} \right]. \quad (14.35)$$

Felter findes

Felterne $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ kan nu findes ved differentiation af potentialerne, idet der efter 14.1 og 14.5 gælder

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (14.36)$$

*Harmonisk
variation*

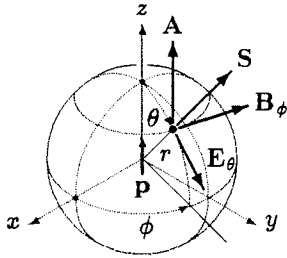
For at gennemføre differentiationerne explicit er det dog nødvendigt at kende tidsafhængigheden af strøm og ladning. Vi skal antage, at denne er harmonisk med cyklisk frekvens ω således, at de retarderede værdier for ladning og strøm bliver

$$\begin{aligned} q(t - r/c) &= q_0 \cos \omega(t - r/c) \\ I(t - r/c) &= -q_0 \omega \sin \omega(t - r/c) = I_0 \sin \omega(t - r/c), \end{aligned} \quad (14.37)$$

idet kompleks skrivemåde næppe byder på særlige fordele her.

Koordinater

Ved beregning af felterne er det mest hensigtsmæssig at arbejde i sfæriske koordinater, som vist på fig. 14.3. Med udnyttelse af 14.33 finder man de lokale komponenter af vektorpotentialet ved projektion på r - og θ -retningerne, mens ϕ -komponenten bliver nul. Skalarpotentialet i disse koordinater findes



Figur 14.3: Feltvektorenes beliggenhed i sfæriske koordinater for elektrisk dipolstråling.

af 14.35, idet $z = r \cos \theta$.

Potentialer

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{\mu_0 I_0 \ell}{4\pi r} \cos \theta \sin \omega(t - r/c), \\ A_\theta &= -\frac{\mu_0 I_0 \ell}{4\pi r} \sin \theta \sin \omega(t - r/c), \\ A_\phi &= 0, \\ \varphi &= \frac{-I_0 \ell}{4\pi \epsilon_0} \cos \theta \left[\frac{\cos \omega(t - r/c)}{\omega r^2} - \frac{\sin \omega(t - r/c)}{rc} \right]. \end{aligned} \quad (14.38)$$

Selve beregningen af felterne ved hjælp af 14.36 og differentialudtrykkene i tabel A.4 er langsommelig, og vi kan her indskrænke os til at sammenfatte resultaterne, som bliver

E-felt

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{2I_0 \ell}{4\pi \epsilon_0} \cos \theta \left[\frac{\sin \omega(t - r/c)}{r^2 c} - \frac{\cos \omega(t - r/c)}{r^3 \omega} \right], \\ E_\theta &= \frac{-I_0 \ell}{4\pi \epsilon_0} \sin \theta \left[\left(\frac{1}{r^3 \omega} - \frac{\omega}{rc^2} \right) \cos \omega(t - r/c) - \frac{1}{r^2 c} \sin \omega(t - r/c) \right], \\ E_\phi &= 0, \end{aligned} \quad (14.39)$$

mens magnetfeltet, som kun får en ϕ -komponent, findes til

B-felt

$$\begin{aligned} B_r &= 0, \\ B_\theta &= 0, \\ B_\phi &= \frac{\mu_0 I_0 \ell}{4\pi} \sin \theta \left[\frac{\omega}{rc} \cos \omega(t - r/c) + \frac{1}{r^2} \sin \omega(t - r/c) \right]. \end{aligned} \quad (14.40)$$

Udtrykkene 14.39 og 14.40 er de fuldstændige udtryk for felterne fra en dipol gyldige med de gjorte forudsætninger. I praksis vil man skelne mellem *nærfeltet*, hvor alle de viste led bidrager til feltet, og *fjernfeltet*, hvor kun de led bidrager, som aftager langsomst med afstanden.

Nærfelt og fjernfelt

Inspektion af udtrykkene viser, at det er leddene, der aftager som $1/r$, som udgør fjernfeltet. Det indeholder kun et E_θ og et B_ϕ . Feltvektorerne $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ er således vinkelrette på hinanden og på udbredelsesretningen $\mathbf{r}$, som vist på fig. 14.3. Det stemmer med, at i store afstande fra kilden ser et stykke af den krumme bølgeplan ud som en plan bølge. Separat udskrevet er

Fjernfeltet alene

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{I_0 \ell \omega}{c^2} \frac{1}{r} \sin \theta \cos \omega(t - r/c). \quad (14.41)$$

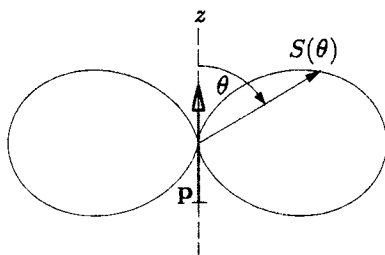
$$B_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 \ell \omega}{c} \frac{1}{r} \sin \theta \cos \omega(t - r/c). \quad (14.42)$$

Poynting
vektor

Med disse udtryk kan vi beregne bølgens Poynting vektor, som må være rettet radialet. Poynting vektorens størrelse bliver

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{1}{\mu_0} E_\theta B_\phi = \frac{(I_0 \ell)^2 \omega^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \cos^2 \omega(t - r/c). \quad (14.43)$$

På grund af faktoren $\cos^2$ er Poyntingvektoren altid rettet radialet udad. Der sker altså en stadig udstråling af energi fra dipolen til det uendelig fjerne. Af denne grund kaldes fjernfeltet også for *strålingsfeltet*.



Figur 14.4: Vinkelfordelingen af udstrålingen fra en dipol. Den rumlige fordeling fremkommer ved rotation af figuren om z-aksen

Strålingens
vinkelfor-
deling

Der udstråles ikke lige megen energi i alle retninger. Dette fremgår af faktoren $\sin^2 \theta$, som viser, at der udstråles maximal effekt i ekvatorplanen ($\theta = \pi/2$), mens udstrålingen mod polerne ($\theta = 0, \pi$) er nul. Dette er illustreret ved det på fig. 14.4 viste 'sommerfugle-mønster'.

Den samlede udstrålede effekt i alle retninger kan findes ved at integrere Poyntingvektoren over en stor kugleflade K

$$P = \oint_K \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \frac{(I_0 \ell)^2 \omega^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cos^2 \omega(t - r/c) \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta 2\pi r^2 \sin \theta d\theta. \quad (14.44)$$

Samlet effekt

Det sidste integral har værdien $8\pi/3$. Man bemærker, at udstrålingen er uafhængig af kuglens radius, i overensstemmelse med, at der ikke afsættes energi i mediet (vacuum). Den samlede øjeblikkelige udstråling bliver

$$P(t) = \frac{(I_0 \ell)^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \cos^2 \omega(t - r/c), \quad (14.45)$$

Middeleffekt

med middeleffekten

$$\langle P \rangle = \frac{(I_0 \ell)^2 \omega^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \frac{I_0^2}{2}. \quad (14.46)$$

Ved den sidste omskrivning er bølgelængden λ indført, idet $\omega/c = 2\pi/\lambda$. Dette udtryk har samme form som den afsatte vekselstrømseffekt $\frac{1}{2} R I_0^2$ i en kreds med resistans R . Af denne grund kaldes størrelsen

$$R_r = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 = 789 \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2, \quad (14.47)$$

som udtrykkes i Ω , for dipolens *strålingsresistans* i det tomme rum.

14.5 Multipolstråling

Hertz dipolen, som vi undersøgte i forrige afsnit, er et særlig simpelt eksempel på en tidsvarierende fordeling af strøm og ladning. Her skal vi nu se på mere generelle strøm-ladningsfordelinger, idet vi blot antager, at fordelingen er *begrænset* sådan, at dens største udstrækning er lille i forhold til observationsafstanden. Situationen er som illustreret på fig. 14.1, hvor nulpunktet er anbragt inde i fordelingen, og hvor beliggenheden af kildepunkter og målepunkter som sædvanlig angives ved $\mathbf{r}'$ og $\mathbf{r}$. Opgaven er at foretage en *multipoludvikling* af strålingsfeltet, i lighed med den, vi gennemførte for det statiske tilfælde i afsnit 2.8 og 6.9.

*Generel
fordeling*

I første omgang drejer det sig om, at rækkeudvikle de elektromagnetiske potentialer 14.27 og 14.28. Da $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ forekommer både i den retarderede tid og i integrandens tæller foretager vi rækkeudviklingerne

*Potentialer
udvikles*

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{\frac{1}{2}} = r \left[1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right], \quad (14.48)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right], \quad (14.49)$$

hvor der kun er medtaget led til 1. orden i r' . Herefter bliver skalarpotentialet i et fjernt punkt

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{rc}\right)}{r - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}/r} dv'. \quad (14.50)$$

Vi kan nu Taylor-udvikle det retarderede ρ med resultatet

$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{rc}\right) = \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{rc} \frac{\partial \rho}{\partial t} \bigg|_{\mathbf{r}', t - r/c}, \quad (14.51)$$

som sammen med 14.49 giver følgende udtryk for potentialet, når der kun medtages led af 0. eller 1. orden i r'

*Skalar-
potential*

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \underbrace{\int_{V'} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dv'}_Q \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \underbrace{\int_{V'} \mathbf{r}' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dv'}_{\mathbf{p}} \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^2 c} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V'} \mathbf{r}' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dv'}_{\dot{\mathbf{p}}}. \end{aligned} \quad (14.52)$$

Til og med 1. orden er der altså tre bidrag til potentialet, som nu kun afhænger af en enkelt retarderet tid, $t - r/c$, som svarer til nulpunktet. I det første led giver integralet fordelingsens samlede ladning Q , som er konstant, uafhængig af tiden, da der er tale om en isoleret fordeling. Dette led er uden strålingsmæssig betydning. I det næste led er integralet fordelingsens

Til 1. orden

Dipolmoment

retarderede dipolmoment $\mathbf{p}$ (sml. 2.73). Endelig indeholder det sidste led den tidsafledede $\dot{\mathbf{p}}$ af det retarderede dipolmoment. Skalarpotentialet kan derfor lidt mere kompakt skrives som

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(t - r/c)}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr^2} \right]. \quad (14.53)$$

Anvendes dette udtryk på en Hertz dipol langs z -aksen bliver $Q = 0$ og $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = qlr \cos \theta = qlz$, hvorefter man let overbeviser sig om, at udtrykket indeholder 14.35.

Hver komponent af vektorpotentialet kan udvikles på lignende måde, idet man begynder med udtrykket

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{rc})}{r - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}/r} dv'. \quad (14.54)$$

Vektorpotential

På samme måde som med ladningstætheden Taylor-udvikler vi den retarderede strømtæthed til 1. orden i r'

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{rc}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{rc} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}', t - r/c}, \quad (14.55)$$

Til 1. orden

hvorefter vektorpotentialet til samme orden bliver af formen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \underbrace{\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) dv'}_{\dot{\mathbf{p}}} \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \underbrace{\int_{V'} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) dv'}_{\mathbf{m} \times \mathbf{r}} \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^2 c} \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V'} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) dv'}_{\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (14.56)$$

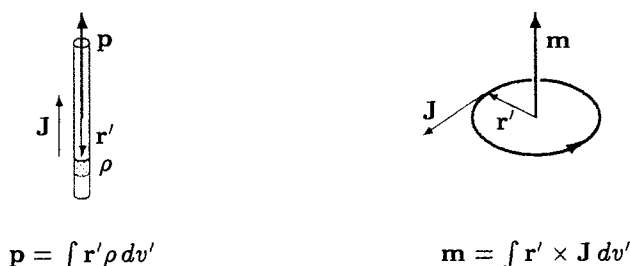
Frem og tilbage

Efter opgave 5.5 har det første integral værdien $d\mathbf{p}/dt = \dot{\mathbf{p}}$. I de to sidste led optræder samme integral, som vi omformer på følgende måde:

$$\begin{aligned} \int_{V'} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J} dv' &= \frac{1}{2} \int_{V'} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{r}'] dv' \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V'} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{r}'] dv'. \end{aligned} \quad (14.57)$$

Om det første integral viser vi i slutningen af dette afsnit, at det er lille af 2. orden i r' . Vi kan derfor se bort fra det her. Det andet integral kan efter A.7 skrives som et trippelprodukt sådan, at

$$\int_{V'} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J} dv' = \frac{1}{2} \int_{V'} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{r}'] dv' = \frac{1}{2} \int_{V'} (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{r} dv'. \quad (14.58)$$



$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho dv'$$

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J} dv'$$

Figur 14.5: En oscillerende strøm i et lederstykke er et eksempel på en elektrisk dipol. Tilsvarende giver oscillerende strøm i en lukket kreds en magnetisk dipol.

I det sidste udtryk genkender vi, jvf. 6.40, fordelings magnetiske dipolmoment som faktoren

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{r}' \times \mathbf{J} dv'. \quad (14.59)$$

Da der overalt skal anvendes retarderede værdier, kan det endelige udtryk for fordelings vektorpotential skrives som

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\dot{\mathbf{p}}}{r} + \frac{\mathbf{m}(t - r/c) \times \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\dot{\mathbf{m}}(t - r/c) \times \mathbf{r}}{cr^2} \right]. \quad (14.60)$$

Man kan bemærke, at udtrykkene 14.53 og 14.60 for konstante ladninger og strømme reducerer til de statiske multipoludviklinger 2.71+2.76 og 6.87.

Forskellen på en elektrisk og en magnetisk dipol er illustreret på fig. 14.5. I den elektriske dipol er $\mathbf{J}$ og $\mathbf{r}'$ parallelle og det magnetiske dipolmoment er derfor altid 0, jvf. 14.59. For en Hertz dipol bliver den tidsaffedede af det elektriske dipolmoment $\dot{\mathbf{p}} = \ell \dot{q} = \ell I$. Antager vi, at dipolen er rettet langs z-aksen, ser man, at 14.60 indeholder 14.33. En magnetisk dipol kan man forestille sig som en lukket strømkreds, hvor ladningstætheden ρ altid er 0. Efter 2.73 er der da ikke noget elektrisk dipolmoment.

De elektromagnetiske felter $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ kan nu beregnes ud fra de retarderede potentialer 14.53 og 14.60 ved brug af 14.1 og 14.5. Da potentialerne kun er udviklet til 1. orden i r' , er vi selvsagt begrænset til dipolstråling. Vi skal yderligere begrænse os til strålingsfelterne, dvs. de bidrag til $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ der aftager med observationsafstanden som $1/r$.

Vi betragter først en rent elektrisk dipol med moment $\mathbf{p}(t)$. Det magnetiske moment $\mathbf{m}$ i 14.60 er da 0. Ved beregningen af $\mathbf{E}$ behøver vi gradienten af 14.53. Her er det første led statisk, og bidrager ikke til strålingsfeltet. Det andet led er lille af orden $o(r^{-2})$ og dets gradient bliver lille af samme eller højere orden. (Denne påstand kan bevises ved en udledning, som er helt analog med den som fører til 14.80 sidst i dette afsnit).

Det sidste led i 14.53 er af størrelsen $o(r^{-1})$. Som det ses af 14.80 indeholder dets gradient et led af samme størrelsesorden, som fremkommer ved differentiation gennem r i den retarderede tid. Dette led bidrager til strålingsfeltet og er givet ved 14.81. Desuden bidrager efter 14.5 leddet $-\partial \mathbf{A}/\partial t$, som beregnes af 14.60 med $\mathbf{m} = 0$. Ialt bliver $\mathbf{E}$ -feltet da

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}}}{c^2 r^3} \mathbf{r}, \quad (14.61)$$

*Magnetisk
moment*

*To typer
dipol*

*Elektrisk
dipol alene*

E-felt ialt

eller, med den retarderede tid indsat og med μ_0 elimineret,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{r} \right). \quad (14.62)$$

B-felt ialt

Af 14.82 finder man tilsvarende magnetiske del af strålingsfeltet som

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{r^2}. \quad (14.63)$$

I det følgende anvendes en mere kompakt skrivemåde, hvor det er underforstået, at $\ddot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi c r^2} \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}}, \quad (14.64)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} [(\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}})\mathbf{r} - r^2 \ddot{\mathbf{p}}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}}). \quad (14.65)$$

Man bemærker, at de to felter kan udtrykkes ved hinanden, idet

$$\mathbf{E} = -\frac{c}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{B}, \quad (14.66)$$

der stemmer med relationen 13.20 for en plan harmonisk bølge, som udbreder sig i $\mathbf{r}$'s retning. Dette er et udtryk for, at et lille stykke af bølgen i store afstande fra kilden tager sig ud som en plan bølge.

Poyntings vektor

Vi kan nu også beregne bølgens Poynting vektor. Efter 14.66 er $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ vinkelrette på hinanden og på $\mathbf{r}$. Poynting vektoren peger i $\mathbf{r}$'s retning idet

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{c}{\mu_0 r} (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{c}{\mu_0 r} \mathbf{r} B^2, \quad (14.67)$$

hvor vi efter 14.64 igen kan indføre dipolmomentet sådan, at

$$\mathbf{S} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^5} \mathbf{r} (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}})^2. \quad (14.68)$$

Hvis dipolmoment er rettet efter z -aksen gælder specielt

$$\mathbf{S} = \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (14.69)$$

hvor man for en Hertz dipol genfinder 14.43 og vinkelfordelingen fig. 14.4.

Berømt formel

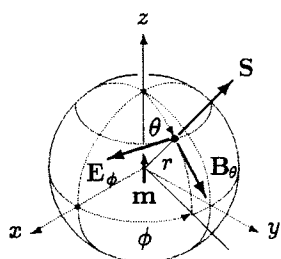
Integreres Poynting vektoren 14.68 over en stor kugle K , finder man den samlede øjeblikkelige udstråling

$$P(t) = \oint_K \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\ddot{p}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta 2\pi r^2 \sin \theta d\theta, \quad (14.70)$$

som i lighed med 14.45 giver

$$P(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\ddot{p}^2}{c^3}. \quad (14.71)$$

Dette er en berømt formel for den udstrålede effekt fra en dipol.



Figur 14.6: Feltvektorenes beliggenhed for en magnetisk dipol.

Vi skal kort presentere de tilsvarende resultater for en rent magnetisk dipol. Her er $\mathbf{p} = 0$, men $\mathbf{m}(t) \neq 0$. Skalarpotentialet 14.53 er da 0 sådan, at det er vektorpotentialet 14.60 (med $\dot{\mathbf{p}} = 0$), som alene bestemmer felterne. I dette tilfælde er $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t$. Magnetfeltet findes som $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, men de detaljerede beregninger bliver mere komplicerede, da der er tale om rotationen af et vektorprodukt. Vi angiver derfor blot det samlede udtryk for fjernfeltet fra en magnetisk dipol, som er

Magnetisk dipol alene

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r^2} \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{m}}, \quad (14.72)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{m}}), \quad (14.73)$$

hvor symmetrien med 14.64–14.65 er tydelig. Man bemærker også, at

$$\mathbf{B} = \frac{1}{rc} \mathbf{r} \times \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{c}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{B}. \quad (14.74)$$

Relationen mellem feltvektorerne er altså den samme som for den elektriske dipol 14.66, men vektorenes beliggenhed er anderledes, som det ses ved at sammenligne fig. 14.3 med fig. 14.6.

Hvordan feltet ligger

Poynting vektoren for den magnetiske dipolstråling bliver herefter

$$\mathbf{S} = \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^5 r^5} \mathbf{r}(\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{m}})^2, \quad (14.75)$$

som blot ved en faktor $1/c^2$ adskiller sig fra 14.68. For den totalt udstrålede effekt finder man svarende til 14.71

$$P(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{m}}^2}{c^5}. \quad (14.76)$$

Vi har i det foregående fundet, at strålingsfeltet er bestemt af den 2. tidsafledede af det elektriske eller det magnetiske dipolmoment af en strøm-ladningsfordeling. For systemer, som har en passende symmetri, kan det ske, at disse momenter bliver 0, se f. eks. opgave 14.2. Det betyder dog ikke nødvendigvis, at der ikke er nogen udstråling fra sådanne systemer. Ved rækkeudviklingerne 14.53 og 14.60 gik vi kun til 1. orden i r' , og hvis disse dipolled forsvinder, kan negligerede højere ordens led få betydning og give anledning til udsendelse af stråling.

Højere multipolordner

Forskel i
strålings-
mønstre

Man taler da om elektrisk eller magnetisk quadrupolstråling, octupolstråling osv. som har hvert sit karakteristiske strålingsmønster, forskelligt fra det på fig. 14.4. De højere strålingsordner giver væsentlig lavere udstrålet effekt. Denne falder omtrentligt med en faktor $(\ell/\lambda)^2$ for hver multipolorden, idet $\ell \ll \lambda$ er systemets udstrækning (se også 14.46). Det er derfor altid det lavest forkommende multipolmoment, som giver det afgørende bidrag til strålingsudsendelsen. Multipolstråling af forskellig orden spiller en stor rolle for atomer og atomkerner.

Accelerationen
gør det

Det afgørende for udsendelsen af stråling er, at der forekommer accelererede ladninger. Tænk vi på en elektrisk dipol, hvor en ladning q bevæger sig i forhold til en fast ladning $-q$ i nulpunktet, svarer der hertil et dipolmoment $\mathbf{p} = q\mathbf{r}'$. Den 2. tidsafledede af dipolmomentet bliver da

$$\ddot{\mathbf{p}} = q\ddot{\mathbf{r}}', \quad (14.77)$$

som etablerer forbindelsen til accelerationen $\ddot{\mathbf{r}}'$. Dette kan indføres i 14.71

$$P(t) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{r}}'^2}{c^3}, \quad (14.78)$$

som er gyldig for hastigheder $v \ll c$.

▷ Integraler og differentialer til 1. orden: I strålingsteorien har man brug for forskellige integrationer og differentiationer, som på almindelig form bliver ganske komplicerede. Vi skal her angive nogle af disse begrænset til 1. orden i kildepunktskoordinaten $\mathbf{r}'$ og til fjernfeltet, altså til 1. orden i $1/r$.

