ELEMENTARPARTIKELFYSIK

Forelæsningsnoter

Jens Lyng Petersen

Denne bog / forelæsningsnote er blevet digitaliseret af Martin Skogstad-von Qualen, og er en del af et projekt der har til formål at gøre tekster, forfattet af danske fysikere, tilgængelige for offentligheden. Teksterne, der hovedsageligt skrevet i 90erne, blev anskaffet i så fine udgaver som muligt, hvorefter de blev skannet på en fotokopimaskine i en opløsning på 600 dpi (S/H) i tiff format. De skannede billeder dannede så udgangspunkt for en pdf-fil, hvorpå der blev udført elektronisk tekstgenkendelse (OCR).
Bookmarks og links blev herefter tilføjet for at lette navigationen i dokumenterne. Andre af teksterne var tilgængelige i digital form, således at kun bookmarks er tilføjet.
Projektet blev startet i november 2018 og omkring juni 2019 var alle bøger / noter klar til at blive lagt op på www.nbi.ku.dk.

Skulle nogen have spørgsmål til projektet kan Martin kontaktes på martinskogstad@gmail.com

En stor tak til professor emeritus Henrik Smith som også er forfatter til flere af bøgerne, og til lektor i fysik ved NBI Jens Paaske for samarbejde, opmuntring, valg af materiale og lån af fine eksemplarer af værkerne.

Københavns Universitet
Niels Bohr Institutet
3. rev. udgave
Forår 1994

Indhold

Kapitel 1

DEN RELATIVISTISKE SPREDNINGSPROCES

1.1 Relativistisk kinematik

I dette kapitel[1] skal vi beskrive spredningsprocesserne kinematisk. Vi drøfter Lorentz-transformationen i et simpelt sprog, der bygger på firevektorer og invarianter. Forudsætningen for at forstå det følgende er kendskab til de specielle Lorentz-transformationer.

Kapitel 1 er i højere grad end nogen andre kapitler i disse noter, et "service-kapitel", der indeholder en systematisk gennemgang af kinematiske aspekter. Ikke alle dele er lige afgørende for forståelsen af resten af noterne. Det anbefales, at man særlig gør sig fortrolig med afsnittene:

1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4, 1.2, 1.3, 1.4,

og så iøvrigt benytter kapitlet til tilbageslag.

Visse formler vil spille en gennemgående rolle i resten af kurset. Det gælder (1.38), (1.43), (1.123), (1.134).

1.1.1 Den fire-dimensionale notation

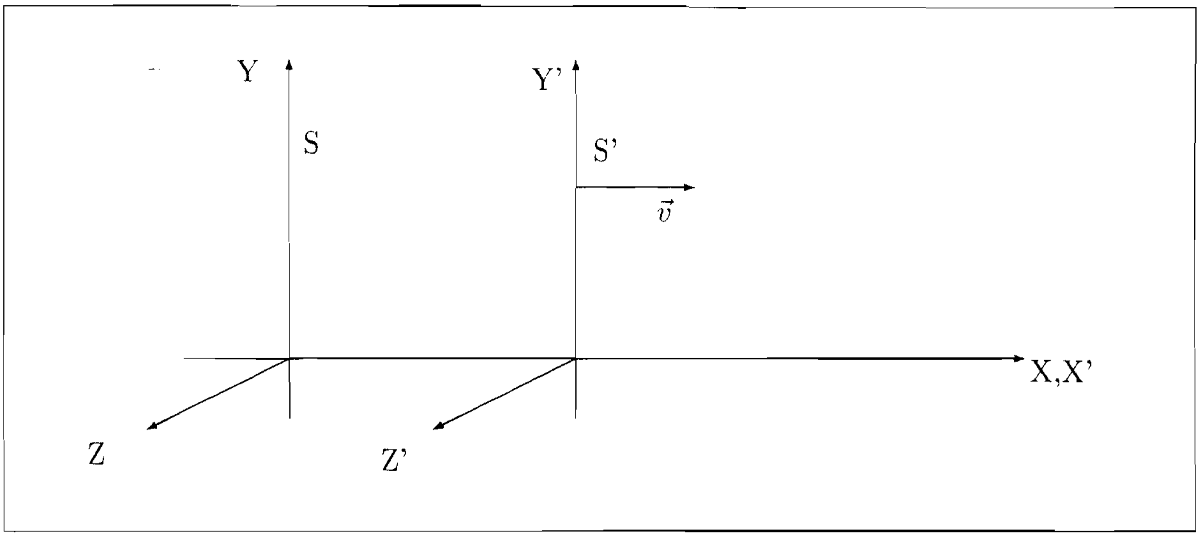
Forbindelsen mellem de rum-tidslige koordinater (t, x, y, z) og (t', x', y', z') for samme begivenhed set fra inertialsystemerne S og S' er givet ved de *specielle* Lorentz-transformationer