Et integral

a) Integralet

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \int_{V'} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{J} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J})\mathbf{r}'] dv'$$

fra 14.57 er en vektor. Vi undersøger komposanterne hver for sig. For x -komposanten gælder således

$$I_x = \int_{V'} [(xx' + yy' + zz')J_x + (xJ_x + yJ_y + zJ_z)x'] dv'.$$

For at vurdere dette integral ser vi på følgende volumenintegraler, som efter divergensteoremet må være 0 ($\mathbf{J}$ forsvinder på overfladen S' da strømfordelingen er begrænset):

$$\begin{aligned} \int_{V'} \nabla \cdot (x'^2 \mathbf{J}) dv' &= \int_{V'} (2x'J_x + x'^2 \nabla \cdot \mathbf{J}) dv' = 0 \Rightarrow \\ \int_{V'} 2x'J_x dv' &= - \int_{V'} x'^2 \nabla \cdot \mathbf{J} dv' = o(r'^2) \end{aligned}$$

og tilsvarende

$$\begin{aligned} \int_{V'} \nabla \cdot (x'y' \mathbf{J}) dv' &= \int_{V'} (y'J_x + x'J_y + x'y' \nabla \cdot \mathbf{J}) dv' = 0 \Rightarrow \\ \int_{V'} (y'J_x + x'J_y) dv' &= - \int_{V'} x'y' \nabla \cdot \mathbf{J} dv' = o(r'^2) \\ &\dots\dots\dots \\ \int_{V'} (z'J_x + x'J_z) dv' &= - \int_{V'} x'z' \nabla \cdot \mathbf{J} dv' = o(r'^2) \end{aligned}$$

Herefter viser indsætning, at integralet I_x er lille af 2. orden i r'^2 , hvilket analogt kommer til at gælde for I_y og I_z . Hermed har vi da vist, at

$$\int_{V'} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{J} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J})\mathbf{r}'] dv' = o(r'^2). \quad (14.79)$$

b) For at finde den elektriske feltstyrke fra en oscillerende dipol må man beregne gradienten af et skalarprodukt af to vektorfelter. Dette er i almindelighed en besværlig opgave (se tabel A.2:6), men i den her betragtede approximation sker der visse forenklinger. Det er igen mest overskueligt at regne i koordinater. Opgaven er, med henvisning til 14.53, at finde

En gradient

$$-\nabla \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}}{cr^2} = -\nabla \frac{x\dot{p}_x + y\dot{p}_y + z\dot{p}_z}{cr^2},$$

hvor det er underforstået, at $\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)$. Vi beregner hver komponent af gradienten separat og tager x -komponenten som eksempel. Da den retarderede tid er en funktion af afstanden r alene, differentierer man hensigtsmæssigt gennem r , som f. eks.

$$\frac{\partial \dot{p}_y}{\partial x} = \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \ddot{p}_y \left(-\frac{1}{c}\right) \frac{x}{r} = -\ddot{p}_y \frac{x}{cr}.$$

Herefter bliver gradientens x -komponent

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}}{cr^2} \right) &= -\frac{1}{cr^2} \frac{\partial}{\partial x} (x\dot{p}_x + y\dot{p}_y + z\dot{p}_z) - \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{cr^2} \right) \\ &= -\frac{1}{cr^2} \dot{p}_x + \underbrace{\frac{x^2}{c^2 r^3} \ddot{p}_x + \frac{yx}{c^2 r^3} \ddot{p}_y + \frac{zx}{c^2 r^3} \ddot{p}_z}_{o(r^{-1})} + 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}}{cr^4} x. \end{aligned} \quad (14.80)$$

Da $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ser man, at kun de underklammede led bidrager til fjernfeltet, idet de to øvrige led er $o(r^{-2})$. Med de analoge udtryk for y - og z -komponenterne kan man derfor skrive den søgte gradient som

$$-\nabla \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}}{cr^2} = \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}}}{c^2 r^3} \mathbf{r}. \quad (14.81)$$

c) For at finde magnetfeltet fra en oscillerende elektrisk dipol skal man beregne rotationen af vektorpotentialet. Efter 14.60 skal man altså udføre operationen

En rotation

$$\nabla \times \frac{\dot{\mathbf{p}}}{r} = \nabla \frac{1}{r} \times \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{r} \nabla \times \dot{\mathbf{p}}.$$

Det første led er her $o(r^{-2})$ og bidrager derfor ikke til fjernfeltet. I det andet led udregnes rotationens komponenter enklost som en determinant, jvf. A.26:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{p}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{p}_x & \dot{p}_y & \dot{p}_z \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} -\ddot{p}_z y/cr + \ddot{p}_y z/cr \\ -\ddot{p}_x z/cr + \ddot{p}_z x/cr \\ -\ddot{p}_y x/cr + \ddot{p}_x y/cr \end{array} \right\} = -\frac{\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}}}{cr},$$

hvorefter den søgte rotation til 1. orden i $1/r$ kan skrives på vektorform

$$\nabla \times \frac{\dot{\mathbf{p}}}{r} = -\frac{\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}}}{cr^2}. \quad (14.82)$$

Udtrykkene, som er udledt under a)-c), blev uden bevis anvendt ved beregning af strålingsfelterne tidligere i dette afsnit. ◀

Kapitel 15

Relativiteten af de elektromagnetiske felter

15.1 Magnetfeltet som relativistisk fænomen

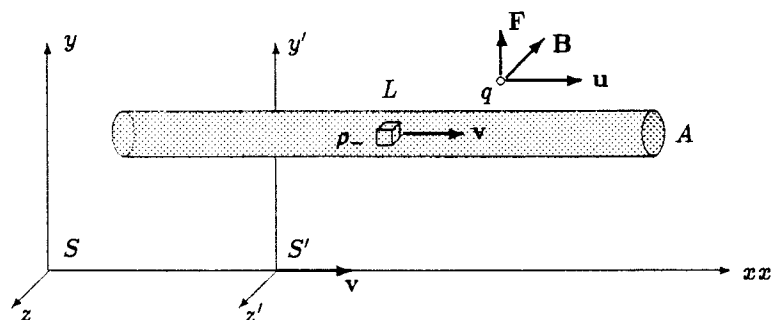
Ved opbygningen af den elektromagnetiske teori har vi indført de elektriske og magnetiske felter med henvisning til eksperimentelle erfaringer (kapitel 2 og 6). I dette kapitel skal vi se, at relativitetsteorien knytter disse felter intimt sammen. Den magnetiske vekselvirkning mellem strømme, det vil sige bevægede elektriske ladninger, er således en nødvendig følge af Coulombs lov og relativitetsprincippet. Man kan sige, at de effekter, som vi kalder magnetiske, ikke skyldes en ny slags vekselvirkning, men blot den velkendte elektriske vekselvirkning, når denne iagttages i bevægede referencesystemer.

I afsnittene 15.3–15.5 skal vi opstille transformationsligningerne for de elektriske og magnetiske felter. Men som indledning kan det være nyttigt at se på et simpelt eksempel, der giver en fornemmelse af, hvad det er, som 'sker', når vi anskuer tingene fra forskellige referencesystemer.

Eksemplet (fig. 15.1) er en lang ledning, hvor elektronerne bevæger sig med hastigheden v . Uden for lederen har vi en partikel med ladning q , som med hastigheden u bevæger sig parallelt med ledningen. Vi vil se på situationen i to forskellige referencesystemer: S , som er i hvile i forhold til ledningen og S' , som er i hvile i forhold til partiklen.

Samme vekselvirkning

To reference-systemer



Figur 15.1: Leder med strøm i referencesystem i bevægelse.

Magnetisk
kraft i S

I S har vi en tæthed ρ_- af elektroner med hastigheden v . Der er en lige så stor tæthed ρ_+ af positive ladninger, men de er i hvile i S . Vi har altså en uladet ledning og derfor ikke noget elektrisk felt omkring den. Kraften på den bevægede partikel er rent magnetisk

$$\mathbf{F} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (15.1)$$

Magnetfeltet $\mathbf{B}$ har vi tidligere (ved hjælp af Ampères lov 6.76) bestemt til

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 A \rho v}{2\pi r}, \quad (15.2)$$

hvor r er afstanden fra partiklen til lederens akse, og A lederens tværsnitsareal. Magnetfeltet $\mathbf{B}$ er overalt tangentielt til cirkler med centrum på akse. Af disse to udtryk finder vi kraften på partiklen til

$$F_r = \frac{q\mu_0 A \rho v u}{2\pi r}, \quad (15.3)$$

som er rettet radialt udad. Indfører vi $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$, og ser vi på det specielle tilfælde $u = v$, kan kraften skrives som

$$F_r = \frac{qA\rho}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v^2}{c^2}, \quad (15.4)$$

hvor v/c -faktoren allerede antyder, at vi her møder et relativistisk fænomen.

Kraften i S'

Vi ser nu på situationen i S' , som følger med partiklen. Hvis $u = v$ har partiklen ikke nogen hastighed i forhold til elektronerne, men nok i forhold til de positive ladninger. Disse skaber selvfølgelig et magnetfelt, men da partiklen er i hvile (sml. 15.1), er der ikke nogen magnetisk kraft, som virker på den. En eventuel kraft må være elektrisk. Det er naturligt at vente, at der også i S' er en kraft på partiklen, men hvor kommer den fra?

I S var ledningen uladet, fordi ladningstæthederne ρ_+ og ρ_- ophævede hinanden. Det gør ladningstæthederne i S' ikke, fordi de volumenelementer, som indgår i ladningstæthederne, er Lorentz-forkortede og forskellige for positive og negative ladninger. Dette er sagens kerne: Ladningerne selv er invariante, når vi skifter referencesystem, for ellers ville vi få besvær med ladningsbevarelse. Tænk f. eks. på de fri elektrons bevægelse i et stykke metal, som opvarmes. Men ladningstæthederne ændres på grund af Lorentz-forkortningen.

Ladningstætheds
transformeres

Lad os se på et stykke L_0 af lederen med stationær ladning $\rho_0 L_0 A_0$. Ser vi på den samme ladning i et referencesystem, som bevæger sig med hastigheden v , findes den i et lederstykke med den kortere længde

$$L' = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = L_0/\gamma(v), \quad (15.5)$$

hvor vi har indført den til hastigheden v svarende 'gamma-faktor'

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (15.6)$$

Heraf finder vi så ladningstætheden i S' som $\rho_0 L_0 A_0 / L' A_0$, det vil sige

$$\rho' = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \rho_0 \gamma(v). \quad (15.7)$$

Ladningstæthed transformeres altså som masse af en partikel.

Anvender vi dette på de positive ladninger, som jo er i hvile i S , får de i S' tætheden $\rho'_+ = \rho_+ \gamma(v)$. De negative ladninger er derimod i hvile i S' . Det vil sige, at de i S har tætheden $\rho_- = \rho'_- \gamma(v)$. Vi har altså

*Elektrisk
kraft i S'*

$$\rho'_+ = \rho_+ \gamma(v), \quad \rho'_- = \rho_- / \gamma(v). \quad (15.8)$$

Det er nu klart, hvorfor der vil være et elektrisk felt i S' . Den samlede ladningstæthed her bliver jo

$$\rho' = \rho'_- + \rho'_+ = \rho_+ \gamma(v) + \rho_- / \gamma(v), \quad (15.9)$$

men da $\rho_- + \rho_+ = 0$ er

$$\rho' = \rho_+ \left(\gamma(v) - \frac{1}{\gamma(v)} \right) = \rho_+ \frac{v^2}{c^2} \gamma(v). \quad (15.10)$$

I det bevægede system er lederen altså ladet og giver efter Gauss' lov det radiale elektriske felt

$$E'_r = \frac{\rho'_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v^2}{c^2} \gamma(v) \quad (15.11)$$

således, at kraften på ladningen q bliver

$$F'_r = qE' = \frac{q\rho_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v^2}{c^2} \gamma(v). \quad (15.12)$$

På nær faktoren $\gamma(v)$ er kraften i det bevægede system S' den samme som kraften 15.4 i S . For små hastigheder er kræfterne altså ens i de to systemer. Men i S forklarer vi kraften som en Lorentz-kraft på en bevæget partikel, mens vi i S' forklarer den som en elektrisk kraft fra en ladet leder. Bemærk, at dette også gælder for små partikelhastigheder, hvor kraften nok bliver mindre på grund af v^2/c^2 -faktoren, men hvor vi kan have meget store ladningstætheder ρ_+ . Dem mærker vi imidlertid ikke noget til rent elektrisk, da de kompenseres af lige store ladningstætheder ρ_- . Men magnetisk gør ladningstæthederne sig gældende og selv om magnetfeltet er en relativistisk effekt, kan kræfterne blive store, fordi ρ_+ er stor.

*Samme kraft
i S og S'*

Det skal til slut bemærkes, at udtrykkene 15.4 og 15.12 stemmer fuldstændig overens, idet faktoren $\gamma(v)$ netop svarer til transformationen fra S til S' af den vinkelrette kraftkomponent F . Se 15.29 med $u' = 0$ og $u = v$.

15.2 Nyttige resultater fra relativitetsteorien

I næste afsnit skal vi systematisk undersøge transformationsegenskaberne af de elektromagnetiske felter, men forinden er det hensigtsmæssigt at samle nogle nyttige resultater fra relativitetsteorien.

Kun et resumé

Vi anvender udelukkende referencesystemer S og S' i den *specielle* beliggenhed i forhold til hinanden. Det vil sige, at koordinataksene i S og S' er parvis parallelle, at koordinatsystemerne er sammenfaldende til $t = 0$ og at S' bevæger sig langs x -aksen med hastigheden v .

Lorentz-
transformation

For rum-tidskoordinaterne gælder da Lorentz-transformationerne, som vi skriver på formen

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - xv/c^2), \end{aligned} \quad (15.13)$$

hvor

$$\gamma = \gamma(v) = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c, \quad 1 \leq \gamma < \infty. \quad (15.14)$$

De omvendte transformationer $S' \rightarrow S$ fås som sædvanlig ved erstatning af v med $-v$ og ombytning af mærkede og umærkede størrelser.

Firevektor
defineret

En *firevektor* $\tilde{\mathbf{A}}$ er et sæt af fire fysiske størrelser $(A_x, A_y, A_z, A_t) = (\mathbf{A}, A_t)$, der transformerer som $(x, y, z, t) = (\mathbf{r}, t)$. Ved den specielle beliggenhed har vi

$$\begin{aligned} A'_x &= \gamma(v)(A_x - vA_t), \\ A'_y &= A_y, \\ A'_z &= A_z, \\ A'_t &= \gamma(v)(A_t - A_x v/c^2). \end{aligned} \quad (15.15)$$

Skalarproduktet af to firevektorer defineres som

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = A_t B_t - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}/c^2. \quad (15.16)$$

Af denne definition følger, som man let ser (opgave 15.1), at skalarproduktet er invariant ved transformationen 15.15. Dette gælder specielt for længden af en firevektor, idet

$$|\tilde{\mathbf{A}}|^2 = A_t^2 - \mathbf{A}^2/c^2. \quad (15.17)$$

Vigtigt!

Nogle vigtige firevektorer er:

Rum-tidskoordinaterne

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{bmatrix}, \quad (15.18)$$

Firehastigheden

$$\tilde{\mathbf{u}} = \gamma(u) \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (15.19)$$

Firebølgevektoren

$$\tilde{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ \nu/c^2 \end{bmatrix}, \quad (15.20)$$

Fireimpulsen

$$\tilde{\mathbf{p}} = m_0 \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} m_0 \gamma(u) \mathbf{u} \\ m_0 \gamma(u) \end{bmatrix}. \quad (15.21)$$

I disse udtryk er u hastigheden i S af en partikel med hvilemasse m_0 .

Vi får i det følgende brug for firehastighedens komponenter i S' . De bliver ifølge 15.15 og 15.19 bestemt af

$$\begin{aligned}\gamma(u')u'_x &= \gamma(u)\gamma(v)(u_x - v), \\ \gamma(u')u'_y &= \gamma(u)u_y, \\ \gamma(u')u'_z &= \gamma(u)u_z, \\ \gamma(u') &= \gamma(u)\gamma(v)(1 - vu_x/c^2).\end{aligned}\quad (15.22)$$

Ved hjælp af det sidste udtryk og dets inverse får man den nyttige relation

En nyttig én

$$\boxed{\gamma(v)(1 + vu'_x/c^2) = \frac{1}{\gamma(v)(1 - vu_x/c^2)}}. \quad (15.23)$$

I relativitetsteorien definerer man kraften $\mathbf{F}$ på en partikel og kraftens effekt P på samme måde som i den Newtonske mekanik. Det vil sige

Kraft og effekt

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (15.24)$$

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \frac{dE}{dt}, \quad (15.25)$$

hvor $\mathbf{p} = m_0\gamma(u)\mathbf{u}$ er partiklens impuls og $E = m_0\gamma(u)c^2$ dens energi. I analogi med 15.24 defineres *firekraften* da ved

Firekraft defineret

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau}, \quad (15.26)$$

hvor der differentieres efter partiklens egentid $\tau = t/\gamma(u)$. Det ses, at

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} = \gamma(u) \frac{d}{dt}. \quad (15.27)$$

Af udtrykket 15.21 for fireimpulsen og med brug af 15.24 og 15.25 finder vi da følgende udtryk for firekraften:

Firekraft fundet

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau} = \gamma(u) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ m_0\gamma(u) \end{bmatrix} = \gamma(u) \begin{bmatrix} d\mathbf{p}/dt \\ c^{-2}dE/dt \end{bmatrix} = \gamma(u) \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}/c^2 \end{bmatrix}. \quad (15.28)$$

Firekraften er en firevektor. Vi kan benytte dette til at finde de transformerede komponenter af den ordinære kraft, som bliver

Kraftens komponenter

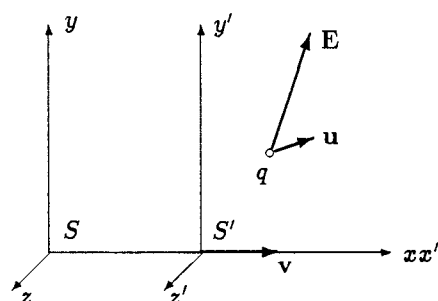
$$\begin{aligned}F'_x &= \frac{\gamma(v)\gamma(u)}{\gamma(u')} \left[F_x - \frac{v}{c^2}(F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z) \right], \\ F'_y &= \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} F_y, \\ F'_z &= \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} F_z.\end{aligned}\quad (15.29)$$

Disse udtryk er grundlaget for den transformation af de elektromagnetiske feltvektorer, vi skal gennemføre i de følgende afsnit.

15.3 Lorentztransformation af et elektrisk felt

Rent $\mathbf{E}$ -felt
i S

Vi skal nu demonstrere, at forekomsten af magnetfelter er en naturlig følge af, at der findes elektriske felter og af relativitetsprincippet. Dette sker ved at vise, at en Lorentztransformation af et rent elektrisk felt i et laboratoriesystem S giver anledning til et magnetfelt i et vandrende system S' .



Figur 15.2: Lorentz-transformation af kraften på en ladet partikel, som bevæger sig i et elektrisk felt.

Lad os se på en punktladning q , som i S har hastigheden $\mathbf{u}$ i det rent elektriske felt $\mathbf{E}$. Ladningen q er som tidligere nævnt en invariant og påvirkes i S af kraften $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Efter 15.29 bliver kraften $\mathbf{F}'$ på ladningen i S'

$$\begin{aligned} F'_x &= q \frac{\gamma(u)\gamma(v)}{\gamma(u')} \left[E_x - \frac{v}{c^2} (E_x u_x + E_y u_y + E_z u_z) \right], \\ F'_y &= q \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} E_y, \\ F'_z &= q \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} E_z. \end{aligned} \quad (15.30)$$

Kraften i S'
omskrives

For bedre at kunne overskue disse lidt komplicerede udtryk indfører vi naturligt nok hastigheden $\mathbf{u}'$, altså partiklens hastighed i S' . Hertil behøves følgende udtryk, som følger af 15.22–15.23

$$\frac{\gamma(u)\gamma(v)}{\gamma(u')} = \frac{1}{1 - v u_x / c^2}, \quad \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} u_y = u'_y, \quad \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} = \gamma(v)(1 + v u'_x / c^2). \quad (15.31)$$

Herved finder vi kraftens komponenter i S' , som bliver

$$\begin{aligned} F'_x &= q \left[E_x - \frac{v}{c^2} \gamma(v) (E_y u'_y + E_z u'_z) \right], \\ F'_y &= q \gamma(v) (1 + v u'_x / c^2) E_y, \\ F'_z &= q \gamma(v) (1 + v u'_x / c^2) E_z, \end{aligned} \quad (15.32)$$

Kraft fundet

og som på vektorform kan skrives lidt mere overskueligt

$$\mathbf{F}' = q \begin{bmatrix} E_x \\ \gamma E_y \\ \gamma E_z \end{bmatrix} + q \frac{v \gamma(v)}{c^2} \begin{bmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ E_z \\ -E_y \end{bmatrix}. \quad (15.33)$$

Dette udtryk er af samme form som Lorentz-kraften

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}'), \quad (15.34)$$

dersom vi med $\gamma = \gamma(v)$ sætter

$$\mathbf{E}' = (E_x, \gamma E_y, \gamma E_z), \quad (15.35)$$

$$\mathbf{B}' = (0, \gamma v E_z / c^2, -\gamma v E_y / c^2). \quad (15.36)$$

Partiklen mærker altså i S' den sædvanlige kraft, nemlig Lorentz-kraften. Vi noterer imidlertid, at der i S' optræder en hastighedsafhængig kraft. Det vil sige, at der er et $\mathbf{B}$ -felt i S' , selv om vi i S havde et rent elektrisk felt. Dette underbygger den i indledningen fremsatte påstand, at de magnetiske felter er en konsekvens af forekomsten af elektriske felter og af relativitetsprincippet.

*Magnetfelt
i S'*

Det bemærkes til slut, at magnetfeltet 15.36 på vektorform kan skrives

$$\mathbf{B}' = -\frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_x \\ \gamma E_y \\ \gamma E_z \end{bmatrix} = -\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'}{c^2}, \quad (15.37)$$

hvor vi ved den sidste omskrivning har anvendt udtrykket 15.35 for $\mathbf{E}'$. Størrelsen af E_x har ingen betydning for $\mathbf{B}'$ -feltet, men nok for $\mathbf{E}'$ -feltet.

15.4 Lorentztransformation af Lorentzkraften

Vi skal nu gennemføre transformationen af den fuldstændige Lorentzkraft fra S til S' . Som resultat heraf opnår vi formler, hvormed vilkårlige elektromagnetiske felter kan transformeres fra et referencesystem til et andet.

*Hele Lorentz-
kraften trans-
formeres*

Fremgangsmåden er den samme som før. Vi starter med kraften i S

$$\begin{aligned} F_x &= q(E_x + u_y B_z - u_z B_y), \\ F_y &= q(E_y + u_z B_x - u_x B_z), \\ F_z &= q(E_z + u_x B_y - u_y B_x), \end{aligned} \quad (15.38)$$

som vi indsætter i 15.29. Vi bemærker straks, at der i F'_x optræder produktet $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$. Da den magnetiske del af kraften er vinkelret på $\mathbf{u}$, bliver $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}$. Hermed får vi

$$\begin{aligned} F'_x &= q \frac{\gamma(u)\gamma(v)}{\gamma(u')} [E_x + u_y B_z - u_z B_y - \frac{v}{c^2}(E_x u_x + E_y u_y + E_z u_z)], \\ F'_y &= q \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} [E_y + u_z B_x - u_x B_z], \\ F'_z &= q \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} [E_z + u_x B_y - u_y B_x]. \end{aligned} \quad (15.39)$$

For at omskrive disse udtryk på en måde, som tillader os at genfinde Lorentz-kraften i S' , indfører vi igen $\mathbf{u}'$ ved hjælp af den omvendte transformation til 15.22

*Kraften i S'
omskrives*

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\gamma(u')\gamma(v)}{\gamma(u)} (u'_x + v), \\ u_y &= \frac{\gamma(u')}{\gamma(u)} u'_y, \\ u_z &= \frac{\gamma(u')}{\gamma(u)} u'_z. \end{aligned} \quad (15.40)$$

Vi skriver først F'_x på formen

$$F'_x = q \frac{\gamma(u)\gamma(v)}{\gamma(u')} [E_x(1 - vu_x/c^2) + u_y(B_z - vE_y/c^2) - u_z(B_y + vE_z/c^2)] \quad (15.41)$$

og indsætter u givet ved 15.40 i dette udtryk og i udtrykkene for F'_y og F'_z . Efter reduktion finder vi kraftens komponenter i S' til

$$\begin{aligned} F'_x &= q[E_x + \gamma(v)u'_y(B_z - vE_y/c^2) - \gamma(v)u'_z(B_y + vE_z/c^2)], \\ F'_y &= q[\gamma(v)(E_y - vB_z) - u'_x\gamma(v)(B_z - vE_y/c^2) + u'_zB_x], \\ F'_z &= q[\gamma(v)(E_z + vB_y) + u'_x\gamma(v)(B_y + vE_z/c^2) - u'_yB_x]. \end{aligned} \quad (15.42)$$

Kraft fundet

Disse formidable udtryk bliver lidt mere overskuelige på vektorform, idet

$$\mathbf{F}' = q \begin{bmatrix} E_x \\ \gamma(E_y - vB_z) \\ \gamma(E_z + vB_y) \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x \\ \gamma(B_y + vE_z/c^2) \\ \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{bmatrix}. \quad (15.43)$$

hvor $\gamma = \gamma(v)$. Udtrykket er hermed af den ønskede form

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}'), \quad (15.44)$$

og vi har altså vist, at Lorentz-kraften er form-invariant ved en Lorentz-transformation. Vi bemærker, at der ved transformationen sker en intim sammenblanding af de elektriske og magnetiske felter. Disse har altså ikke nogen uafhængig betydning, men afhænger af referencesystemet.

15.5 Transformation af det elektromagnetiske felt

Felterne transformeres

Det følger af resultaterne i foregående afsnit, at de elektriske og magnetiske felter transformeres efter formlerne

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} E_x \\ \gamma(E_y - vB_z) \\ \gamma(E_z + vB_y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} B_x \\ \gamma(B_y + vE_z/c^2) \\ \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{bmatrix}. \quad (15.45)$$

De transformerede felter kan på ren vektorform skrives som

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - (\gamma - 1)\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}, \quad (15.46)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2) - (\gamma - 1)\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}, \quad (15.47)$$

Vektorformler

hvor $\hat{\mathbf{v}}$ betegner enhedsvektoren i $\mathbf{v}$'s retning. Formlerne er, som det ses, næsten symmetriske i $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ og gælder ikke blot for systemer i den specielle beliggenhed, men for enhver Lorentz-transformation uden rotation. Alternativt kan udtrykkene 15.46–15.47 skrives

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_{||} + \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (15.48)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}_{||} + \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2), \quad (15.49)$$

hvor felterne er opdelt i komponenter, som er henholdsvis vinkelrette på eller parallelle med hastigheden $\mathbf{v}$ ved transformationen.

15.6 Invarians af Maxwell ligningerne.

Relativitetsprincippet kræver, at de fysiske love har samme form i alle referencesystemer. Vi har i foregående afsnit udnyttet denne form-invarians (eller covarians) til at bestemme transformationsligningerne for de elektromagnetiske felter. I dette afsnit skal vi vise, at systemet af Maxwells ligninger er invariant under en Lorentz-transformation. Det var i virkeligheden kravet om invarians af Maxwell ligningerne, som i slutningen af forrige århundrede førte Lorentz frem til sine transformationer. Einstein fandt uafhængigt de samme transformationer ud fra relativitetsprincippet. Det er dog værd at notere, at det berømte 1905-arbejde, hvor Einstein formulerer den specielle relativitetsteori, har titlen: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*.

*Invarians-
kravet*

Vi skal nu vise, at Maxwells ligninger bevarer deres form under transformationen 15.13. Vi skriver ligningerne i S (og i vacuum) som

*Maxwells
ligninger*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad (15.50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (15.51)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (15.52)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (15.53)$$

hvor kilderne til feltet er isoleret på højre side.

Beviset er særlig enkelt for Gauss' lov 15.51 for det magnetiske felt. Vi vil vise, at denne lov også gælder i S' :

*Gauss' lov for
magnetfelt*

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = \frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y} + \frac{\partial B'_z}{\partial z}, \quad (15.54)$$

hvor vi har benyttet, at $B'_x = B_x$ (sml. 15.45), $y' = y$ og $z' = z$. Af de omvendte transformationer til 15.13 og af 15.51 følger da

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = \gamma \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + \gamma \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) = 0, \quad (15.55)$$

idet begge parenteserne forsvinder på grund af Maxwell ligningernes gyldighed i S . Vi har hermed bevist invariansen af 15.51.

Vi ser dernæst på induktionsloven 15.52, der som 15.51 er uden kildeled. I virkeligheden har vi her, da der er tale om en vektorligning, tre ligninger. Vi betragter hver komponent for sig:

*Induktions-
loven*

$$\begin{aligned} \left(\nabla' \times \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \right)_x &= \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} \\ &= \frac{\partial E'_z}{\partial y} - \frac{\partial E'_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} \\ &= \gamma \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) + \gamma v \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = 0, \end{aligned} \quad (15.56)$$

hvor det sidste lighedstegn igen skyldes Maxwell ligningernes gyldighed i S .

Gauss' lov for
elektrisk felt

I Gauss' lov for det elektriske felt optræder et kildeled. Transformationen sker på følgende måde:

$$\begin{aligned}
 \nabla' \cdot \mathbf{E}' &= \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \\
 &= \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y} + \frac{\partial E'_z}{\partial z} \\
 &= \gamma \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - \gamma v \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{\gamma}{\epsilon_0} \left(\rho - \frac{v J_x}{c^2} \right) = \frac{\rho'}{\epsilon_0},
 \end{aligned} \tag{15.57}$$

jvf. 15.53. Gauss' lov gælder altså også i S' , men med ladningstætheden

$$\rho' = \gamma(\rho - v J_x / c^2). \tag{15.58}$$

I 15.58 genfinder vi den tidligere udledte regel 15.7 for transformation af en stationær ladningstæthed i S .

Ampères lov
-prøv selv

Endelig kan vi på lignende måde omforme de tre komponenter af 15.53. Beregningerne overlades til en øvelse (opgave 15.7). De fører til transformationsreglerne for strømtætheden $\mathbf{J}$:

$$\begin{aligned}
 J'_x &= \gamma(J_x - \rho v), \\
 J'_y &= J_y, \\
 J'_z &= J_z, \\
 \rho' &= \gamma(\rho - v J_x / c^2),
 \end{aligned} \tag{15.59}$$

hvor vi har medtaget transformationen af ladningstætheden ρ . Vi ser, at $(\mathbf{J}, \rho)$ udgør en firevektor, den såkaldte *firestrømtæthed*.

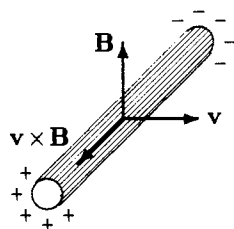
15.7 Eksempler

Stemmer det?

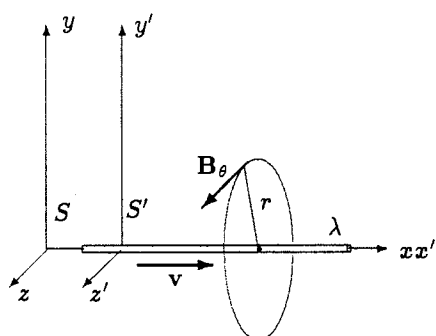
Det er klart, at de relationer, som vi i det foregående har udledt mellem feltvektorerne i bevægede systemer, i en passende grænse må falde sammen med de lovmæssigheder, vi på mere fænomenologisk grundlag har indført i elektricitetslæren. De følgende to eksempler belyser dette.

Lederstykke
i magnetfelt

▷ Bevæget leder i magnetfelt: Et lederstykke bevæger sig med hastigheden $v \ll c$ vinkelret på et homogent magnetfelt $\mathbf{B}$. De frie ladninger i lederen vil, set fra en iagttager i hvilesystemet, være påvirket af Lorentzkraften



Figur 15.3: Stangformet leder som bevæger sig på tværs af et magnetfelt.



Figur 15.4: Feltet fra en bevæget linieladning set fra to forskellige referencsystemer.

$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Denne vil drive ladningerne ud mod stangens ender således, at der opstår en potentialforskel mellem dem. Ser vi derimod situationen siddende på stangen, er ladningerne i hvile og mærker derfor ikke nogen Lorentzkraft. Men ifølge transformationen 15.46 findes der nu et elektrisk felt, som påvirker ladningerne med kraften $\gamma q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, altså i grænsen det samme som før. (Tages der hensyn til krafttransformation 15.29, er der fuld overensstemmelse mellem de to udtryk).◀

▷ Bevæget ladningsfordeling: En linieladning med den konstante ladningstæthed $\lambda \text{ Cm}^{-1}$ bevæger sig i S med hastigheden v i x -retningen. Set fra S er der tale om en strøm $I = \lambda v$, hvortil der efter Ampères lov svarer et B -felt

$$B_\theta = \frac{\lambda v \mu_0}{2\pi r}, \quad (15.60)$$

hvor r er afstanden fra x -aksen. Set fra S' , som følger med ladningsfordelingen, har vi hvilende ladninger. Disse skaber et radiale elektrisk felt

$$E'_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (15.61)$$

Af den omvendte transformation 15.49 for B finder vi, at der i S vil være et B -felt

$$\mathbf{B} = \gamma \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'}{c^2} \quad (15.62)$$

eller

$$B_\theta = \gamma \frac{\lambda v}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} = \gamma \frac{\lambda v \mu_0}{2\pi r}. \quad (15.63)$$

Dette udtryk er, med samme bemærkninger som for det forrige eksempel, identisk med udtrykket 15.60, som vi også kender fra elektricitetslæren.◀

Felt om strøm

Felt om linieladning

Felt transformeret

Kapitel 16

Anvendelser af den elektromagnetiske teori

Den elektromagnetiske teori, som er præsenteret i de forudgående kapitler, har mange og betydningsfulde anvendelser inden for teknik, videnskab og kommunikation. I dette kapitel skal vi se nogle få eksempler herpå.

16.1 Transmissionslinier

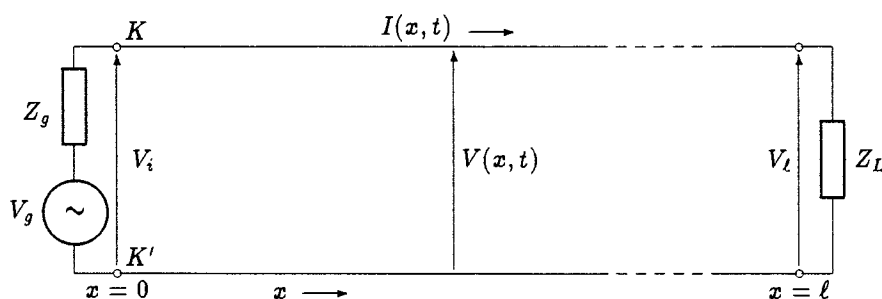
En *transmissionslinie* er et system af ledere, sædvanligvis to, som transporterer elektrisk energi (og dermed information) fra ét sted til et andet. Et simpelt eksempel er to parallelle, identiske ledninger, hvor den ene tjener som returvej for strømmen i den anden. Et andet eksempel er et coaxialkabel, hvor en cylindrisk leder er koncentrisk omgivet af en cylindrisk ledende kappe, som da fungerer som returvej.

Transmissionslinier

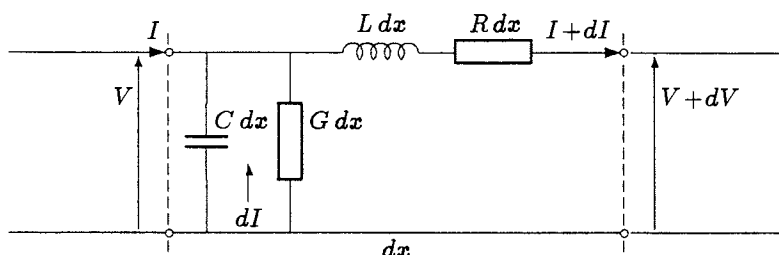
Figur 16.1 viser en sådan transmissionslinie i form af en dobbeltleder. Linien drives med en vekselstrømsgenerator i den ene ende og afsluttes med en belastningsimpedans i den anden. I linien opstår der en tidsvarierende strøm, som giver anledning til tidsvarierende elektriske og magnetiske felter i det omgivende rum. Er linien lang, har disse felter karakter af elektromagnetiske bølger, der udbreder sig langs linien, og som i princippet kan beskrives ved hjælp af formalismen fra kapitel 14. Her skal vi anvende en noget anden metode, idet vi skal opfatte linien som et *elektrisk kredsløb*.

Dobbeltleder

I den teori for elektriske kredse, som blev præsenteret i kapitel 11, var



Figur 16.1: Transmissionslinie med generator og belastning.

Figur 16.2: Ekvivalentdiagram for et stykke dx af en dobbeltleder.

Fordelt
impedans

kvasistationaritet en vigtig forudsætning for behandlingen. Denne forudsætning betød, at strømmen gennem alle tværsnit af kredsen var den samme, og at vi kunne betragte alle impedanser i kredsen som *lokaliserede*. For transmissionslinien kan denne forudsætning ikke opretholdes, men som vi skal se, kan en netværksanalyse alligevel gennemføres ved hjælp af *fordelte* impedanser.

Lad generatoren på fig. 16.1 ved $x = 0$ levere den harmonisk varierende vekselspænding V_g og have indre impedans Z_g . Ved $x = \ell$ afsluttes linien med en belastningsimpedans Z_L . Mellem lederne vil der per længde være en kapacitans C og en induktans L , som måles i henholdsvis Fm^{-1} og Hm^{-1} . I praksis vil lederne desuden per længde have en resistans R , som måles i Ωm^{-1} . Endelig kan isoleringen mellem lederne være imperfekt, hvilket beskrives ved en *admittans* G per længde, som måles i $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. Admittansens betydning er, at en spænding V mellem lederne giver anledning til en strøm $I = VG$ på 'tværs'.

Ekvivalent
diagram

Et lille stykke dx af ledersystemet repræsenteres nu ved et *ekvivalentdiagram*, som vist på fig. 16.2. Liniens fuldstændige ekvivalent bliver en kæde af sektioner som den på fig. 16.2, og hvor indgangsspænding og -strøm for hver sektion bestemmes af udgangsspænding og -strøm af den forrige. Derved får man en diskret model af den ellers homogene linie.

Spænding og
strøm

Vi er interesserede i at beregne spændingen $V(x, t)$ og strømmen $I(x, t)$ langs linien. Når strømmen varierer i tid, induceres der en spænding i induktansen L samtidig med, at der er et spændingsfald over resistansen R . Dette giver et differentielt spændingsfald over længden dx på

$$dV = -L dx \frac{\partial I}{\partial t} - R dx I. \quad (16.1)$$

Tilsvarende vil en tidsvarierende spænding bevirke en af- og opladning af kapacitansen C og samtidigt et strømtab gennem admittansen G . På stykket dx ændrer strømmen i lederen sig derfor med

$$dI = -C dx \frac{\partial V}{\partial t} - G dx V. \quad (16.2)$$

Af 16.1 og 16.2 følger umiddelbart de to sammenhørende partielle differentialligninger

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} - RI, \quad (16.3)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial V}{\partial t} - GV. \quad (16.4)$$

Differentieres den ene af disse ligninger efter t og den anden efter x og elimineres henholdsvis I eller V får man en 2. ordens differentiaalligning

*Telegraf-
ligningen*

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - (LG + RC) \frac{\partial V}{\partial t} - RGV - LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0,} \quad (16.5)$$

og helt den samme for I . Denne ligning kaldes *telegraf-ligningen*.

Vi indfører nu forudsætningen om, at den påtrykte vekselspænding varierer harmonisk. Strøm og spænding varierer da også harmonisk overalt på linien sådan, at

*Harmonisk
spænding*

$$I(x, t) = I(x)e^{j\omega t}, \quad V(x, t) = V(x)e^{j\omega t}. \quad (16.6)$$

(Bemærk, at vi i overensstemmelse med kredsløbsteorien i kapitel 11 anvender eksponenten $j\omega t$, mens vi i bølgeteorien har anvendt eksponenten $-i\omega t$. Dette betyder, at en bølge, hvis stedafhængighed er e^{-jkx} , her bevæger sig mod højre).

Derefter tager ligningerne 16.3–16.4 formen

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -(R + j\omega L)I, \quad (16.7)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -(G + j\omega C)V, \quad (16.8)$$

mens telegraf-ligningen reducerer til

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - (R + j\omega L)(G + j\omega C)V = 0. \quad (16.9)$$

De komplekse størrelser

$$Z = R + j\omega L, \quad (16.10)$$

$$Y = G + j\omega C, \quad (16.11)$$

kaldes henholdsvis liniens *serie-impedans* og *shunt-admittans*. Med dem kan telegraf-ligningen meget kompakt skrives som

Serie og shunt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = ZY V = \gamma^2 V, \quad (16.12)$$

og tilsvarende

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = ZY I = \gamma^2 I, \quad (16.13)$$

hvor vi har indført *udbredelses-konstanten*

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}, \quad (16.14)$$

der har dimensionen m^{-1} og som i almindelighed vil være kompleks.

Løsningerne til 16.12 er af formen

$$V(x, t) = (V_+ e^{-\gamma x} + V_- e^{\gamma x}) e^{j\omega t}, \quad (16.15)$$

som svarer til en superposition af to harmoniske bølger.

*Bemærk
retningerne!*

Med den valgte tidsafhængighed udbreder disse bølger sig mod henholdsvis højre og venstre med amplituder på V_+ og V_- . Ifølge 16.7 bliver den tilsvarende løsning for strømmen

$$I(x, t) = \frac{1}{Z_0} (V_+ e^{-\gamma x} - V_- e^{\gamma x}) e^{j\omega t}, \quad (16.16)$$

*Karakteristisk
impedans*

hvor der er indført den vigtige størrelse

$$Z_0 = \frac{Z}{\gamma} = \frac{\gamma}{Y} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}, \quad (16.17)$$

*Indfald og
reflektion*

som kaldes liniens *karakteristiske impedans* og har dimensionen Ω .

Efter 16.15 og 16.16 udbreder spænding og strøm sig på linien som en superposition af en bølge mod højre og en bølge mod venstre. Med henvisning til fig. 16.1 skal vi kalde dem den *indfaldende* og den *reflekterede* bølge. Bølgerne vil almindeligvis være dæmpede (eller voksende) på grund af realdelen af udbredelseskonstanten γ .

I det følgende kan vi som regel underforstå den harmoniske tidsfaktor $e^{j\omega t}$ og skrive løsningerne for strøm og spænding langs linien som

$$V(x) = V_+ e^{-\gamma x} + V_- e^{\gamma x}, \quad (16.18)$$

$$Z_0 I(x) = V_+ e^{-\gamma x} - V_- e^{\gamma x}. \quad (16.19)$$

*Hvor meget
reflekteres?*

Vi kan nu finde forholdet mellem amplituden V_- af den reflekterede bølge og amplituden V_+ af den indfaldende bølge. Hertil ser vi på liniens afslutning ved $x = \ell$ med belastningsimpedansen Z_L . Efter 16.18 og 16.19 er

$$V_\ell = V_+ e^{-\gamma \ell} + V_- e^{\gamma \ell}, \quad (16.20)$$

$$Z_0 I_\ell = V_+ e^{-\gamma \ell} - V_- e^{\gamma \ell}. \quad (16.21)$$

For belastningen gælder det desuden, at

$$V_\ell = Z_L I_\ell, \quad (16.22)$$

hvoraf det følger, at

$$V_+ e^{-\gamma \ell} + V_- e^{\gamma \ell} = \frac{Z_L}{Z_0} (V_+ e^{-\gamma \ell} - V_- e^{\gamma \ell}), \quad (16.23)$$

som bestemmer forholdet $\rho = V_-/V_+$ til

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2\gamma \ell} = \rho_0 e^{-2\gamma \ell}. \quad (16.24)$$

Her kaldes størrelsen

$$\rho_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (16.25)$$

*Refleksions-
koefficient*

for *refleksionskoefficienten*. Efter 16.20 er spændingen ved kabelafslutningen sammensat af $V_- e^{\gamma \ell}$ fra den reflekterede bølge og $V_+ e^{-\gamma \ell}$ fra den indfaldende bølge. Forholdet mellem disse spændinger er $\rho e^{2\gamma \ell} = \rho_0$.

I modsætning hertil angiver $\rho = V_-/V_+$ forholdet mellem *amplituderne* af den reflekterede og den indfaldende bølge overalt langs linien. Dette forhold afhænger af kabellængden.

Herefter skal vi se på situationen ved liniens indgang ved $x = 0$. Her gælder det ifølge 16.18 og 16.19, at

*Indgangs-
impedans*

$$\begin{aligned} V_i &= V_+ + V_-, \\ Z_0 I_i &= V_+ - V_-, \end{aligned} \quad (16.26)$$

hvoraf vi kan finde *indgangsimpedansen*

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = Z_0 \frac{V_+ + V_-}{V_+ - V_-} = Z_0 \frac{1 + \rho}{1 - \rho}. \quad (16.27)$$

Indsættes ρ efter 16.24, får vi et vigtigt udtryk for indgangsimpedansen

$$Z_i = Z_0 \frac{(Z_L + Z_0)e^{\gamma\ell} + (Z_L - Z_0)e^{-\gamma\ell}}{(Z_L + Z_0)e^{\gamma\ell} - (Z_L - Z_0)e^{-\gamma\ell}}. \quad (16.28)$$

Indgangsimpedansen skrives ofte med hyperbolske funktioner som

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma\ell + Z_0 \sinh \gamma\ell}{Z_L \sinh \gamma\ell + Z_0 \cosh \gamma\ell}, \quad (16.29)$$

hvor man skal være opmærksom på, at γ og de indgående impedanser som regel vil være komplekse.