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{xv}{c^2}\right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

Her bevæger S' sig langs den positive x-akse i S med hastighed v. Det er forudsat, at akserne i S' er parallelle i de tilsvarende akser i S, og at begyndelsespunkterne i S og S' falder sammen til tiden $t = 0$ (se fig. (1.1), næste side). Konstanten c er lyshastigheden i

[1] Dette kapitel er forfattet af Poul Olesen o. 1973. Enkelte ændringer senere tilføjet.



Figur 1.1:

vakuum. I det følgende simplificerer vi notationen ved at sætte

$$c = 1 \tag{1.3}$$

Alle hastigheder måles således relativt til lyshastigheden.

Ved benyttelse af (1.1) ses ved ved en simpel regning, at

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{1.4}$$

Den kvadratiske form

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

er således invariant under de specielle Lorentz-transformationer. Dette er analogt med, at

$$x^2 + y^2 + z^2$$

er invariant under sædvanlige rotationer. Vi kan derfor betragte Lorentz-transformationer som rotationer i et fire-dimensionalt rum. På grund af minustegnene i (1.4) er dette rum imidlertid ikke sædvanligt euklidisk. Vi kalder det for Minkowski rummet.

Indfører vi betegnelserne

$$x^0 = t \quad , \quad x^1 = x \quad , \quad x^2 = y \quad , \quad x^3 = z \tag{1.5}$$

er ethvert punkt i rum og tid karakteriseret ved en fire-dimensional vektor

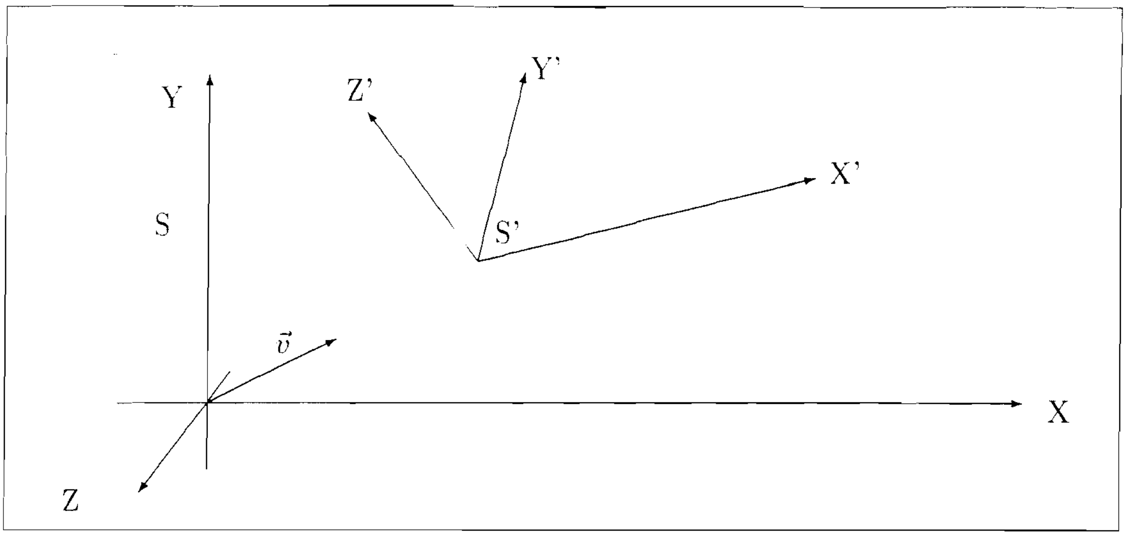
$$x = \{x^\mu\} \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

Vi benytter den konvention, at græske indeks går fra 0 til 3, mens latinske kun går fra 1 til 3. Symbolet

$$\vec{x} = \{x^i\} = (x, y, z)$$

er den sædvanlige tre-dimensionale vektor, og firevektoren x skrives ofte som

$$x = (t, \vec{x}) = (x^0, \vec{x})$$



Figur 1.2:

Lorentz-transformationen (1.1) er en fire-dimensional lineær transformation af formen

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{1.6}$$

med transformationsmatricen

$$\{\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Den kvadratiske form, kaldet kvadratet på x,

$$x^2 \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = t^2 - \vec{x}^2 \tag{1.8}$$

er - som tidligere nævnt - invariant under den specielle Lorentz-transformation (1.6), dvs

$$x^2 = x'^2 \tag{1.9}$$

Relationen (1.9) er imidlertid mere generel. Man kan vise, at den mest generelle Lorentz-transformation mellem to inertialsystemer S og S' (se fig. (1.2)), hvis nulpunkt falder sammen til $t = 0$, er af formen (1.6) og tilfredsstiller invariansen (1.9).

Omvendt kan man vise, at enhver transformation af *formen* (1.6), som lader x^2 invariant og som har positiv determinant, $\det|\Lambda^{\mu}{}_{\nu}| > 0$ og $\Lambda^0{}_0 > 0$, kan interpreteres som en Lorentz-transformation mellem to inertialsystemer. Hvis $\det|\Lambda^{\mu}{}_{\nu}|$ og $\Lambda^0{}_0$ ikke nødvendigvis er positive, taler vi om Lorentz-transformationer med rum- og tidsreflektioner.

1.1.2 Gymnastik med Lorentz-indekser

Vi indfører nu den berømte summationskonvention: Hvis et indeks optræder to gange i et udtryk (nemlig én gang for oven og én gang for neden), skal vi summere over indekset. Vi kan da skrive (1.8) som

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \tag{1.10}$$

hvor den såkaldte metriske tensor $g_{\mu\nu}$ er givet ved

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= 0 \qquad \text{for} \qquad \mu \neq \nu \\ g_{00} &= 1 \ , \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Det er også bekvemt at definere

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{1.12}$$

Den nye vektor x_μ har komponenterne

$$x_0 = x^0 \qquad x_i = -x^i \tag{1.13}$$

Lign. (1.10) kan så skrives

$$x^2 = x^\mu x_\mu \tag{1.14}$$

Definerer vi nu

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \tag{1.15}$$

fås

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = g^\mu_\nu \equiv \delta^\mu{}_\nu \equiv \begin{cases} 1 & \text{for} \quad \mu = \nu \\ 0 & \text{for} \quad \mu \neq \nu \end{cases} \tag{1.16}$$

og

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \tag{1.17}$$

Af (1.12) og (1.17) ses, at $g^{\mu\nu}$ *løfter* indekset, mens $g_{\mu\nu}$ *sænker* indekset på x^μ. Vi skal benytte $g^{\mu\nu}$ og $g_{\mu\nu}$ til at løfte og sænke indeks, ikke blot på x men på ethvert symbol med sådanne indeks.