Man kan anvende udtrykket for indgangsimpedansen til at undersøge, hvordan linie plus belastning tager sig ud fra indgangsklemmerne K og K' (se fig. 16.1) for nogle specielle belastninger:

*Specielle
tilfælde*

- $Z_L = 0$ (kortslutning). Her giver 16.29

$$Z_k = Z_0 \tanh \gamma\ell. \quad (16.30)$$

- $Z_L = \infty$ (tomgang). I dette tilfælde er

$$Z_t = Z_0 \coth \gamma\ell. \quad (16.31)$$

Impedanserne Z_k og Z_t ved kortslutning og tomgang kan enkelt bestemmes ved måling på indgangen. Derefter kan liniens såkaldte *sekundære parametre* Z_0 og γ fastlægges, da der efter 16.30 og 16.31 gælder

$$Z_0 = \sqrt{Z_k Z_t}, \quad \tanh \gamma\ell = \sqrt{\frac{Z_k}{Z_t}}. \quad (16.32)$$

- $Z_L = Z_0$ (tilpasning). Her bliver refleksionskoefficienten $\rho = 0$ efter 16.25. Der vil altså ikke være nogen reflekteret bølge, og linie + belastning vil opføre sig som en impedans

*Impedans-
tilpasning*

$$Z_i = Z_0. \quad (16.33)$$

Den sidste relation er af stor praktisk betydning, da den fortæller hvordan forskellige belastninger kan indkobles med kabler, uden at der opstår generende refleksioner. Man taler da om *impedanstilpasning*.

*Tabsfri
ledning*

▷ Tabsfri transmissionslinie. Resistansen R og admittansen G (sml. 16.3 og 16.4) giver anledning til, at der afsættes energi i transmissionslinien. I mange tilfælde af praktisk interesse vil disse parametre dog være så små, at man kan se bort fra dem. Man har da en tabsfri linie. I så fald får man en væsentlig forenkling af teorien. Udbredelseskonstanten bliver efter 16.14

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC}, \quad (16.34)$$

Reel impedans

som er rent imaginær. Den karakteristiske impedans bliver efter 16.17

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (16.35)$$

som er reel og uafhængig af frekvensen ω . Efter 16.15 bliver den indfaldende spændingsbølge

$$V(x, t) = V_+ e^{j\omega t - \gamma x} = V_+ e^{j(\omega t - kx)}, \quad (16.36)$$

Udæmpet bølge

altså en udæmpet bølge mod højre med bølgetal

$$k = -j\gamma = \omega\sqrt{LC}, \quad (16.37)$$

hvoraf man finder bølgens fasehastighed

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (16.38)$$

Afsluttes linien med en resistans $R_0 = Z_0$, bliver der ingen refleksion. I alle andre tilfælde vil der være en reflekteret bølge, hvis amplitude bestemmes af 16.24. Er linien således kortsluttet, giver 16.25 $\rho_0 = -1$, hvorefter amplitudeforholdet efter 16.24 bliver

$$\rho = -e^{-2jkl} = -e^{-j4\pi\ell/\lambda}, \quad (16.39)$$

hvor λ er bølgelængden. Er denne eksempelvis $\lambda = \ell$, bliver $\rho = -1$, således at den reflekterede bølge er i modfase med den indfaldende. Der kommer da stående bølger på linien, jvf. *Bølger* 6.51.◀

*Praktisk
eksempel*

▷ Coaxialkabel: For et coaxialkabel kender vi fra 2.156 og 7.21 explicite udtryk for C og L (per længde), nemlig

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}, \quad L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (16.40)$$

Af 16.35 og 16.38 finder man da den karakteristiske impedans og fasehastigheden til

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \ln \frac{b}{a}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}. \quad (16.41)$$

Da $\epsilon_r \geq 1$ ser man, at fasehastigheden i et coaxialkabel altid er mindre end eller lig lyshastigheden c . I et typisk laboratoriekabel, isoleret med polyethylen, er $\epsilon_r = 2.3$, $a = 0.4$ mm og $b = 1.4$ mm. For et sådant kabel bliver $Z_0 = 50 \Omega$, som mere eller mindre er en standardværdi. Fasehastigheden i kablet bliver $v = 0.66 c$.◀

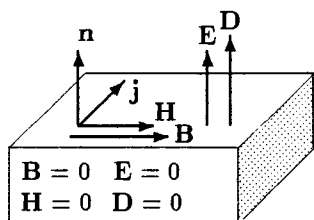
16.2 Bølgeledere

En *bølgeleder* er en hul metalleder med et konstant og geometrisk simpelt tværsnit. I en bølgeleder reflekteres elektromagnetiske bølger frem og tilbage mellem væggene og under visse betingelser kan der herved opstå en superponeret bølge, som bevæger sig gennem bølgelederen med meget lille dæmpning. Bølgeledere finder derfor udstrakt anvendelse indenfor mikrobølgetekniken, hvor man benytter elektromagnetiske bølger i cm-området (frekvenser i GHz-området). Radar-teknik er et vigtigt eksempel.

I en bølgeleder er udbredelsen af elektromagnetiske bølger betinget af, at de kan reflekteres fra væggene med små tab. I grænsen af uendelig ledningsevne (superledende rør) vil bølgen overhovedet ikke kunne trænge ind

Et metalrør

*Refleksion
fra vægge*



Figur 16.3: De elektromagnetiske feltvektorer på inderfladen af en bølgeleder.

i metallet, og dette er også for gode metalliske ledere en brugbar tilnærmelse. I afsnit 12.6, hvorfra vi har hentet fig. 16.3, undersøgte vi felterne under disse forhold, og fandt en sammenhæng mellem felterne og strøm- og ladningstæthederne på overfladen, som kan sammenfattes i

*Grænse-
betingelser*

$$\begin{array}{ll} \text{Metal:} & \text{Vacuum:} \\ D = 0, & D = \sigma n, \end{array} \quad (16.42)$$

$$\begin{array}{ll} B = 0, & B = \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{n}, \end{array} \quad (16.43)$$

$$\begin{array}{ll} E = 0, & E = \sigma \mathbf{n} / \epsilon_0, \end{array} \quad (16.44)$$

$$\begin{array}{ll} H = 0, & H = \mathbf{j} \times \mathbf{n}. \end{array} \quad (16.45)$$

Man skal opfatte sagen sådan, at de elektromagnetiske felter på bølgelederens inderflade frembringer de tidsvarierende strøm- og ladningstætheder ($\mathbf{j}, \sigma$), som er en forudsætning for, at grænsebetingelserne for felterne kan opfyldes.

16.2.1 Pladeleder

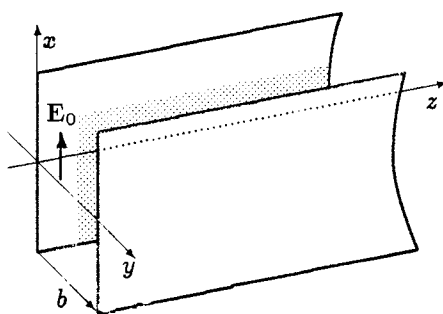
Mange vigtige træk ved bølgeudbredelsen i en bølgeleder illustreres af den såkaldte *pladeleder*, som består af to parallelle, i princippet uendelig udstrakte, plane metalplader med afstand b . Vi indlægger koordinater XYZ som vist på fig. 16.4, og vil undersøge muligheden for en bølge af formen¹

To metalplader

$$\mathbf{E}(y, z, t) = \mathbf{E}(y)e^{j(k_z z - \omega t)}. \quad (16.46)$$

Altså en bølge der bevæger sig i z -retningen med en amplitude som afhænger af y , men ikke af positionen x i pladelederen (lodret på fig. 16.4). Vi skal desuden antage, at $\mathbf{E}$ er polariseret i x -retningen, altså vinkelret på udbredelsesretningen z og parallelt med metalpladerne.

¹I de foregående afsnit 12.5 og 16.1 sker bølgeudbredelsen i x -retningen. I dette afsnit og i afsnit 13.2 sker den i z -retningen. Ved en kommende revision af teksten bliver alle bølgeudbredelser lagt i z -retningen.



Figur 16.4: En pladeleder består af to udstrakte, parallelle metalplader.

Bølgeligning

Feltet $\mathbf{E}$ er et elektromagnetisk felt i vacuum, og må tilfredsstille Maxwell ligningerne og den deraf udledte bølgeligning

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (16.47)$$

Indsætter vi her den harmoniske bølge 16.46 får vi en differentialligning for $\mathbf{E}(y)$ alene:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(y)}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \mathbf{E}(y) = 0. \quad (16.48)$$

Denne differentialligning har løsningen

$$\mathbf{E}(y) = \mathbf{E}_1 e^{-jk_y y} + \mathbf{E}_2 e^{jk_y y}, \quad (16.49)$$

Bølgetal i y

hvor $\mathbf{E}_1$ og $\mathbf{E}_2$ er faste vektorer og bølgetallet k_y efter 16.48 er bestemt ved

$$k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2. \quad (16.50)$$

Amplituder

Bølgen 16.49 skal efter grænsebetingelsen 16.44 ikke have nogen komponent parallel med metalpladen ved $y = 0$. Men da $\mathbf{E}$ er antaget parallel med x -aksen og derfor med pladen, må $\mathbf{E}(0)$ være 0 hvilket fører til betingelsen

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_1 = -\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0, \quad (16.51)$$

hvor $\mathbf{E}_0$ er en fast vektor i x -aksens retning. Herefter bliver

$$\mathbf{E}(y) = -\mathbf{E}_0 (e^{jk_y y} - e^{-jk_y y}) = -2j\mathbf{E}_0 \sin k_y y. \quad (16.52)$$

Betingelse

Anvendes den samme grænsebetingelse på fladen $y = b$ giver 16.52

$$-2j\mathbf{E}_0 \sin k_y b = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad (16.53)$$

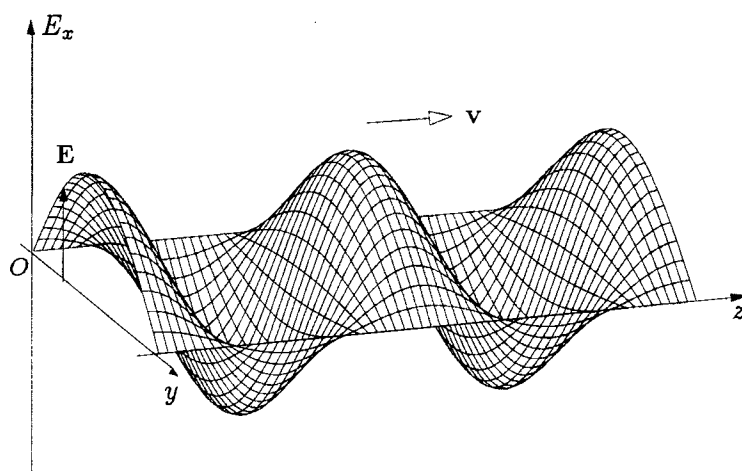
hvor $n = 1, 2, \dots$ (tilfældet $n = 0$ giver efter 16.52 intet felt og er derfor uinteressant).

Løsningen

Løsningen 16.52 er en stående bølge i y -retningen. Den samlede bølge bliver efter 16.46

$$\mathbf{E}(y, z, t) = -2j\mathbf{E}_0 \sin k_y y e^{j(k_z z - \omega t)} \quad (16.54)$$

$$= \mathbf{E}_0 \left[e^{j(k_z z - k_y y - \omega t)} - e^{j(k_z z + k_y y - \omega t)} \right]. \quad (16.55)$$



Figur 16.5: E-felt i elektromagnetisk bølge som bevæger sig mellem parallelle metalplader.

Efter 16.54 er løsningen en vandreende bølge i z -retningen moduleret med en stående bølge i y -retningen. Se fig. 16.5.

Alternativt kan vi efter 16.55 opfatte bølgen som en superposition af en bølge som falder ind mod fladen $y = 0$ og en bølge, som reflekteres derfra. Et anskueligt billede af bølgens passage gennem bølgelederen er, at den 'krydser' sig frem. Den indfaldende bølge rammer planerne under en indfaldsvinkel θ (sml. fig. 16.6) bestemt ved

$$\sin \theta = \frac{k_z}{\sqrt{k_z^2 + k_y^2}} = \frac{k_z}{k}, \quad \cos \theta = \frac{k_y}{\sqrt{k_z^2 + k_y^2}} = \frac{k_y}{k}, \quad (16.56)$$

hvor vi har indført bølgetallet k i vacuum

$$k = \sqrt{k_z^2 + k_y^2} = \frac{\omega}{c}. \quad (16.57)$$

Det sidste lighedstegn følger af 16.50.

Ikke alle indfaldsvinkler er mulige. Af 16.55 og 16.53 følger nemlig

$$\cos \theta = \frac{k_y}{k} = \frac{n\pi}{kb}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.58)$$

som udvælger de indfalds- og refleksionsvinkler, der stemmer overens med grænsebetingelserne på *begge* flader. En bølge, som falder ind under en anden retning end bestemt ved 16.58, vil selvfølgelig også reflekteres. Men kun de vinkler som bestemmes af 16.58 og de tilsvarende værdier af k_y giver anledning til den konstruktive interferens, som muliggør den stående bølge i y -retningen og den dertil hørende fremadskridende bølge i z -retningen.

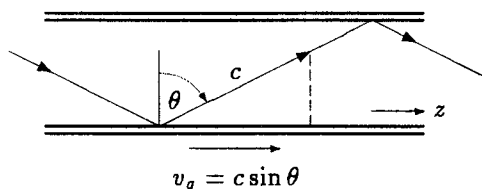
Hver værdi af det positive heltal n i 16.53 bestemmer en svingningsmåde, som vi her skal kalde en *modus* (på engelsk *mode*), hvortil der efter 16.50 svarer et bestemt bølgetal k_z af den fremadskridende bølge

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}. \quad (16.59)$$

Krydsende
bølge

De udvalgte

Modi



Figur 16.6: Reflektion af elektromagnetisk bølge i pladeleder.

Afskærings-
frekvens

Skal bølgen udbrede sig uden dæmpning må k_z være reel. For en given modus gælder da

$$\omega > \omega_c = \frac{\pi n c}{b}, \quad (16.60)$$

hvor ω_c kaldes den *kritiske frekvens* eller *afskæringsfrekvensen*. Bølger med frekvenser $\omega < \omega_c$ dæmpes og transmitteres derfor ikke. Man siger derfor, at pladelederen er et *højpasfilter*.

Til den kritiske frekvens svarer en kritisk største bølgelængde λ_c som bestemmes af

$$\lambda_c = \frac{2\pi c}{\omega_c} = \frac{2b}{n}. \quad (16.61)$$

Bølgelængder over λ_c transmitteres ikke. Man kan sige, at 16.61 kræver, at der skal være 'plads' til n halve bølgelængder på tværs af bølgelederen.

Fase-
hastighed

Bølgens udbredelse i z -retningen bestemmes af ω og k_z . Den tilsvarende fasehastighed v_f finder vi af 16.56

$$v_f = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{k \sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} \quad (16.62)$$

fordi k er vacuumbølgetallet. Fasehastigheden er således over lyshastigheden. Gruppehastigheden v_g bestemmes af 16.57 der er en *dispersionsrelation*, som fastlægger sammenhængen mellem bølgetal og frekvens. Vi finder

$$\omega = c \sqrt{k_y^2 + k_z^2}, \quad (16.63)$$

Gruppe-
hastighed

hvorefter gruppehastigheden bliver

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{ck_z}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}} = \frac{ck_z}{k} = c \sin \theta. \quad (16.64)$$

Gruppehastigheden, som er den hastighed hvormed et signal (en modulation) udbreder sig, er altså mindre end lyshastigheden i overensstemmelse med relativitetsteoriens postulat. Vi bemærker, at

$$v_f v_g = c^2. \quad (16.65)$$

Relationen $v_g = c \sin \theta$ (se fig. 16.6) stemmer godt med billedet af en bølge, som krydser sig gennem ledere.

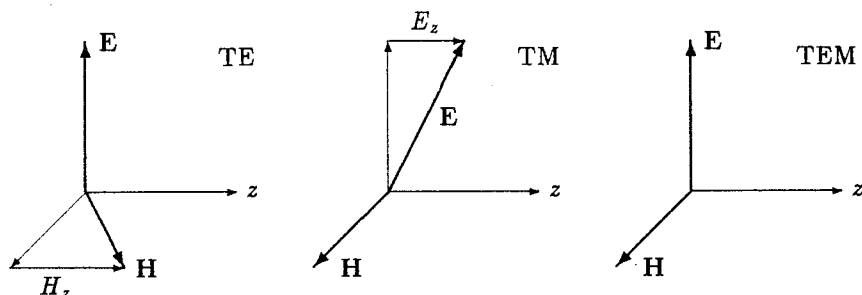
H-felt

Vi noterer til slut, at **H**-feltet i bølgen kan bestemmes af den 3. Maxwell ligning idet

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = j\omega\mu_0 \mathbf{H}. \quad (16.66)$$

Ved indsætning af **E**-feltet efter 16.54 finder man

$$\mathbf{H} = \frac{2E_0}{\omega\mu_0} (0, -jk_z \sin k_y y, k_y \cos k_y y) e^{j(k_z z - \omega t)}. \quad (16.67)$$



Figur 16.7: I bølgeledere kan der forekomme tre forskellige bølgetyper, der betegnes som TE (transvers elektrisk), TM (transvers magnetisk) og TEM (transvers elektrisk-magnetisk).

Bemærk, at normalkomponenten $H_y = 0$ på pladerne ved $y = 0$ og $y = b$, sådan som det kræves af 16.45 og, at der forekommer en komponent H_z i udbredelsesretningen. Man kan uden større besvær overbevise sig om, at de fundne vacuumfelter 16.54 og 16.66 tilfredsstiller samtlige Maxwell ligninger.

Den her betragtede bølge 16.54, kaldes en TE-bølge (transvers elektrisk) efter **E**-feltets retning. En sådan kan i en pladeleder have et **H**-felt i udbredelsesretningen. Var vi gået ud fra en bølge, hvor **H**-feltet var transvers (en TM-bølge) ville vi have fundet et **E**-felt i udbredelsesretningen. Endelig kan der forekomme en TEM-bølge karakteriseret ved, at både **E** og **H** er vinkelrette på udbredelsesretningen. Det elektromagnetiske felt i en plan bølge i vacuum er således et TEM-felt. Dette felt kan også forekomme i pladelederen, med et **E**-felt som er vinkelret på pladerne og uafhængigt af koordinaten y . De tre bølgetyper er illustreret på fig. 16.7.

Betingelser
opfyldt

Tre bølge-
typer

16.2.2 Rektangulær bølgeleder

I praksis er den vigtigste bølgeleder den *rektangulære*, som er vist på fig. 16.8. Dens fordel er, at den kombinerer en form som let kan fremstilles med en enkel teori.

Det emne vi beskæftiger os med her kan siges at være elektromagnetiske bølger i afgrænsede områder af rummet. Her anvendes der i litteraturen et utal af nomenklaturer, fortegnskonventioner mv. Det kan derfor være nyttigt som indledning at præcisere, hvad der benyttes her.

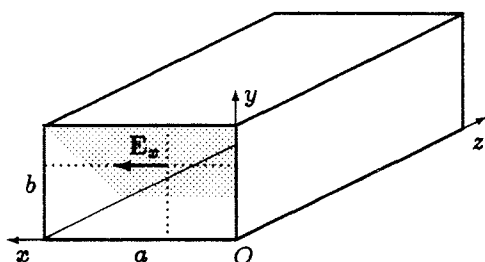
Oftest er det nødvendigt at beskrive felterne ved deres komponenter. For den rektangulære bølgeleder anvendes et cartesisk koordinatsystem, som vist på fig. 16.8. Bølgen udbreder sig i z -aksens (positive) retning, og beskrives ved en bølgefunktion af formen

$$E(x, y, z, t) = E(x, y) e^{j(k_z z - \omega t)}. \quad (16.68)$$

Tidsafhængigheden er altså $e^{-j\omega t}$, der som regel underforstås. Vi skal hovedsagelig interessere os for fremadskridende, udæmpede bølger hvor k_z er reel. Også faktoren $e^{jk_z z}$ kan derfor ofte underforstås. En komponent af bølgen 16.68 kan da f. eks. angives som $E_y(x, y)$ med en amplitude, der betegnes E_{y0} . Bølgelederens tværsnitsdimensioner er på fig. 16.8 angivet som (a, b) . I afsnittet om hulrumsresonatorer får vi også brug for længden i z -retningen,

Firkantet rør

Nomenklatur



Figur 16.8: Rektangulær bølgeleder med indlagt koordinatsystem.

Konventioner

som betegnes med d , eftersom bogstavet c er reserveret lyshastigheden. I alle retninger kan der forekomme stående bølger, hvis modus angives ved de hele tal (m, n, p) . Vi har altså følgende konventioner

Koordinat	x	y	z
Dimension af bølgeleder	a	b	d
Modus-tal	m	n	p

En bestemt modus angives i det generelle tilfælde som TE_{mnp} eller TM_{mnp} . For bølgeledere blot som TE_{mn} eller TM_{mn} .

Løsning søges

For bølgelederen fig. 16.8 undersøger vi nu muligheden for harmoniske løsninger til bølgeligningen af formen 16.68. For at få et håndterligt eksempel indskrænker vi os først til TE-bølger, hvis E -vektor peger i x -aksens retning. Det elektriske felt har da kun den ene komponent $E_x(x, y)$ og bølgeligningen 16.47 kan skrives

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) E_x = 0. \quad (16.69)$$

Separation af variable

Antager vi, at denne ligning kan løses ved separation af de variable, en antagelse som er retfærdiggjort når løsningen er fundet, kan vi sætte

$$E_x(x, y) = X(x)Y(y), \quad (16.70)$$

der indsættes i differentialigningen 16.69. Efter division med XY fås

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right). \quad (16.71)$$

Ligning separeres

Som i afsnit 2.9.3 har vi nu en situation, hvor der på venstre side står en sum af en funktion af x alene og en funktion af y alene, på højre en konstant. En sådan ligning kan kun være opfyldt for alle (x, y) , hvis de to led på venstre side hver for sig er konstante. Vi sætter

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2, \quad (16.72)$$

hvor det gælder, at

$$k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right). \quad (16.73)$$

Løsning

Ligningerne 16.72 har løsninger af formen

$$X = X_1 e^{-jk_x x} + X_2 e^{jk_x x}, \quad Y = Y_1 e^{-jk_y y} + Y_2 e^{jk_y y}, \quad (16.74)$$

hvor konstanterne må bestemmes fra grænsebetingelserne på væggene.

Holder vi x konstant, kan vi undersøge $\mathbf{E}$ -feltet på tværs af bølgelederen. Det bestemmes da af funktionen $Y(y)$. Tangentialkomposanten af $\mathbf{E}$ (dvs. E_x) skal være nul på sidefladerne $y = 0$ og $y = b$. Denne betingelse kan efter 16.74 kun opfyldes, hvis k_y er reel og $Y_1 = -Y_2 = Y_0$ sådan, at

$$Y = Y_0(e^{-jk_y y} - e^{jk_y y}) = -2jY_0 \sin k_y y, \quad (16.75)$$

og hvis yderligere

$$k_y = \frac{n\pi}{b}. \quad (16.76)$$

Holdes i stedet y konstant og varieres x , bliver der ikke noget problem med $\mathbf{E}$ på sidefladerne, da feltet allerede er normalt til dem begge. Vi må imidlertid sikre os, at alle Maxwell ligningerne er opfyldte. I vacuuet inde i bølgelederen er der ingen ladninger. Derfor er $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, som brugt på 16.70 giver

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{dE_x}{dx} = Y \frac{dX}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dX}{dx} = 0 \Rightarrow X = \text{const.} \quad (16.77)$$

Efter 16.74 svarer dette til $k_x = 0$ og $X = X_0$. I dette *specielle* tilfælde (kun en E_x -komposant) bliver bølgen da efter 16.68

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = -2j\mathbf{E}_0 \sin k_y y e^{j(k_z z - \omega t)}, \quad (16.78)$$

hvor $-2j\mathbf{E}_0 = -2jY_0X_0\mathbf{e}_x$ er en passende amplitudevektor i x -retningen. Dette felt har samme udseende, som vist på fig. 16.5.

Det magnetiske felt $\mathbf{H}$ i bølgen bestemmes af 16.66. Ved udregning af $\nabla \times \mathbf{E}$ med 16.78 finder man

$$\mathbf{H} = \frac{2E_0}{\omega\mu_0}(0, -jk_z \sin k_y y, k_y \cos k_y y) e^{j(k_z z - \omega t)}, \quad (16.79)$$

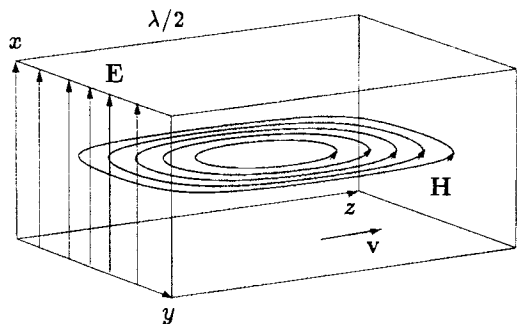
som helt stemmer med 16.67.

Mens feltlinierne for $\mathbf{E}$ er parallelle og vinkelrette på en sideflade, danner feltlinierne for $\mathbf{H}$ lukkede kurver, som illustreret på fig. 16.9. Den viste modus kaldes TE_{01} fordi heltallet $n = 1$ i 16.76, mens det tilsvarende heltal for bølgens x -afhængighed er $m = 0$.

Som vi fandt det for pladelederen, vil der også for den rektangulære bølgeleder være en kritisk frekvens, der bestemmes af

$$\omega_c = \frac{\pi n c}{b}. \quad (16.80)$$

Bølger med frekvens $\omega < \omega_c$ ikke kan transmitteres.



Figur 16.9: Feltlinier i rektangulær bølgeleder i TE_{01} -modus. Bemærk, at koordinaterne er drejet i forhold til fig. 16.8

Bølgetal i
 y -retning

Felt afhænger
ikke af x

Bølgen fundet

$\mathbf{H}$ -felt

Feltlinier

Kritisk
frekvens

Hvad har vi lært?

Som det ses adskiller den her fundne løsning for den rektangulære bølgeleder sig ikke fra den vi fandt for pladelederen, og man kan sige, at vi ikke har lært meget nyt bortset fra, at man for den betragtede modus kan sætte sidevægge i pladelederen uden at ændre bølgeformen.

Andre løsninger

Opgiver vi imidlertid begrænsningen til et $\mathbf{E}$ -felt, som er polariseret i x -retningen, finder vi mere generelle løsninger for den rektangulære bølgeleder som vil blive drøftet i næste afsnit.

16.2.3 Generelt om bølgeledere

Fælles træk

Bølger, som udbreder sig i en bølgeleder, har en række fælles træk. Disse træk afhænger ikke af formen på bølgelederens tværsnit så længe dette er konstant. For nærmere at undersøge sagen ser vi igen på en bølge af formen 16.68, altså

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y)e^{j(k_z z - \omega t)}. \quad (16.81)$$

Felt med tre komponenter

Vektoren $\mathbf{E}(x, y)$ har i almindelighed tre komponenter (E_x, E_y, E_z). Som vi skal se, er der særlig interesse knyttet til E_z -komponenten. Indsætter vi hele z -komponenten af 16.81 i bølgeligningen 16.47, finder vi en differentiaalligning for $E_z(x, y)$ alene:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) E_z = 0. \quad (16.82)$$

Denne ligning er helt analog til 16.69 i forrige afsnit. Vi sætter derfor

$$E_z(x, y) = X(x)Y(y), \quad (16.83)$$

og finder løsningerne

$$X = X_1 e^{-jk_x x} + X_2 e^{jk_x x}, \quad Y = Y_1 e^{-jk_y y} + Y_2 e^{jk_y y}. \quad (16.84)$$

Separationskonstanterne k_x og k_y fastlægges ved randbetingelsen $E_z = 0$. De må begge være reelle og må på grund af 16.82 opfylde betingelsen

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2. \quad (16.85)$$

Her er ω/c vacuumbølgetallet k . For at opnå kompakte udtryk i det følgende skal vi desuden indføre størrelsen

$$h = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{k^2 - k_z^2}. \quad (16.86)$$

Bølgetyperne

Det er hensigtsmæssigt at se på TEM, TE og TM felter separat. Tilfældet TEM er hurtigt klaret, da det ikke kan optræde i en lukket, enkelt bølgeleder. Det følger umiddelbart af den 4. Maxwell ligning 12.19 på integral form. Var der et TEM-felt i en lukket bølgeleder, måtte $\mathbf{H}$ -linierne danne lukkede kurver i en plan vinkelret på z -aksen, hvilket ville medføre $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$. Men der ikke er nogen ledningstrøm i den hule leder og heller ikke nogen aksial forskydningstrøm, fordi per definition $E_z = 0$ i en TEM-bølge. Der er altså ingen strøm overhovedet gennem en transversal plan.

Dette udelukker den gjorte antagelse om lukkede magnetiske feltlinier i denne. Det skal tilføjes, at TEM-bølger meget vel kan findes i et toledersystem som et coaxialkabel, hvor strømmen i midterlederen sikrer opfyldelsen af Ampères lov.

For de to andre felttyper gælder den almindelige regel, at et TE-felt kan afledes af feltet H_z alene, og et TM-felt kan afledes af feltet E_z alene. Dette kan bevises ved elementære, men langsommelige, manipulationer af Maxwells rotationsligninger for vacuum. Udskrevet i koordinater og med benyttelse af henholdsvis $E_z = 0$ og $H_z = 0$, finder man for de to tilfælde følgende relationer, som gælder for enhver bølgeleder:

Feltet afledt af H_z og E_z

TE :

$$E_x = \frac{j\omega\mu_0}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y},$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu_0}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$$E_z = 0.$$

$$H_x = \frac{jk_z}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$$H_y = \frac{jk_z}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y},$$

$$H_z = ?$$

$$(16.87)$$

TM :

$$E_x = \frac{jk_z}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

$$E_y = \frac{jk_z}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y},$$

$$E_z = ?$$

$$H_x = -\frac{j\omega\epsilon_0}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y},$$

$$H_y = \frac{j\omega\epsilon_0}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

$$H_z = 0.$$

$$(16.88)$$

Spørgsmålstegnene antyder, at denne ene komponent må findes ved løsning af bølgeligningen 16.82 eller af en helt tilsvarende bølgeligning for H_z .

Således bevæbnet kan vi returnere til den rektangulære bølgeleder og opskrive den generelle løsning. Vi skal indskrænke os til at gennemføre argumentationen for TM-tilfældet, som er en anelse enklere end TE-tilfældet.

Som det fremgår af 16.88, er den første opgave at finde E_z ved løsning af 16.82. Med k_x reel bliver

E_z findes

$$X = (X_1 + X_2) \cos k_x x + j(X_1 - X_2) \sin k_x x. \quad (16.89)$$

På væggen $x = 0$ er E-feltets tangentialkomponent 0, dvs. $E_z = 0$. Dette udelukker cos-leddet således, at vi må vælge $X_1 = -X_2$ hvilket giver $X = 2jX_1 \sin k_x x$. På væggen ved $x = a$, kan vi kun få $E_z = 0$ ved at vælge $k_x = m\pi/a$. En helt tilsvarende argumentation for væggene $y = 0$ og $y = b$ giver $Y = 2jY_1 \sin k_y y$ og $k_y = n\pi/b$. Den samlede løsning bliver derfor

$$E_z = -4X_1 Y_1 \sin k_x x \sin k_y y = E_{z0} \sin k_x x \sin k_y y, \quad (16.90)$$

med betingelserne

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}. \quad (16.91)$$

Udbredelsen af udæmpede bølger i z -retningen bestemmes da (jvf. 16.73) af bølgetallet

Modusbestemt udbredelse

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}. \quad (16.92)$$

Man bemærker, at det for de reelle bølgetal (k_x, k_y, k_z) gælder, at

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2, \quad (16.93)$$

hvor $k = \omega/c$ er vacuumbølgetallet (sml. 16.54).

Kritisk
frekvens

For transmissionen vil der være en kritisk frekvens, hvorunder k_z ikke længere er reel, sådan at bølgen dæmpes. Af 16.92 ses det, at den kritiske frekvens bestemmes af

$$\omega_c = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad (16.94)$$

hvortil der svarer et kritisk bølgetal, som bliver

$$k_c = h = \frac{\omega_c}{c} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (16.95)$$

TM_{mn}-løsning

Med 16.88 og 16.90 bliver den generelle løsning for den rektangulære bølgeleder i TM_{mn}-tilfældet

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{jk_z}{h^2} k_x E_{z0} \cos k_x x \sin k_y y e^{jk_z z}, \\ E_y &= \frac{jk_z}{h^2} k_y E_{z0} \sin k_x x \cos k_y y e^{jk_z z}, \\ E_z &= E_{z0} \sin k_x x \sin k_y y e^{jk_z z}. \end{aligned} \quad (16.96)$$

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{j\omega}{h^2} k_y \epsilon_0 E_{z0} \sin k_x x \cos k_y y e^{jk_z z}, \\ H_y &= \frac{j\omega}{h^2} k_x \epsilon_0 E_{z0} \cos k_x x \sin k_y y e^{jk_z z}, \\ H_z &= 0. \end{aligned} \quad (16.97)$$

TE_{mn}-løsning

I TE_{mn}-tilfældet finder man tilsvarende

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{j\omega}{h^2} k_y \mu_0 H_{z0} \cos k_x x \sin k_y y e^{jk_z z}, \\ E_y &= \frac{j\omega}{h^2} k_x \mu_0 H_{z0} \sin k_x x \cos k_y y e^{jk_z z}, \\ E_z &= 0. \end{aligned} \quad (16.98)$$

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{jk_z}{h^2} k_x H_{z0} \sin k_x x \cos k_y y e^{jk_z z}, \\ H_y &= -\frac{jk_z}{h^2} k_y H_{z0} \cos k_x x \sin k_y y e^{jk_z z}, \\ H_z &= H_{z0} \cos k_x x \cos k_y y e^{jk_z z}. \end{aligned} \quad (16.99)$$

Bemærk, at TM_{mn}-felterne alle indeholder amplituden E_{z0} af E_z -feltet, og TE_{mn}-felterne tilsvarende amplituden H_{z0} af H_z -feltet. I TM-tilfældet kan hverken m eller n være 0, da E_z og dermed alle andre felter i så fald forsvinder. I TE-tilfældet kan enten m eller n udmærket være 0, men ikke dem begge. Den fysiske bølge er realdelene af de her givne felter. Det er derfor vigtigt at tage vare på j -faktorerne, som skifter mellem realdel og imaginærdel af den vandrende bølge $e^{j(k_z z - \omega t)}$.

Et hult, cirkulært metalrør er en anden bølgeleder, som undertiden anvendes. Bølgeligningen behandles her enkelt i cylinderkoordinater (r, ϕ, z) og har løsninger, som er vandrende bølger $e^{jk_z z}$ i z -retningen med en radial afhængighed af amplituden, som udtrykkes ved Bessel-funktioner.

*Andre
bølgeledere*

Også dielektriske stænger kan fungere som bølgeledere for bølger af TE- og TM-type, men bølgen trænger her, eksponentielt aftagende, en smule ud i det omgivende medium. Optiske fibre er meget tynde bølgeledere af denne art, som anvendes i det optiske frekvensområde.

16.3 Hulrumsresonatorer

I et hvilket som helst hulrum i et metal kan der forekomme stående elektromagnetiske bølger med bestemte frekvenser, som afhænger af hulrummets form og størrelse. Man kalder disse frekvenser for *resonansfrekvenser*, og man taler om *hulrumsresonatorer*. Vi skal her indskrænke os til at se på en resonator i form af et stykke af en rektangulær bølgeleder med dimensioner $a \times b \times d$, som vist på fig. 16.10.

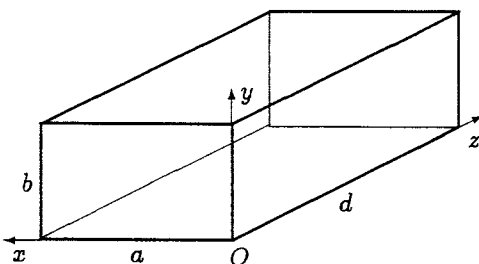
Stående bølger

I den rektangulære bølgeleder fandt vi bølger af typerne TM og TE med komponenter, som var givet ved 16.96–16.99. Vi møder samme type bølger som stående bølger i resonatoren, men her er der ikke nogen bestemt udbredelsesretning, da koordinaterne (x, y, z) er helt ligeberettigede. Det letter imidlertid behandlingen og knytter forbindelsen til det foregående, hvis vi fortsat omtaler z -retningen som 'udbredelsesretningen' og anvender denne som reference ved felternes beregning.

Lad os konkret tænke på komponenten E_x i TM_{mn} -bølgen 16.96. Fysisk kan vi forestille os, at den vandrende bølge $e^{jk_z z}$ ved væggen $z = d$ reflekteres over i bølgen $e^{-jk_z z}$. I superpositionen af den indfaldende og den reflekterede bølge skal tangentialkomponenten, dvs. E_x , være 0 ved væggene. For $z = 0$ opnås dette, når den reflekterede amplitude er lige så stor som den indfaldende, men har modsat fortegn. Dette giver en sinus-afhængighed $E_x(x) \sim \sin k_z z$. På væggen $z = b$ forsvinder tangentialkomponenten kun, hvis desuden betingelsen $k_z = p\pi/d$, med p hel, er opfyldt. Et tilsvarende argument for tangentialkomponenten E_y giver $E_y \sim \sin k_z z$ og $k_z = p\pi/d$ (samme p). Helt præcist bliver superpositionen efter 16.96:

*Reflekteret
bølge i z*

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-2k_z}{h^2} k_x E_{z0} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z, \\ E_y &= \frac{-2k_z}{h^2} k_y E_{z0} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z, \end{aligned} \quad (16.100)$$



Figur 16.10: Rektangulær hulrumsresonator med dimensioner $a \times b \times d$.

Find E_z

Vi vil gerne finde E_z , hvorfra de øvrige felter kan afledes ved hjælp af relationerne 16.88. Vi har ikke nogen direkte brugbar grænsebetingelse for E_z , men kan anvende betingelsen $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ sammen med 16.100, hvilket giver

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial z} &= -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} \\ &= -\frac{2k_z}{h^2} E_{z0} (k_x^2 \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z + k_y^2 \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z) \\ &= -2k_z E_{z0} \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z,\end{aligned}\quad (16.101)$$

hvor der efter 16.95 er anvendt $h^2 = k_x^2 + k_y^2$. Ved integration findes således

$$E_z = E_{z0} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z, \quad (16.102)$$

hvor faktoren 2 er udeladt, idet den blot er en reminiscens af, at der er superponeret to felter med amplitude E_{z0} . Ved brug af 16.88 bestemmes derefter magnetfeltet således, at samtlige felter i TM_{mnp} -tilfældet bliver

TM-resonator

$$\begin{aligned}E_x &= -\frac{k_z}{h^2} k_x E_{z0} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z, \\ E_y &= -\frac{k_z}{h^2} k_y E_{z0} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z, \\ E_z &= E_{z0} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z.\end{aligned}\quad (16.103)$$

$$\begin{aligned}H_x &= -\frac{j\omega}{h^2} k_x \epsilon_0 E_{z0} \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z, \\ H_y &= \frac{j\omega}{h^2} k_y \epsilon_0 E_{z0} \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z, \\ H_z &= 0.\end{aligned}\quad (16.104)$$

TE-resonator

For fuldstændigheds skyld angives de tilsvarende felter i TE_{mnp} -tilfældet

$$\begin{aligned}E_x &= -\frac{j\omega}{h^2} k_y \mu_0 H_{z0} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z, \\ E_y &= \frac{j\omega}{h^2} k_x \mu_0 H_{z0} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z, \\ E_z &= 0.\end{aligned}\quad (16.105)$$

$$\begin{aligned}H_x &= -\frac{k_z}{h^2} k_x H_{z0} \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z, \\ H_y &= -\frac{k_z}{h^2} k_y H_{z0} \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z, \\ H_z &= H_{z0} \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z.\end{aligned}\quad (16.106)$$

Bølgetal

I begge tilfælde er bølgetallene bestemt af resonatorens dimensioner, idet

$$\boxed{k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad k_z = \frac{p\pi}{d}. \quad (16.107)}$$

Ved inspektion af 16.103–16.106 ser man, at i TM-tilfældet kan hverken m eller n , men nok p , være 0. I TE-tilfældet kan enten m eller n , men aldrig begge og aldrig p , være 0.

Ved indsætning af E_z fra 16.103 eller H_z fra 16.106 i bølgeligningen ser man, at 16.93 stadig gælder således, at

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (16.108)$$

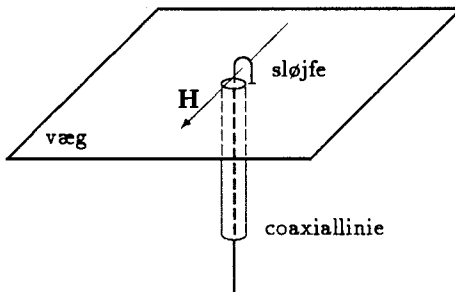
I resonatoren er imidlertid alle bølgetallene fuldstændig fastlagt ved 16.107. Det betyder, at der til hver modus svarer en ganske bestemt frekvens, som er resonansfrekvensen

$$\omega = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}}. \quad (16.109)$$

De forskellige modi angives som TM_{mnp} eller TE_{mnp} . Er f.eks. $a > b > d$ har modus TM_{110} den lavest mulige resonansfrekvens, som bliver

$$\omega_{110} = c\pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}. \quad (16.110)$$

Felterne i en hulrumsresonator anslås ved indkobling af en ydre højfrekvensgenerator. Dette kan eksempelvis ske ved en lille strømsløjfe, som vist på fig. 16.11. Den oscillerende strøm i sløjfen skaber et magnetfelt gennem denne, som skal falde sammen med H -feltet i den ønskede modus. Ønsker man således en TE_{101} modus, kan sløjfen anbringes vinkelret på z -retningen ved $z = d/2$, hvor H_z efter 16.106 er maximal. Generatorens frekvens må selvsagt indstilles på resonansfrekvensen for den pågældende modus.



Figur 16.11: Indkobling af højfrekvens i en hulrumsresonator ved brug af en strømsløjfe.

I det foregående har vi omtalt et hulrum i et metal som en resonator for at understrege, at stående elektromagnetiske bølger kun kan fremkomme for udvalgte frekvenser. For den rektangulære resonator er disse bestemt ved 16.109. Indkobling af andre frekvenser giver ikke stående bølger og derfor heller ikke det opsving i felternes amplitude, som er karakteristisk for et resonant system.

Ved undersøgelsen af vekselstrømskredse i afsnit 11.3.4 indførte vi den dimensionsløse godhed Q som forholdet mellem resonansfrekvensen ω_0 og bredden $\Delta\omega$ af resonanskurven. Efter 11.84 er

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\omega_0}{R} \quad (16.111)$$

for en kreds med induktans L og resistans R .

Hvilke modi?

Resonansfrekvens

Indkobling af felt

Resonatorer

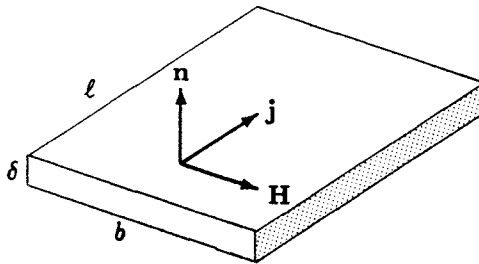
Godhed af resonator

Q beregnes

Nu har vi ikke forsøgt at identificere et L og et R for en hulrumsresonator, og det er heller ikke nødvendigt, hvis vi anvender den alternative definition af Q , som blev indført i opgave 11.13. Efter denne er godheden $2\pi \times$ forholdet mellem den i kredsen oplagrede energi U og den af effekten P afsatte energi over en svingningsperiode $T = 2\pi/\omega$, altså

$$Q = 2\pi \frac{U}{TP} = \frac{\omega U}{P}, \quad (16.112)$$

som vi direkte kan anvende på hulrumsresonatoren.



Figur 16.12: Beregning af effekten afsat i overfladen af en resonator.

Afsat effekt beregnes

Den afsatte effekt skyldes overfladestrømmene i resonatorens vægge. Vi har i afsnit 13.4 set, at elektromagnetiske bølger trænger ind i en leder til en (frekvensafhængig) dybde δ , som kan beregnes af 13.55. Lad os forestille os et stykke af metaloverfladen med dimensioner $\ell \times b \times \delta$, se fig. 16.12. Stykket repræsenterer efter 5.13 en overfladeresistans $R_s = \rho\ell/b\delta$, hvor ρ er metallets resistivitet. Resistansen gennemløbes af en strøm $I_s = |\mathbf{j}|b$, hvor $|\mathbf{j}|$ er overflade-strømtætheden, som efter 12.73 er $|\mathbf{j}| = H$. Derved afsættes der en middeleffekt

$$P = \frac{1}{2} R_s I_s^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho\ell}{b\delta} |\mathbf{j}|^2 b^2 = \frac{1}{2} \frac{\ell b \rho}{\delta} H^2. \quad (16.113)$$

Men da ℓb er pladestykkets areal bliver effekttætheden på overfladen

$$p = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\delta} H^2, \quad [p] = \text{Wm}^{-2}. \quad (16.114)$$

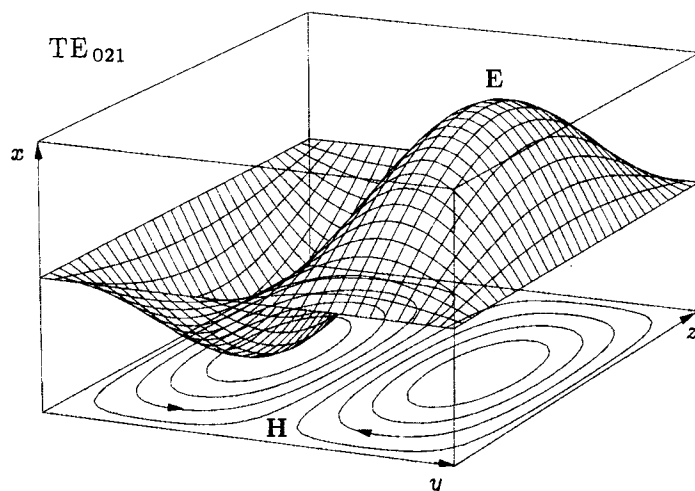
Overslag for Q

Den samlede effekt findes ved at integrere 16.114 hen over resonatorens inderflade med H -felter, som for den rektangulære resonator bestemmes af 16.103–16.106. Dette er en langsommelig, men ikke vanskelig opgave. Her skal vi nøjes med et simpelt overslag for en vilkårlig resonator med volumen V og overfladeareal A .

Energi

Den oplagrede energi kan findes ved at integrere energitætheden $u = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 + \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ over resonatorens volumen V . Energien veksler imellem at være elektrisk og magnetisk. Vi kan vurdere energitætheden i resonatoren til $u = \frac{1}{2}\mu_0 H_0^2$, hvor H_0 er en passende amplitude. For den rektangulære oscillator kunne man vælge $H_0 = H_{x0}$ i 16.106, hvorved man negligerer de faktorer som afhænger af bølgetallene og som er af størrelsesordenen 1. Integration over volumenet erstattes af multiplikation med V hvorved man ser bort fra middelværdidannelse over $\sin^2$ eller $\cos^2$, som giver faktorer af størrelsesordenen $\frac{1}{2}$. Skønnet over den samlede energi bliver da

$$U = \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 V. \quad (16.115)$$



Figur 16.13: Det er vanskeligt at afbilde felterne i en resonator generelt, da der er tale om vektorfelter i tre dimensioner. I det illustrerede tilfælde er $m = 0$. Felterne afhænger derfor ikke af x -koordinaten og kan anskueliggøres på den viste måde.

Tilsvarende finder vi det samlede effekttab ved i 16.114 at erstatte H med H_0 og dernæst multiplicere med arealet A , hvorved der ses bort fra faktorer af samme størrelsesorden som før. Vurderingen af effekten bliver da

Effekt

$$P = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\delta} H_0^2 A, \quad (16.116)$$

hvorefter den tilsvarende godhed bliver

Q vurderet

$$Q = \frac{\omega U}{P} \simeq \frac{\omega \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 V}{\frac{1}{2} (\rho/\delta) H_0^2 A} = \frac{2V}{\delta A} \quad (16.117)$$

Ved den sidste omskrivning er der benyttet udtrykket 13.55 for indtrængningsdybden. Trods tilnærmelserne fungerer vurderingen 16.117 godt i praksis, da de negligerede faktorer har tendens til at dividere ud.

▷ Kubisk resonator: For en TM_{110} -modus i en kubisk resonator $a = b = d$ ved 10 GHz beregner man efter 16.117

Et eksempel

$$Q = \frac{2a^3}{\delta 6a^2} = \frac{a}{3\delta}, \quad (16.118)$$

hvilket træffer sig at være det samme, som findes ved en eksakt beregning.² Af 13.55 og tabel 5.1 finder man for kobber en indtrængningsdybde $\delta = 6.60 \times 10^{-7}$ m, hvorefter 16.118 giver $Q = 10\,700$. Denne godhed er meget større end den, som kan realiseres med resonante elektriske kredsløb. I praksis opnås ikke helt de teoretiske værdier for resonatoren, da der er tab fra uregelmæssigheder i overfladerne og tab ved indføringen af højfrekvensen. Alligevel må man sige, at hulrumsresonatoren er et meget smukt eksempel på anvendelsen af den elektromagnetiske teori på et praktisk problem.◁

² Se f. eks. David K. Cheng, Engineering Electromagnetics, Addison-Wesley (1993).

Appendix A

Vektoranalyse

Fremstillingen af den elektromagnetiske teori bliver væsentligt forenklet ved brug af *vektoranalyse*, som både er en art matematisk stenografi og en effektiv metode til at gennemføre komplicerede beregninger. Tilmed knytter vektoranalysen sig meget nøje til de fysiske begreber bag ligningerne. Dette appendix er et brugerkatalog som uden matematisk stringens eller bevisførelse beskriver de vigtigste vektoranalytiske redskaber, der anvendes inden for den elektromagnetiske teori.

A.1 Skalarer og vektorer

Ved studiet af elektromagnetismen er vi især interesseret i de to typer af fysiske størrelser, som kaldes *skalarer* og *vektorer*. Ved videregående undersøgelser har man desuden brug for størrelser, der udtrykkes ved *tensorer*.

På løs måde kan man sige, at en *skalar* er fuldt beskrevet ved blot sin størrelse. Eksemplerne er mange: masse, tid, volumen, densitet eller temperatur. Skalarer betegnes almindeligvis med et latinsk eller græsk bogstav som m , t , V , ρ eller T .

*Skalar
defineret*

Beskrivelsen af en *vektor* kræver angivelse af både en størrelse og en retning. Typiske eksempler er hastighed, acceleration, kraft eller position angivet ved stedvektorer. I de fleste trykte tekster og i denne bog betegnes vektorer med fede bogstaver som $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{F}$ eller $\mathbf{r}$. Oftest møder man vektorer i rummet, som let anskueliggøres ved pile, men også vektorer med højere dimension finder anvendelse.

*Vektor
defineret*

I tre dimensioner kan en vektor $\mathbf{A}$ angives ved sine cartesiske koordinater (A_x, A_y, A_z) . Af to eller flere vektorer dannes som bekendt produkter efter reglerne:

◇ Skalarprodukt: Skalarproduktet $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ af to vektorer er en skalar

Skalarprodukt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos(\angle \mathbf{A}, \mathbf{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (\text{A.1})$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}, \quad \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Skalar multiplikation er *kommutativ*, dvs. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, og kan i sagens natur kun omfatte to vektorer. Størrelsen af projektionen af $\mathbf{A}$ ind på $\mathbf{B}$'s retning er $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / |\mathbf{B}|$.

Vektorprodukt $\diamond$ Vektorprodukt: Vektorproduktet $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ af to vektorer er en vektor $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad |\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin(|\mathbf{A}|, |\mathbf{B}|), \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.4})$$

Vektorproduktets komponenter I cartesiske koordinater huskes vektorproduktets komponenter lettest ved determinanten

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

hvor $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, og $\mathbf{k}$ er enhedsvektorerne på koordinataksene. Vektorproduktet $\mathbf{C}$ er vinkelret på både $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$. Vektorerne $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$, i den orden, danner en højreskrue. Vektoriel multiplikation er *ikke* kommutativ, idet $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$. Vektoren $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ er arealvektor for det parallelogram, som udspændes af $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$.

Rumprodukt $\diamond$ Rumprodukt: Det blandede produkt $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ kaldes *rumproduktet* af $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$. Det kan i cartesiske koordinater udtrykkes som en determinant

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Rumproduktet er uændret ved ombytning af prik og kryds og ved cykliske permutationer af de tre vektorer. Produktet $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ angiver volumen af det parallelepipedum, som udspændes af $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$.

Tripelprodukt $\diamond$ Tripelprodukt: Vektorproduktet $\mathbf{D} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ kaldes et *tripelprodukt*. Det kan udtrykkes ved

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (\text{A.7})$$

der mnemoteknisk kan huskes som "bac-cab"-reglen. Det er vigtigt at medtage parenteserne i tripelproduktet, da det ellers ikke er veldefineret.

A.2 Skalarfelter og vektorfelter

Skalarfelt Man taler om et *skalarfelt*, når der til ethvert punkt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ i rummet er knyttet en skalar $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z)$. De punkter, som tilfredsstiller ligningen

$$\varphi(x, y, z) = k, \quad (\text{A.8})$$

hvor k er en konstant, ligger på en flade, som kaldes en *niveauflade* for feltet. Gennem hvert punkt i rummet $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ går én niveauflade bestemt ved

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z_0). \quad (\text{A.9})$$

Tilsvarende taler man om et *vektorfelt*, når der til ethvert punkt i rummet er knyttet en vektor $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Bemærk, at hver af vektorens komponenter er funktion af $\mathbf{r}$:

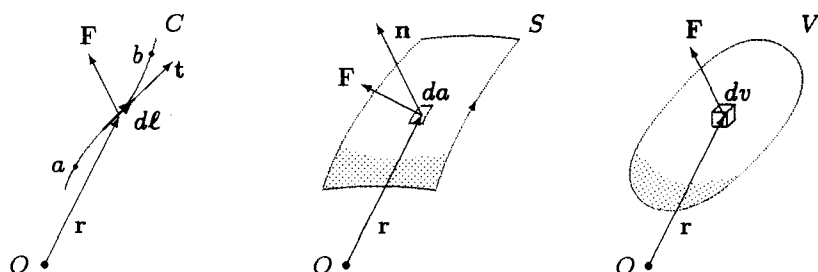
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)). \quad (\text{A.10})$$

De felter, som her er defineret, er *stationære* eller repræsenterer en *øjeblikstilstand* af feltet. I almindelighed vil felterne være *dynamiske* og altså afhænge af tiden t . Vi må da skrive felterne som $\varphi(\mathbf{r}, t)$ eller $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$.

Temperaturfelter og elektriske og gravitationelle potentialer er eksempler på skalarfelter. Hastighedsfeltet i en væske og de elektriske eller magnetiske feltstyrker er eksempler på vektorfelter.

A.2.1 Integration af feltstørrelser

Der er tre typer integraler, som igen og igen optræder i den elektromagnetiske teori, nemlig linieintegraler, overfladeintegraler og volumenintegraler, hvor navnet svarer til arten af det differential, som optræder. Integranden kan være en vektor eller en skalar, men ikke alle kombinationer af integrand og differential har betydning.



Figur A.1: Linie-, flade- og volumenintegral af vektorfelt.

Lad C være en kurve, hvorpå der ligger punkterne a og b (a og b kan eksempelvis angive buelængder på kurven). Ved *linieintegralet* eller *kurveintegralet* af vektorfeltet $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ fra a til b langs kurven C forstår man integralet

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \, dl, \quad (\text{A.11})$$

hvor $d\mathbf{l}$ er et infinitesimalt element på kurven og $\mathbf{t}$ en enhedsvektor på dens tangent. Man benytter ofte den kompakte skrivemåde $d\mathbf{l} = \mathbf{t} \, dl$ for det infinitesimale vektorelement på kurven. Er kurven givet ved en parameterfremstilling $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, kan linieintegralet skrives

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{t(a)}^{t(b)} \mathbf{F}(x(s), y(s), z(s)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \, ds. \quad (\text{A.12})$$

Ved anvendelser i fysiken møder man ofte linieintegralet af et vektorfelt langs en lukket kurve C . Dette integral kaldes feltets *cirkulation* langs kurven og skrives

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{A.13})$$

Cirkulationen langs en lukket kurve kan være nul eller forskellig fra nul, afhængigt af kurvens form og feltets art. Felter, hvis cirkulation langs enhver lukket kurve er nul, spiller dog en særlig rolle. Man kan for dem angive cirkulationen efter A.13 uden at specificere C .

*Linieintegral
af vektorfelt*

*Cirkulation
af vektorfelt*

Flux og
fladeintegral
af vektorfelt

Vi betragter nu en flade i rummet. Lad S angive et stykke af denne flade og $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ igen et vektorfelt. Vi kan da beregne følgende integral, der betegnes som vektorfeltets *strøm* eller *flux* gennem fladestykket

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da. \quad (\text{A.14})$$

Vektoren $\mathbf{n}$ er normalvektoren til fladen. Her er igen anvendt en kompakt notation, idet $d\mathbf{a} = \mathbf{n} da$ angiver det infinitesimale (vektor-) overfladeelement med areal da . Normalvektorens retning fastlægges som regel sådan, at den peger ud af fladen, hvis denne er lukket. For et ikke-lukket fladestykke vælges en omløbsretning på stykkets rand, og fladenormalens retning fastlægges dernæst ved højrehåndsreglen.

Flux gennem
lukket flade

Fluxen gennem en lukket flade angives undertiden ved integraltegnet $\oint$

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}. \quad (\text{A.15})$$

I flere vigtige tilfælde afhænger integralet A.15 ikke af den lukkede flades form, og man angiver da ofte fluxen efter A.15 uden S .

Volumen-
integraler

Endelig møder man ved anvendelserne to typer volumenintegraler, nemlig af et skalarfelt og af et vektorfelt. Integralerne er af typen

$$\int_V \varphi dv \quad \int_V \mathbf{F} dv. \quad (\text{A.16})$$

Det første integral er klart en skalar. Det andet integral er en vektor. Ved beregningen af dette integral må man være opmærksom på, at hver komponent kræver sin egen integration.

A.2.2 Differentiation af feltstørrelser

Det er ofte nødvendigt at udføre forskellige differentialoperationer på feltstørrelser. Sådanne operationer kan udtrykkes på en elegant, kompakt og overskuelig måde ved hjælp af vektoroperatoren *nabla* med symbolet ∇ . Vi skal derfor først indføre nabla-operatoren og derefter ved denne definere de grundlæggende operationer *gradient*, *divergens* og *rotation*. Disse differentialoperationer kan sammensættes til mere komplicerede udtryk. De vedrører alene de rumlige koordinater. Det skal imidlertid huskes, at feltstørrelserne ofte afhænger af og kan differentieres med hensyn til tiden.

Operatoren nabla

∇ defineret

Operatoren nabla defineres i cartesiske koordinater med enhedsvektorerne $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ som

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{A.17})$$

Det betaler sig at studere dette udtryk. Som opskrevet er det tomt. Det er en *operator*, som må have noget at operere på. I sin form er operatoren *vektor*. Den er yderligere en *differentialoperator* i og med, at den indeholder

de første ordens partielle afledede efter x , y og z . Nabla er således en *vektordifferential-operator*. Hvad der kommer ud af at lade den operere, afhænger af, hvad den opererer på, og efter hvilken instruks den gør det. Vi skal se på tre fundamentale tilfælde, som er sammenfattet i tabel A.1.

*Gradient,
divergens,
rotation*

Tabel A.1: Elementære operationer med ∇

operator:	virker på:	notation:	giver:
∇	skalarfelt	$\nabla\varphi \equiv \text{grad } \varphi$	vektorfelt
$\nabla \cdot$	vektorfelt	$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \text{div } \mathbf{F}$	skalarfelt
$\nabla \times$	vektorfelt	$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \text{rot } \mathbf{F}$	vektorfelt

Betegnelserne $\text{grad } \varphi$, $\text{div } \mathbf{F}$ og $\text{rot } \mathbf{F}$ er en anden notation for operationerne gradient, divergens og rotation, som dog nu hastigt fortrænges af nabla-notationen.

Gradient

Når ∇ opererer på et skalarfelt $\varphi(\mathbf{r})$ dannes et vektorfelt, gradienten af φ , som i cartesiske koordinater er givet ved

$\nabla\varphi$

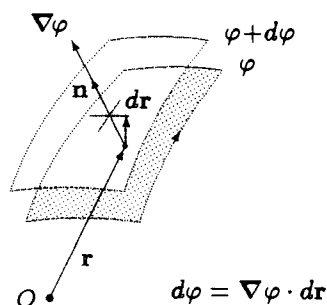
$$\nabla\varphi = \mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (\text{A.18})$$

i nøje overensstemmelse med definitionen A.17. Gradientens fysiske betydning indses ved at betragte ændringen i φ mellem to nærtliggende punkter

$$d\varphi = \varphi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}. \quad (\text{A.19})$$

Tager et skridt $d\mathbf{r}$ på en længdeenhed i en vis retning, bliver ændringen $d\varphi$ projektionen af $\nabla\varphi$ på denne retning. Bevæger vi os på en niveauflade for φ er $d\varphi = 0$. Af A.19 slutter vi da, at $\nabla\varphi$ er vinkelret på $d\mathbf{r}$, dvs. på niveaufladen. Med andre ord: *Gradienten af en skalarfunktion er en vektor i den retning (normalen), hvor funktionen vokser hurtigst. Gradientens størrelse er skalarfunktionens ændring per længde i normalens retning.*

*Gradienten er
vinkelret på
niveaufladen*



Figur A.2: Gradienten er en vektor i den retning, hvor skalarfunktionen ændrer sig hurtigst.

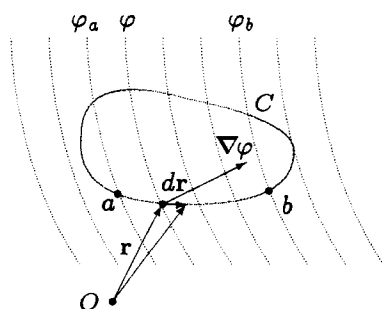
Efter A.19 er $d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}$. For linieintegralet fra a til b langs et kurvestykke gælder da

$$\int_a^b \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b d\varphi = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (\text{A.20})$$

Linieintegralet af $\nabla\varphi$ afhænger således kun af begyndelses- og slutpunkt. Følger disse punkter sammen, har vi en lukket kurve (se fig. A.2.2), og efter A.20 er cirkulationen af gradienten altid nul:

$$\oint \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Er φ et kraftpotential udtrykker A.21, at feltet er *konservativt*.



Figur A.3: Linieintegralet af et gradientfelt langs en kurve afhænger kun af begyndelses- og slutpunkt. Er kurven lukket, bliver cirkulationen af gradienten nul.

Divergens

$\nabla \cdot \mathbf{F}$

Når operatoren $\nabla \cdot$ virker på et vektorfelt $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ dannes et skalarfelt, divergensen af $\mathbf{F}$, som i cartesiske koordinater får udtrykket

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (\text{A.22})$$

Gauss' sætning

Om divergensen gælder den meget vigtige *Gauss' sætning* eller *divergens-teoremet*. Hvis S er en lukket flade, som indeslutter volumen V , siger sætningen

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}, \quad (\text{A.23})$$

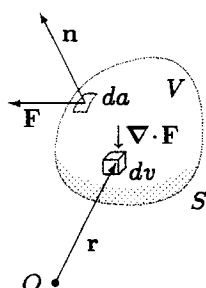
eller, udtrykt i ord: *Volumenintegralet af divergensen af et vektorfelt er lig strømmen af vektorfeltet gennem den flade, som omslutter volumenet.*

Alternativ definition af divergens

Vi kan anvende Gauss' sætning på et meget lille volumen ΔV og finder da følgende grænseværdi, der kan tjene som alternativ definition af divergens:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}. \quad (\text{A.24})$$

Divergensen er således grænseværdien per indesluttet volumen af strømmen gennem en lukket flade.



Figur A.4: Gauss' sætning forbinder kildestyrken inden for en lukket flade med feltets udadrettede strøm gennem fladen.

Divergensen er tydeligt en skalarfunktion, knyttet til det punkt, som i grænsen indesluttet af overfladen. Divergensen udtrykker fysisk en strøm ud gennem den infinitesimale flade, eksempelvis en væskestrøm. Er divergensen positiv, rummer det pågældende punkt en *kilde*, og man kalder feltet et *kildefelt*. En negativ kilde kaldes et *dræn*. Et felt, hvor divergensen overalt er nul, siges at være *kildefrit*. Feltets strøm ind i fladen balanceres da af strømmen ud.

Divergensen viser feltets kilder

Rotation

Når operatoren $\nabla \times$ virker på et vektorfelt, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, dannes et nyt vektorfelt, rotationen af $\mathbf{F}$, som i cartesiske koordinater bliver

$\nabla \times \mathbf{F}$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right). \quad (\text{A.25})$$

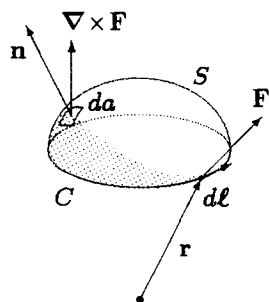
Udtrykket huskes lettest, når det skrives som en determinant

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Om rotationen gælder den vigtige *Stokes' sætning*. Hvis S er et fladestykke, som er afgrænset af randkurven C , siger sætningen

Stokes' sætning

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{\ell}. \quad (\text{A.27})$$



Figur A.5: Stokes' sætning forbinder feltets cirkulation langs en lukket kurve med strømmen af feltets rotation gennem en flade med kurven som rand.

eller i ord: *Cirkulationen af et vektorfelt langs en lukket kurve er lig fladeintegralet af feltets rotationen over enhver flade, der har kurven som rand.*

Alternativ
definition
af rotation

Vi kan anvende Stokes' sætning på et meget lille fladestykke ΔS . Betegner $\mathbf{n}$ fladestykkets normal, får vi følgende grænseværdi:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{\ell}. \quad (\text{A.28})$$

Normalkomponenten af rotationen er således grænseværdien af cirkulationen per omsluttet areal. Fysisk udtrykker rotationen noget om hvirvler, eksempelvis i en væskestrømning. Man skal dog vogte sig for at tro, at alle felter der "ser ud til at køre rundt" også har $\nabla \times \mathbf{F} \neq 0$. Sml opg. 2.4.

Sammensatte differentialoperationer

De indtil nu omtalte differentialoperationer kan sammensættes til en lang række udtryk, hvoraf mange finder anvendelse på elektromagnetiske felter.

rot grad=0

◇ Rotationen af et gradientfelt er nul. Dette indses let ved regning i koordinater med benyttelse af A.18 og A.25. Udtrykt ved nabla er

$$\boxed{\nabla \times \nabla \varphi = 0} \quad (\text{A.29})$$

Omvendt gælder, at hvis $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ for et vektorfelt $\mathbf{F}$, da er feltet et gradientfelt. Dvs, at der findes et skalart felt φ sådan, at $\mathbf{F} = \nabla \varphi$.

div rot=0

◇ Ligeledes er divergensen af et rotationsfelt nul. Udtrykt ved nabla er

$$\boxed{\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0}. \quad (\text{A.30})$$

Også her gælder, at hvis $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$ for et vektorfelt $\mathbf{G}$, da er feltet et rotationsfelt. Dvs, at der findes et vektorfelt $\mathbf{F}$ sådan, at $\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F}$.

Laplace-
operatoren

◇ Ved kombination af operationerne divergens og gradient får man operatoren 'div grad'

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2, \quad (\text{A.31})$$

der kaldes *Laplaceoperatoren* efter *Pierre Simon Laplace* (1749-1827) □. Udskrevet i cartesiske koordinater bliver

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}}. \quad (\text{A.32})$$

Laplaceoperatoren har mange anvendelser inden for potentialteori, herunder elektrostatik. Operatoren er her vist virkende på et skalarfelt. Man møder også udtryk som $\nabla^2 \mathbf{F}$. Dermed menes vektoren $(\nabla^2 F_x, \nabla^2 F_y, \nabla^2 F_z)$, som fås ved at virke på hver af komponenterne for sig.

◇ Desuden er det muligt at tage rotationen af rotationen ('rotrot') af et vektorfelt. Denne operator kan udtrykkes som

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}. \quad (\text{A.33})$$

◇ Endelig møder man undertiden operatorudtrykket $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ (læs 'A gradient B'), som er en vektor, hvis fysiske betydning er ændringen i $\mathbf{B}$, når

der tages et skridt A i rummet. I koordinater har man:

$A \text{ grad } B$

$$(A \cdot \nabla)B =$$

$$\left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z}, A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z}, A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \quad (\text{A.34})$$

◊ Ved optælling indser man let, at der er seks mulige kombinationer, hvor en af de elementære vektoreroperatorer gradient, divergens eller rotation virker på forskellige produkter af to skalare eller vektorielle størrelser. Disse kombinationer kan udtrykkes ved de allerede indførte operationer og er sammen med de tidligere omtalte samlet i tabel A.2.

*Sammensatte
udtryk*

Tabel A.2: Sammensatte vektoranalytiske udtryk

$\nabla \cdot \nabla \varphi$	$= \nabla^2 \varphi$	(1)
$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F}$	$= 0$	(2)
$\nabla \times \nabla \varphi$	$= 0$	(3)
$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$	$= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$	(4)
$\nabla(\varphi \psi)$	$= \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi$	(5)
$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})$	$= (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F})$	(6)
$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F})$	$= \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \mathbf{F}$	(7)
$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$	$= (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$	(8)
$\nabla \times (\varphi \mathbf{F})$	$= \varphi \nabla \times \mathbf{F} + (\nabla \varphi) \times \mathbf{F}$	(9)
$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$	$= \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}$	(10)

Specielle differentiationer

Inden for elektromagnetismen møder man meget hyppigt udtryk, som på simpel måde afhænger af den vektorielle afstand $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ mellem et kildepunkt $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ og et målepunkt $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Afhængigt af situationen, kan det ene punkt betragtes som fast, og man kan da udføre differentialoperationer efter det andet punkts koordinater. Med ∇' menes, at differentiationen sker efter (x', y', z') , mens ∇ betyder differentiation efter (x, y, z) . Nedenfor er der samlet nogle nyttige differentialudtryk, som ofte mødes ved anvendelserne. Idet der mindes om, at

*Funktioner
af $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$*

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \quad (\text{A.35})$$

bevises følgende udtryk let ved beregning i koordinater.

$$\nabla \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \nabla \cdot \mathbf{r} = 3. \quad (\text{A.36})$$

$$\nabla' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla \cdot \mathbf{r}' = -3. \quad (\text{A.37})$$

$$\nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{A.38})$$

$$\nabla f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{A.39})$$

Specielt det sidste udtryk er nyttigt. Det siger, at man finder gradienten af funktionen $f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ ved at differentiere f med hensyn til argumentet

$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ og dernæst multiplicere med enhedsvektoren $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Eksempelvis er

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^n} = \frac{-n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{n+1}} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{-n(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{n+2}}. \quad (\text{A.40})$$

Fysisk vigtige
relationer

Yderligere gælder følgende relation, som har stor fysisk betydning:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0, \quad \text{for } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \neq 0. \quad (\text{A.41})$$

Efter Tabel A.2:7 findes jo, at

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (\text{A.42})$$

$$= \frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{3|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} = 0. \quad (\text{A.43})$$

Det er også værd at notere relationerne

$$\nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0, \quad \nabla^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0, \quad \nabla \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mathbf{A}, \quad (\text{A.44})$$

hvor $\mathbf{A}$ er en fast vektor.

Andre integraludtryk

Nye integral-
teoremer

Man får lejlighedsvis brug for andre integralteoremer, som kan udledes fra Gauss' og Stokes' sætninger. Det gælder således *Green's* sætning på formen

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dv = \oint_S (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot \mathbf{n} da. \quad (\text{A.45})$$

Desuden behøver man undertiden de relationer, som er anført i tabel A.3.

Tabel A.3: Integralrelationer

$$\int_S \mathbf{n} \times \nabla \varphi da = \oint_C \varphi d\ell \quad (1)$$

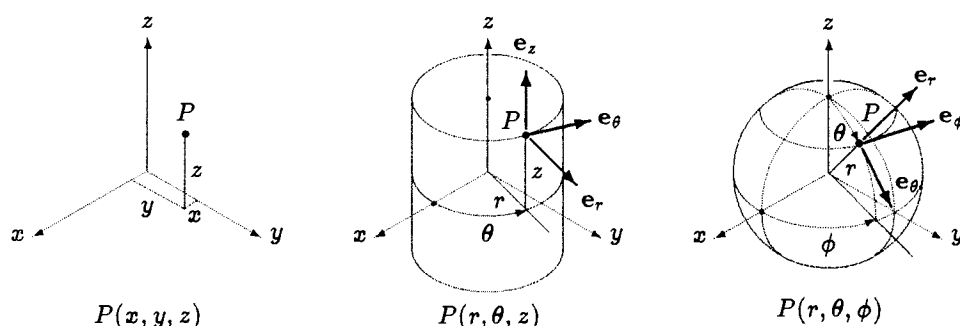
$$\int_V \nabla \varphi dv = \oint_S \varphi \mathbf{n} da \quad (2)$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} dv = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F} da \quad (3)$$

A.2.3 Differentialoperatorer i forskellige koordinatsystemer

Geometri og
koordinater

Geometrien i et forelagt problem indbyder ofte til at anvende andre koordinater end de cartesiske. De elementære differentialoperatorer vi har indført, får da andre ofte mere komplicerede former. Figur A.6 viser det cartesiske, det cylindriske og det sfæriske koordinatsystem. Bemærk, at vektorer i de to sidstnævnte systemer angives i et "lokalt" koordinatsystem, som ændrer sig med det betragtede punkt.



Figur A.6: Cartesiske, cylindriske og sfæriske koordinater.

◇ Cartesiske koordinater: For overskuelighedens skyld medtages her i tabel A.4 de allerede nævnte udtryk for vektoroperatorerne i almindelige cartesiske (rektangulære) koordinater (x, y, z) med enhedsvektorer $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Velkendte koordinater

Lader man henholdsvis én, to eller tre koordinater variere differentielt, fremkommer linieelementer dx, dy og dz , overfladeelementer $dx dy$, $dy dz$ og $dx dz$ eller et volumenelement $dx dy dz$.

◇ Cylindriske koordinater: Betydningen af de cylindriske koordinater (r, θ, z) fremgår af fig. A.6. Azimuth-vinklen i (x, y) -planen, der er betegnet med θ , betegnes også ofte med ϕ . Forbindelsen mellem cylindriske og rektangulære koordinater er

Cylindriske koordinater

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad (\text{A.46})$$

med de omvendte relationer

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z. \quad (\text{A.47})$$

For det lokale koordinatsystem med enhedsvektorer $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ er vektoroperatorerne anført i tabel A.4.

Linieelementerne i cylindriske koordinater bliver $dr, r d\theta$ og dz , overfladeelementet på den cylindriske overflade $r d\theta dz$ og volumenelementet $r dr d\theta dz$.

◇ Sfæriske koordinater: Betydningen af de sfæriske koordinater (r, θ, ϕ) fremgår af fig. A.6. Azimuth-vinklen i (x, y) -planen er her betegnet med ϕ og vinklen mellem z -aksen og radius vektor (polarvinklen) med θ . Forbindelsen mellem sfæriske og rektangulære koordinater er

Sfæriske koordinater

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad (\text{A.48})$$

med de omvendte relationer

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}. \quad (\text{A.49})$$

For det lokale koordinatsystem, med enhedsvektorer $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ er vektoroperatorerne anført i tabel A.4. Bemærk, at $\mathbf{e}_\phi$ er tangent til lillecirklen gennem punktet P .

Linieelementerne i sfæriske koordinater bliver $dr, r d\theta$ og $r \sin \theta d\phi$, overfladeelementet på den sfæriske overflade $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ og volumenelementet $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$.

Tabel A.4: Vektoroperatorer i forskellige koordinater

Cartesiske koordinater:

$$\nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right),$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Cylinderkoordinater:

$$\nabla \varphi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\theta \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right),$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Sfæriske koordinater:

$$\nabla \varphi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi},$$

$$\nabla \times \mathbf{F} =$$

$$\frac{\mathbf{e}_r}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (F_\phi \sin \theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r} \right) + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \left(\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right),$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}.$$

Appendix B

Enheder og relationer

Den internationale Standardiseringsorganisation, ISO, har til opgave at udarbejde Internationale Standarder på en lang række fagområder. Indenfor fysiken er disse standarder på dansk samlet i en overskuelig og pædagogisk håndbog¹. Den danske standard er i videst mulig udstrækning fulgt i nærværende tekst.

ISO-standard

Ifølge standarden er der som symboler for *fysiske størrelser* normalt anvendt enkelte latinske eller græske bogstaver, undertiden forsynet med indices eller andre nærmere specificerende tegn. Disse symboler er sat med kursiv. For vektorstørrelser er der anvendt fed, lodret type. Symboler følges ikke af punktum undtagen som led i normal tegnsætning. Tegnsætningen omfatter her også samtlige formler.

Fysiske størrelser

Når det drejer sig om *enheder*, er der overalt anvendt de vedtagne internationale symboler, eksempelvis m (meter), A (ampere) og Ω . Disse er sat med lodret type. Enhedernes navne skrives med lille begyndelsesbogstav og enhedernes symboler er normalt også små bogstaver, undtagen når enhedens navn er afledt af et personnavn.

Fysiske enheder

De følgende tabeller sammenfatter de i teksten anvendte symboler og enheder og enkelte andre. Desuden er der en tabeller over de vigtigste fundamentale fysiske konstanter samt terrestriske og astronomiske data, som ofte finder anvendelse.

Data

Tabel B.1: Elektromagnetiske enheder med eget navn

Navn	Symbol	Fysisk Størrelse
ampere	A	Elektrisk strøm
coulomb	C	Elektrisk ladning
farad	F	Capacitans
henry	H	Induktans
hertz	Hz	Frekvens
ohm	Ω	Resistans, impedans
siemens	S	Admittans
tesla	T	Magnetisk fluxtæthed
volt	V	Elektrisk potential
weber	Wb	Magnetisk flux

¹Standarder for SI-enheder: Fysiske størrelser, måleenheder og symboler, Håndbog 3, 1. udgave. Dansk Standardiseringsråd 1985.

Tabel B.2: Elektromagnetiske symboler og enheder

Fysisk Størrelse	Symbol	Elektromagnetisk enhed	Grund-enhed
Admittans	Y	$S = \Omega^{-1} = A V^{-1}$	$A^2 kg^{-1} m^{-2} s^3$
Capacitans	C	$F = C V^{-1}$	$A^2 kg^{-1} m^{-2} s^4$
Effekt	P	$W = C V = \Omega A^2$	$kg m^2 s^{-3}$
Elektrisk dipolmoment	p	$C m$	$A m s$
Elektrisk feltstyrke	E	$N C^{-1} = V m^{-1}$	$A^{-1} kg m s^{-3}$
Elektrisk flux	Ψ	C	$A s$
Elektrisk fluxtæthed	D	$C m^{-2}$	$A m^{-2} s$
Elektrisk polarisation	P	$C m^{-2}$	$A m^{-2} s$
Elektrisk potential	φ, V	V	$A^{-1} kg m^2 s^{-3}$
Elektrisk strøm	I	A	A
Fladeladningstæthed	σ	$C m^{-2}$	$A s m^{-2}$
Frekvens	ν, f	Hz	s^{-1}
Impedans	Z	$\Omega = V A^{-1}$	$A^{-2} kg m^2 s^{-3}$
(Selv)Induktans	L	$H = V s A^{-1}$	$A^{-2} kg m^2 s^{-2}$
Konduktivitet	γ	$\Omega^{-1} m^{-1}$	$A^2 kg^{-1} m^{-3} s^3$
Ladning	q	C	$A s$
Linieledningstæthed	λ	$C m^{-1}$	$A s m^{-1}$
Magnetisering	M	$A m^{-1}$	$A m^{-1}$
Magnetisk dipolmoment	m	$A m^2$	$A m^2$
Magnetisk feltstyrke	H	$A m^{-1}$	$A m^{-1}$
Magnetisk flux	Φ	$Wb = V s = T m^2$	$A^{-1} kg m^2 s^{-2}$
Magnetisk fluxtæthed	B	$T = V s m^{-2}$	$A^{-1} kg s^{-2}$
Magnetisk skalarpotential	φ^*	A	A
Magnetisk vektorpotential	A	$T m$	$A^{-1} kg m s^{-2}$
Overfladestrømtæthed	j	$A m^{-1}$	$A m^{-1}$
Permeabilitet	μ	$H m^{-1}$	$A^{-2} kg m s^{-2}$
Permittivitet	ϵ	$F m^{-1}$	$A^2 kg^{-1} m^{-3} s^4$
Poynting vektor	S	$W m^{-2}$	$kg s^{-3}$
Reluktans	$\mathcal{R}$	$H^{-1} = A Wb^{-1}$	$A^2 kg^{-1} m^{-2} s^2$
Resistans	R	$\Omega = V A^{-1}$	$A^{-2} kg m^2 s^{-3}$
Resistivitet	ρ	Ωm	$A^{-2} kg m^2 s^{-3}$
Volumenladningstæthed	ρ	$C m^{-3}$	$A s m^{-3}$
Volumenstrømtæthed	J	$A m^{-2}$	$A m^{-2}$

Tabel B.3: Parametre for den harmoniske bølge

Parameter	Symbol	Dimen- sion	Relation til :			
			λ	ν	k	ω
Bølgelængde	λ	m	λ	$= v/\nu$	$= 2\pi/k$	$= 2\pi v/\omega$
Frekvens	ν	s^{-1}	v/λ	$= \nu$	$= vk/2\pi$	$= \omega/2\pi$
Bølgetal	k	m^{-1}	$2\pi/\lambda$	$= 2\pi\nu/v$	$= k$	$= \omega/v$
Vinkelfrekvens	ω	s^{-1}	$2\pi\nu/\lambda$	$= 2\pi\nu$	$= vk$	$= \omega$

Tabel B.4: Fundamentale fysiske konstanter

Fysisk Størrelse	Symbol	Værdi	Usikkerhed, ppm
Lyshastighed i vacuum	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	eksakt
Vacuumpermeabilitet	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$	eksakt
Vacuumpermittivitet	ϵ_0	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$	eksakt
Gravitationskonstant	G	$6.672\,59 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$	128
Planck konstant	h	$6.626\,075 \times 10^{-34} \text{ J s}$	0.60
Planck konstant	$\hbar$	$1.054\,572\,66 \times 10^{-34} \text{ J s}$	0.60
Elementarladning	e	$1.602\,177\,33 \times 10^{-19} \text{ C}$	0.30
Magnetisk flux kvantum	Ψ_0	$2.067\,834\,61 \times 10^{-15} \text{ Wb}$	0.30
Elektronmasse	m_e	$9.109\,389 \times 10^{-31} \text{ kg}$	0.59
Protonmasse	m_p	$1.672\,623 \times 10^{-27} \text{ kg}$	0.59
Proton-elektronmasseforhold	m_p/m_e	$1.836\,152\,701 \times 10^3$	0.020
Finstruktur konstant	α	$7.297\,353\,08 \times 10^{-3}$	0.045
Rydberg konstant	R_∞	$1.097\,373\,153\,4 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$	0.0012
Avogadro konstant	N_A	$6.022\,136\,7 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	0.59
Faraday konstant	F	$9.648\,530\,9 \times 10^4 \text{ C mol}^{-1}$	0.30
Molar gaskonstant	R	$8.314\,510 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$	8.4
Boltzmann konstant	k	$1.380\,658 \text{ J K}^{-1}$	8.5
Stephan-Boltzmann konstant	σ	$5.670\,51 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	34
Elektronvolt	eV	$1.602\,177\,33 \times 10^{-19} \text{ J}$	0.30
Atommasse enhed	u	$1.660\,540\,2 \times 10^{-27} \text{ kg}$	0.59
		$931.434\,32 \text{ MeV}/c^2$	0.30
Hydrogen grundtilstand	E_0	$13.605\,698 \text{ eV}$	0.30
Bohr radius	a_0	$0.529\,177\,249 \times 10^{-10} \text{ m}$	0.045
Bohr magneton	μ_B	$9.274\,015\,4 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$	0.34

Kilde: E. R. Cohen og B. N. Taylor, Rev. Mod. Phys. 59: 1121 (1987).

Tabel B.5: Terrestriske og astronomiske data

Fysisk Størrelse	Symbol	Værdi
Acceleration i tyngdefelt, standard	g	9.80665 m s^{-2}
Afstand Jorden-Månen, middel		$3.84 \times 10^8 \text{ m}$
Afstand Jorden-Solen, middel		$1.496 \times 10^{11} \text{ m}$
Atmosfæretryk, standard		$1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$
Densitet, luft 0°, 1 atm		1.293 kg m^{-3}
Masse, Jorden	$M_\oplus$	$5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$
Masse, Månen	$M_\lrcorner$	$7.36 \times 10^{22} \text{ kg}$
Masse, Solen	$M_\odot$	$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Radius, Jorden, middel	$R_\oplus$	$6.37 \times 10^6 \text{ m}$
År, siderisk		$3.1558150 \times 10^7 \text{ s}$

Tabel B.6: Præfixer for potenser af 10

Faktor	Præfix	Symbol	Faktor	Præfix	Symbol
10^{-18}	atto	a	10^1	deka	da
10^{-15}	femto	f	10^2	hekto	h
10^{-12}	pico	p	10^3	kilo	k
10^{-9}	nano	n	10^6	mega	M
10^{-6}	micro	μ	10^9	giga	G
10^{-3}	milli	m	10^{12}	tera	T
10^{-2}	centi	c	10^{15}	peta	P
10^{-1}	deci	d	10^{18}	exa	E

Tabel B.7: Det græske alfabet

Alfa	A	α	Iota	I	ι	Rho	P	ρ, ϱ
Beta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	My	M	μ	Ypsilon	Υ	υ
Epsilon	E	ϵ, ε	Ny	N	ν	Phi	Φ	ϕ, φ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Omicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ, ϑ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

Appendix C

Gaussiske enheder

Selv om SI-systemet har vundet indpas overalt, er der stadig områder som atomfysik og faststof-fysik, hvor det tidligere *Gaussiske* enhedssystem hyppigt anvendes. Desuden forekommer Gaussiske enheder selvsagt i hele den ældre litteratur.

*Gaussisk
system i brug*

I det Gaussiske system er grundenhederne cm, g og s og systemet kaldes derfor også for cgs-systemet. I modsætning til SI-systemet er der altså ikke nogen speciel elektrisk grundenhed sådan, at de elektriske enheder alene udtrykkes ved de tre mekaniske grundenheder. Eksempelvis er enheden for elektrisk ladning $1 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1}$, enheden for kapacitans 1 cm og enheden for resistans $1 \text{ cm}^{-1} \text{ s}$. Det er klart, at disse enheders ofte besynderlige dimensioner er uden direkte fysisk indhold.

cgs og SI

Tabel C1 giver omsætningen mellem SI-enheder og Gaussiske enheder for de vigtigste elektriske størrelser. Man kan her bemærke, at i Gauss-systemet har felterne **E**, **D**, **B**, og **D** alle samme dimension. Permittivitet og permeabilitet bliver altså dimensionsløse størrelser.

Omregning

Tabel C.1: Omsætning mellem SI-enheder og Gauss-enheder

Størrelse	SI-enhed	— Gauss-enhed —		Faktor ^a
Kraft	N	dyn	1 cm g s^{-2}	10^5
Energi	J	erg	$1 \text{ cm}^2 \text{ g s}^{-2}$	10^7
Effekt	W	erg/s	$1 \text{ cm}^2 \text{ g s}^{-3}$	10^7
Ladning	C		$1 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1}$	3×10^9
Strøm	A		$1 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-2}$	3×10^9
Potential	V		$1 \text{ cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1}$	$\frac{1}{3} \times 10^{-2}$
Capacitans	F		1 cm	9×10^{11}
Resistans	Ω		$1 \text{ cm}^{-1} \text{ s}$	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$
Induktans	H		$1 \text{ cm}^{-1} \text{ s}^2$	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$
Magnetisk flux	Wb	maxwell	$1 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1}$	10^8
E	Vm^{-1}		$1 \text{ cm}^{-1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1}$	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$
D	Cm^{-2}		$1 \text{ cm}^{-1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1}$	$3 \times 4\pi \times 10^5$
B	$\text{T} = \text{Vsm}^{-2}$	gauss	$1 \text{ cm}^{-1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1}$	10^4
H	Am^{-1}	ørsted	$1 \text{ cm}^{-1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1}$	$4\pi \times 10^{-3}$

^aGauss-enheder per SI-enhed. Multipliser antallet af SI-enheder med den givne faktor for at finde antallet af Gauss-enheder. Tallene 3 og 9 i de foranstillede faktorer, stammer fra lyshastigheden og skal ved nøjagtige beregninger erstattes med $2.997..$ og $(2.997..)^2$.

Andre
ligninger

I det Gaussiske enhedssystem sættes konstanten $k = 1$ (dimensionsløs) i Coulombs lov 2.3 Dette gør ikke blot dimensionerne af de elektriske størrelser bliver helt forskellige fra dimensionerne af SI-størrelserne. Også de elektriske ligninger bliver oftest anderledes. Tabel C2 giver, med henvisning til de oprindelige ligningsnumre, en sammenstilling af de vigtigste elektriske relationer i de to enhedssystemer. Forskellen understreges af Maxwell ligningernes udseende i de to systemer.

Tabel C.2: Vigtige relationer i to enhedssystemer

SI-system	Ligning	Gauss-system
Elektrostatik i vacuum		
$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$	2.9	$F = \frac{qq'}{r^2}$
$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' ^3} \rho(\mathbf{r}') dv'$	2.16	$E = \int_{V'} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' ^3} \rho(\mathbf{r}') dv'$
$E = -\nabla\varphi$	2.27	$E = -\nabla\varphi$
$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' ^3} dv'$	2.32	$\varphi = \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' ^3} dv'$
$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = Q/\epsilon_0$	2.45	$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi Q$
$E = \sigma/\epsilon_0$	2.52	$E = 4\pi\sigma$
$\mathbf{p} = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv'$	2.73	$\mathbf{p} = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv'$
$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$	2.101	$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$
$Q = CV$	2.153	$Q = CV$
$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$	2.154	$C = \frac{A}{4\pi d}$
Dielektrika		
$\mathbf{P} = \Delta\mathbf{p}/\Delta v$	3.2	$\mathbf{P} = \Delta\mathbf{p}/\Delta v$
$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$	3.22	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$
$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \epsilon_r\epsilon_0\mathbf{E}$	3.29	$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \epsilon_r\mathbf{E}$
$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$	3.30	$\epsilon = 1 + \chi$
Elektrostatisk energi		
$U = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dv$	4.13	$U = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dv$
$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv$	4.32	$U = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv$
Elektrisk strøm		
$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$	5.8	$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$
$\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$	5.10	$\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$
$\frac{dP}{dv} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$	5.38	$\frac{dP}{dv} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$
Det magnetiske felt		
$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' ^3} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'$	6.10	$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' ^3} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'$
$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	6.17	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c)$
$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'$	6.40	$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'$
$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$	6.59	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

Tabel C.2: Vigtige relationer i to enhedssystemer

SI-system	Ligning	Gauss-system
Induktion		
$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$	7.4	$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$
$\Phi = LI$	7.14	$\Phi = LI$
$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$	7.19	$L = \frac{4\pi N^2 A}{c^2 \ell}$
Magnetika		
$M = \Delta m / \Delta v$	8.2	$M = \Delta m / \Delta v$
$H = \frac{1}{\mu_0} B - M$	8.21	$H = B - 4\pi M$
$\oint H \cdot d\ell = I$	8.25	$\oint H \cdot d\ell = \frac{4\pi}{c} I$
$B = \mu H$	8.28	$B = \mu H$
$\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$	8.29	$\mu = 1 + \chi_m$
Magnetisk energi		
$U = \frac{1}{2} LI^2$	10.6	$U = \frac{1}{2} LI^2$
$U = \frac{1}{2} \int A \cdot J dv$	10.25	$U = \frac{1}{2c} \int A \cdot J dv$
$u = \frac{1}{2}(E \cdot D + H \cdot B)$	10.33	$u = \frac{1}{2}(E \cdot D + H \cdot B)/4\pi$
Maxwells ligninger		
$\nabla \cdot D = \rho$	12.11	$\nabla \cdot D = 4\pi\rho$
$\nabla \cdot B = 0$	12.12	$\nabla \cdot B = 0$
$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	12.13	$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$
$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$	12.14	$\nabla \times H = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$
$S = E \times H$	12.29	$S = \frac{c}{4\pi} E \times H$
Elektromagnetiske bølger		
$\nabla^2 E - \gamma\mu \frac{\partial E}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$	13.41	$\nabla^2 E - \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$
Elektromagnetisk stråling		
$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$	14.5	$E = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$
$\nabla \cdot A + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$	14.14	$\nabla \cdot A + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
$\nabla^2 A - \epsilon\mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J$	14.15	$\nabla^2 A - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} J$
$\nabla^2 \varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$	14.18	$\nabla^2 \varphi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon}$
$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\ddot{p}^2}{c^3}$	14.71	$P = \frac{2}{3} \frac{\ddot{p}^2}{c^3}$

Register

- A-vektor 123
- Admittans 276
- Afmagnetisering 156
- Afskæringsfrekvens 284
- Aksialsymmetri 30, 36
- Aktion og reaktion 8, 114
- Ampere (A) 8
 - definition 111
- Ampere-vindinger 127
- Ampère, A.M. 1, 109, 121
- Ampères lov 125, 152, 222
- Analytisk funktion 40
- Arbejdspunkt 186
- Atommodel 73
 - diamagnetisk susceptibilitet 159
 - for permittivitet 73
 - paramagnetisk susceptibilitet 162
- B-felt 111
- Batteri 101
- Betatron 135
- Bevarelse 5
 - energi 97, 190, 225
 - ladning 5, 89
- Bevarelseslove 114
- Biot og Savarts lov 112, 118
- Birkelands kanon 199
- Bohr-magneton 160, 165
- Bølge 227
 - elektromagnetisk 227
 - grubehastighed 284
 - harmonisk 229, 310
 - i pladeleder 284
 - komplex 237
 - monokromatisk 236
 - plan 230
 - plan, harmonisk 235
 - på transmissionslinie 278
 - TE, TM og TEM 285
- Bølgfunktion 169
- Bølgeleder 281
 - cirkulær 291
 - generel teori 288
 - modus 286
 - rektangulær 285, 289
- Bølgeligning 227
 - med kilder 246
- Bølgevektor 238
 - retning af 238
- χ , susceptibilitet 60
- Capacitans 45
 - i parallel 47
 - med dielektrikum 63
 - til jord 50
 - i serie 47
- Capacitanskoefficienter 49, 80
- Capacitor 45
- Cauchy-Riemann relationer 40
- Celle 101
 - Daniell 102
 - elektrokemisk 101
- Cirkulation, af vektorfelt 299
- Coaxialkabel 46, 280
 - capacitans af 46
 - induktans af 138
- Coulomb (C) 8
- Coulomb, C.A. 7
- Coulombbetingelse 124
- Coulombs lov 7, 110
- Coulombs lov 7
- Curie, P. 148
 - temperatur 148
 - lov 164
- Cylinder 35
 - harmoniske funktioner 36
 - kondensator 35
 - koordinater 35, 36, 307
 - magnetiseret 148, 182
 - capacitans 45
- $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 302
- D-vektor 59
- DC, direct current 104
- Delcapacitans 49
- Demagnetisering 180
- Depolarisation 70
- Diamagnetisme 147, 159
 - mikroskopisk teori 159
- Dielektricitetskonstant 60

- Dielektrika 18, 53, 60
 - energi i 77
 - felt i 53, 57
 - i kondensatorer 63
 - lineære 60
 - molekylær teori 71
 - teori for 55
- Differentiel form 17
- Dipol 26
 - elektrisk 257
 - feltstyrke fra 27, 129
 - Hertz 250
 - i ydre felt 28
 - magnetisk i ydre felt 165
 - magnetisk 179, 257
 - oscillerende 250
 - potential 55
 - vektorpotential 128
- Dipolmoment 26
 - elektrisk 26, 53
 - induceret 72
 - magnetisk 128, 147, 148, 159
- Dipolstråling 251, 258
- Dispersion 236
- Divergens 302
 - teorem 16, 56, 302
- Dobbeltlag, elektrisk 20
- Dæmpning 228
 - i kredsløb 208
- ϵ , permittivitet 60
- ϵ_0 , vacuumpermittivitet 9
- Effekt 96
 - i leder 96
 - relativistisk 267
 - tæthed 97
- Ekvipotentialflade 15, 44
- Ekvivalentdiagram 276
- Elektret 60
- Elektrisk ladning 5
- Elektrisk strøm 88
 - definition 88
 - stationær 89
 - ydre egenskaber 109
- Elektrolyt 102
- Elektrolytisk kar 96
- Elektromagnetisk bølge 235
 - i dielektrikum 235
 - i leder 242
 - spektrum 235
- Elektromagnetisme 1
- Elektromotorisk kraft 87, 99, 189
 - definition 100
 - eksempler 101
- Elektroner 5, 87
 - banebevægelse 159
 - bevægelse 87
 - bundne 18
 - drift 87
 - frie 18
 - hastighed i leder 87
 - ladning af 5
 - magnetisk moment 159
- Elektrostatisk linse 36
- Elektrostatiske billeder 42
- Elementarladning 5
- Emk 100
 - induceret 132, 136, 139
- Energi 75
 - af ladningsfordeling 78
 - af strømfordeling 193
 - elektrokinetisk 191
 - elektropotentiell 191
 - elektrostatisk 76
 - i dielektrikum 77
 - i elektrisk felt 81
 - i elektromagnetisk felt 224
 - i felt 75
 - i ferromagnetika 199
 - i kondensator 79
 - i magnetisk felt 195
 - i resonator 294
 - i selvinduktans 190
 - ladede ledere 79
 - magnetostatisk 189
 - potentiell 15
 - ved transient 210
- Energibegreb 75
- Energistrøm 224
- Energitæthed 83
 - i elektrisk felt 83
 - i elektromagnetisk felt 195
 - i magnetisk felt 195
- Enheder 8
 - cgs
 - gaussiske 313
 - SI 8, 309, 313
- Enkeltlag 19
- Entydighed 32
 - af felt 68
 - af potential 32
 - af vektorpotential 124
- Farad (F) 9, 45
- Faraday, M. 1, 131, 147
- Felt 10, 109
 - elektromagnetisk 10
 - fra fladeladning 10

- konservativt 15, 57
 - magnetisk 109
 - magnetostatisk 173
 - makroskopisk 71, 148
 - mikroskopisk 71
- Feltlinier 11, 23
 - bølgeleder 287
 - differentialligning 11
 - E og D 67
 - magnetiske 119
 - synlige 96
 - tæthed af 24
- Feltstyrke 10
 - elektrisk 10
 - fra volumenladning 10
 - i dielektrika 57
 - magnetisk 126, 152
- Ferromagnetisme 148, 155
 - mikroskopisk teori 168
- Firehastighed 266
- Fireimpuls 266
- Firestrømtæthed 272
- Firevektor 266
- Fjernfelt 253
- Fjernvirkning 10
- Flux 122
 - elektrisk 59
 - magnetisk 112, 122
- Fluxlinierør 66, 122
- Fluxtæthed 112
 - elektrisk 59
 - magnetisk 112
- Forskydningsstrøm 221, 228
- Franklin, B. 5
- Frekvens 284
 - kritisk 284, 287
- Fysik 1
 - klassisk 1
- $\nabla\varphi$ 301
- g-faktor 164
- Galvanometerspole 117
- Gauge 124
- Gauss' lov 16, 59, 121
 - anvendelser af 21
 - bevis for 16
 - for magnetfelt 122, 152
 - i dielektrikum 58
- Gauss' sætning 16, 302
- Gauss, K.F. 1
- Gauss-dåse 19, 65
- Gauss-flade 16, 19, 59
- Gaussiske enheder 313
- Generator 101
 - elektrostatisk 101
 - konstantstrøms- 197
 - vekselstrøm 135
- Gennemslag, elektrisk 60
- Gitterpunkt 71
- Godhed Q 210
 - af hulrumsresonator 293
- Gradient 301
- Gradientfelt 13
- Gren 104
- Grænsebetingelser 36
 - E og D 65
 - J 93
 - potential 66
 - ved leder 232
 - B og H 174
 - D, B, E, H 231
- Græsk alfabet 312
- Gyromagnetisk koefficient 159, 164
- H-felt 152
- H-vektor 126
- Harmoniske funktioner 32
- Helmholtz spoler 120
- Henry (H) 110, 136
- Henry, J. 131, 136
- Hulrum 63
 - cylindrisk 63
 - elektrisk felt i 63
 - sfærisk 64
- Hulrumsresonator 291
 - energi og effekt 293
- Hund's regel 169
- Hvirvelstrøm 135
- Hysteres 155
 - kurve 155, 200
- Højpasfilter 284
- Impedans 212
 - fordelt 276
 - i parallel 213
 - i serie 213
 - indgangs- 279
 - karakteristisk 278
 - polar form 215
 - serie 277
 - shunt- 277
- Impedanstilpasning 279
- Impedanstrekant 215
- Impulsbevarelse 114
- Impulsmoment 147
 - elektron 159
 - kvantisering 164
- Indfaldsvinkel 283
- Indtrængningsdybde 243

- Induktans 136
 - gensidig 139
 - i parallel 143
 - i serie 143
 - og energi 192
 - selv- 136
 - ulighed for 193
- Induktanskoefficient 139
- Induktion 131
 - elektromagnetisk 131
- Induktionsloven 131
- Induktor 142
- Influenskoefficienter 49
- Integral form 17
- Integral 299
 - flade 299
 - kurve- 299
 - linie- 299
 - rum- 299
- Invarians 264
 - af ladning 264
 - af skalarprodukt 266
 - Maxwell ligninger 271
- Isolatorer 18
- J-vektor 88
- Jomfrukurve 156
- Joule-varme 97, 190, 225
- Karakteristisk impedans 278
- Karakterligning 204
- Kildeladning 8
- Kildepunkt 8
- Kirchhoff, G.R. 104
- Kirchhoffs love 104, 142, 189
 - jævnstrøm 104
 - magnetkreds 185
 - vekselstrøm 204
- Knude 104
- Kobling 139
 - magnetisk 139, 191
 - til resonator 293
- Koblingskoefficient, magnetisk 140
- Koercitivkraft 156
- Komponenter 103
 - aktive 103
 - C 45, 202
 - ideelle 202
 - L 202
 - L, M 142
 - passive 103, 201
 - R 92, 202
- Kondensatorer 45
- Konduktivitet 90
- Konform afbildning 40
- Konstanter 311
- Kontinuitetsligning 89, 93, 226
- Koordinater 306
 - cartesiske 306
 - cylindriske 306
 - sfæriske 306
- Kraft 7
 - elektrisk 7
 - flere punktladninger 9
 - i elektrostatik 84
 - i magnetostatik 197
 - Lorentztransformation 267
 - magnetisk 109, 113
 - mellem strømme 110
 - på lederoverflade 83
 - på strømkreds 115
 - relativistisk 267
 - udvekslings- 168
- Kraftlov 7, 110
 - elektrisk 7
 - magnetisk 110
- Kraftmoment 84, 197
 - på strømkreds 115
 - magnetisk 199
- Kredse 139
 - lineære 139, 195
- Kredsløb 103
 - elektrisk 103, 275
 - jævnstrøms- 104
 - lineære 139
 - magnetisk 184
- Kronecker-symbol 29
- Krystalgitter 71
- Kugle 38
 - capacitans 46, 50
 - dielektrisk 69
 - ledende i felt 38
 - magnetiseret 180
- Kuglebølge 249
- Kuglekondensator 35
 - capacitans 45
- Kvadratisk form 80
- Kvanteelektrodynamik 1
- Kvanteteori 73
 - for permittivitet 73
- Kvantisering 5, 164
 - af energi 165
 - af ladning 5
- Kvasistationaritet 201
- Kvasistationær strøm 189
- Ladning 5
 - accelereret 260
 - additivitet 6

- bevarelse 5, 89
- fri og bunden 56
- Ladningsbærer 88
- Ladningstæthed 6
 - polarisations- 56
 - transformation af 264
- Landé-faktor 164
- Langevin P. 162
- Langevin teori 162
- Laplaceligningen 32, 69, 179
 - i dielektrika 68
 - i leder 93
 - løsning af, ff 34
- Laplaceoperator 304
- Larmfrekvens 160
- Leder 6, 18, 232
 - cirkulær 119
 - induktion i 133
 - magnetfelt om 119
 - perfekt 232
 - retlinet 119
 - ladning på 19
 - magnetisk kraft på 109
 - feltstyrke i 20
 - feltstyrke ved 20
 - kraft på 21
- Ledning 88
- Ledningselektroner 18
- Legendre polynomier 30, 38
- Lenz' lov 131, 136
- Lineære kredse 190, 192
- Linieelement 208, 307
- Linieledning 22
- Logaritmisk decrement 210
- Lorentz, H.A. 113
 - forkortning 264
- Lorentzbetingelse 247
- Lorentzkraft 113, 224, 269
- Lorentztransformation 266
 - elektromagnetisk felt 270
- Lyshastighed 110, 227, 229
- μ_0 110
- M-vektor 148
- Magnet 185
 - permanent 185
- Magnetfelt 109
 - beregning af 118
 - fra bevægede ladninger 113
 - fra strøm 111
 - kilder til 121
- Magnetika 147
 - felt i 151
 - i spole 198
- kraft på 198
- lineære 153
- permanente 179
- teori for 150
- Magnetisering 148
 - arbejde ved 200
 - mætning 167
 - paramagnetisk 167
 - remanent 156
- Magnetiseringskurve 155
- Magnetisk moment 5, 117
- Magnetisk 174
 - feltstyrke 152
 - kredsløb 184
 - kvantetal 165
 - ladning 177
 - moment 159
 - skalarpotential 174
 - undertilstand 165
- Magnetomotorisk kraft 185
- Magnetostatik 173
- Maske 104
- Maskestrøm 107
- Materialeligninger 60, 153, 223
- Materialer 60
 - anisotrope 60
 - dielektriske 60
 - ferromagnetiske, tabel 158
 - lineære 237
 - magnetiske 153, 179
- Maxwell ligning 2, 223
 1. 18, 59, 68
 2. 122
 3. 13, 68, 133
 4. 125, 221
 - invariants af 271
 - plan bølge 236
- Maxwell, J.C. 1
- Modus 283
- Molekyler 53
 - magnetisk moment 161
 - polare 53
 - polariserede 53
- Monopolfelt 26
- Multipolfelt 25, 127
 - elektrisk 25
 - magnetisk 127
- Multipolstråling 255
- Mætning 156
 - magnetisk 156
- Måleladning 8, 10
- ▽ 300
- Neumanns formel 141

- Neutralitet, elektrisk 6
- Niveauflade 298
- Normalpotentialer 102
- Nærfelt 253
- Nærvirkning 10
- Ω , resistans 90
- Octupol 26
- Ohm (Ω) 90
- Ohms lov 90
 - lukket kreds 100
 - vekselstrøm 212
- Overfladeelement 307
- Overfladeladning 54
 - på dielektrikum 54
- Overfladestrøm 149
- P-vektor 54
- Parallele ledere 43
- Paramagnetisme 147
 - mikroskopisk teori 161
- Pauliprincip 169
- Permeabilitet 110, 154, 157
 - relativ 154
 - tabel 154
 - vacuum 110
- Permittivitet 60
 - og lyshastighed 110
 - relativ 61
 - tabel 61
- Pladekondensator 22
 - capacitans 45
 - E- og D-linier 67
 - felt med dielektrikum 62
 - feltstyrke i 23
 - konform afbildning 41
 - kraft på dielektrikum 86
 - ledende materiale i 95
 - med dielektrikum 83
 - og Poynting vektor 226
 - potential i 34
- Pladeleder 281
- Poissons ligning 32, 68, 177
- Polarisabilitet 72
- Polarisation af bølge 238
 - cirkulær 240
 - elliptisk 239
 - lineær 238
 - tilstand 240
- Polarisation 53, 59
 - fastfrosset 64, 70
 - magnetisk 154
- Polarisationsladninger 56
- Polspænding 100
- Potential 13
 - dipol- 27
 - elektrisk 13, 25
 - elektromagnetisk 245
 - flertydighed 246
 - med dielektrikum 56
 - nulpunkt 14
 - quadrupol 29
 - retarderet 250
 - vektor- 123
- Potentialkoefficienter 48, 80
- Poynting vektor 225
- Præfix 312
- Punktdipol 27
- Punktladning 7, 21
 - felt fra 12
 - i dielektrikum 61
 - kraft mellem 7
 - magnetfelt fra 115
 - og kugle 43
 - over ledende plan 43
- Quadrupol 26
- Quadrupol-linse 41
- Quadrupolmoment 29
- Quark 5
- r-vektor 8
- $\nabla \times \mathbf{F}$ 303
- Randbetingelser 33, 68
- Reaktans 213
 - capacitiv 216
 - induktiv 216
- Referencepunkt 14, 75
- Referencesystem 113, 263
- Reflektion 278
- Reflektionskoefficient 278
- Refraktionsindex 236
- Relativitet 114
 - af felter 114, 263
 - af induktion 134
- Relativitetsteori 1, 114, 263
- Relaxationstid 98
- Reluktans 185
- Remanens 156
- Resistans 90, 104
 - analogi til capacitans 94
 - i parallel 92, 104
 - i serie 104
 - i vekselstrømskreds 213
- Resistivitet 90
 - tabel 91
- Resistor 92
- Resonans 219
 - frekvens 291
- Resonansfrekvens 210, 219, 293

- Resonator 291
 kubisk 295
 rektangulær 291
Retarderet potential 250
Retarderet tid 249
Ringladning 11
Rotation 303
Rotationsfrihed 57
 elektrisk felt 13
- S, Poynting vektor 225
Sekundær parameter 279
Selvinduktans 136
 differentiel 136
 energi i 190
 indre 144
 tynd leder 143
Separation af variable 37
Sfærisk ladningsfordeling 21
Sfæriske koordinater 37
SI-enheder 8, 309
Singularitet 11
Skalar 297
 -felt 298
 definition 297
 produkt 297
Skalarpotential 13
 dynamisk 245
 magnetisk 176
 firevektorer 266
Solenoider 120
 felt i 127
 lang 138
 magnetfelt i 121
 med magnetikum 196
 ringformet 137, 140
 elektromagnetisk 235
Spin 159
 -bølgefunktion 169
Spole 116, 137
 felt i 120
 galvanometer- 117
 Helmholtz 120
 kraft på 116
 lang 127
 roterende 134
 torus 137
Spænding 15
 elektrisk 15
Stokes' sætning 303
Strøm 18
 bunden 149
 elektrisk 18
 fri 149
 magnetiserings- 149
 transport- 149
Strømfordeling 112
 magnetfelt fra 112
Strømlinier 93, 193
Strømtæthed 88
 definition 88
Strømvægt 111
Stråling 245
 elektromagnetisk 245
Strålingsfelt 254
Strålingsresistans 254
Superledning 91
Superposition 48
 af potentialer 33
 magnetisk 153
Susceptibilitet 60, 71
 diamagnetisk 161
 magnetisk, tabel 154
 paramagnetisk 164
 tensor 154
Symboler 310
- Taylorudvikling 37
 af elektrisk potential 37
 af vektorpotential 127
Telegrafligning 277
Temperaturkoefficient 91
Tensorer 61
Tesla (T) 112
Tidskonstant 206
Transient 205
Transmissionslinie 275
 tabsfri 280
Tripelprodukt 298
- Udbredelses-konstant 277
- Vekselstrøm 135
 generator 135
 komplex 211
 sinusformet 211
 som vektorer 215
 stationær 204
Vektor 297
 -felt 298
 definition 297
 komplex 237
 produkt 298
 rumprodukt 298
 tripelprodukt 298
Vektoranalyse 297
Vektordiagram 216
Vektorpotential 123, 150
 dynamisk 245

Vinkelfordeling 254

Volt (V) 10, 15

Volta, A.G. 15

Volumenelement 307

Volumenladning 6, 56
i dielektrikum 56

Weber (Wb) 122

Zonale funktioner 38

Ørsted, H.C. 1