Det gælder således fx, at

$$\Lambda^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\lambda g^{\lambda\nu}$$

således at lign. (1.6) kan skrives

$$x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x^\nu \tag{1.18}$$

Hvis vi omvendt løfter indeks, fås

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda^{\mu\nu} x_\nu \tag{1.19}$$

Ved hjælp af disse to ligninger kan vi udtrykke invariansen af kvadratet på x, lign. (1.9), ved

$$(x')^2 = \Lambda^{\mu\rho} x_\rho \Lambda_{\mu\sigma} x^\sigma = x_\rho x^\rho$$

hvor (1.18) er benyttet. Dette viser, idet x er en vilkårlig firevektor, at

$$\Lambda^{\mu\rho} \Lambda_{\mu\sigma} = \delta^\rho{}_\sigma \tag{1.20}$$

Denne ligning kan benyttes til at finde den inverse transformation

$$x_\nu = x'_\mu \Lambda^\mu{}_\nu \tag{1.21}$$

Lad os dernæst finde, hvorledes differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

transformerer. Fra (1.21) haves

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

Ved sammenligning med (1.19) ses, at $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ transformerer på samme måde som vektoren x^μ (og ikke som x_μ). Man indfører derfor ofte symbolet

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{1.22}$$

Ved at sænke indekset fås en vektor ∂_μ med komponenter

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial t} \qquad \partial_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} = +\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \text{altså } \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{1.23}$$

1.1.3 Firevektorer

Ethvert sæt af fire størrelser a^μ, der transformerer på samme måde som x^μ, kaldes en *firevektor.* Ved hjælp af $g_{\mu\nu}$ kan vi altid konstruere den til a^μ svarende vektor a_μ (a^μ og a_μ omtales som firevektorens kontravariante henholdsvis kovariante komponenter). Vi har altså ifølge definitionen

$$a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu \tag{1.24}$$

Det skalære produkt af to firevektorer a^μ og b^μ defineres som

$$ab = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a_0 b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b} \tag{1.25}$$

Udfra ortogonalitetsbetingelsen (1.20) fås, at produktet ab er invariant under Lorentz-transformationer. Specielt er $a^2 = a_\mu a^\mu$ en invariant.

En af de vigtigste firevektorer er *fireimpulsen* p for en partikel med masse m og hastighed v. Man har

$$\begin{aligned} p^0 &= p_0 \equiv E = m\gamma \\ \vec{p} &= m\gamma\vec{v} \quad , \quad \gamma = (1-\vec{v}^{\,2})^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1.26}$$

Komponenten p_0 er partiklens totalenergi. Det bemærkes, at

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E} \tag{1.27}$$

Kvadratet på fireimpulsen findes udfra (1.26),

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 = \text{invariant} \tag{1.28}$$

1.1.4 Systemer med to partikler

Lad os betragte et system (fig. (1.3)) bestående af to partikler a og b med masser m_a og m_b. Lad fire-impulserne være p_a og p_b. Et sådant system forekommer i spredningsprocesser før partiklerne er kommet i vekselvirkning og i sluttilstanden i processer, hvor en partikel henfalder til to partikler. De eneste Lorentz-invarianter, vi kan konstruere ud fra de to firevektorer p_a og p_b, er

$$p_a^2 = m_a^2 \quad , \quad p_b^2 = m_b^2$$

samt $p_a p_b$. Af disse har kun $p_a p_b$ kinematisk interesse. Partiklerne siges at være på *masseskallen*, når $p_a^2 = m_a^2$ og $p_b^2 = m_b^2$.

I stedet for invarianten $p_a p_b$ er det sædvane - og også mere bekvemt - at indføre den invariante størrelse

$$s = (p_a + p_b)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2p_a p_b \tag{1.29}$$

Brugen af s er naturligvis knyttet til den kendsgerning, at den totale fireimpuls $p_a + p_b$ er bevaret i spredningsprocesser.

To inertialsystemer er af speciel interesse, nemlig *tyngdepunktsystemet* (center of momentum system) CM, der er karakteriseret ved, at den totale 3-impuls er nul, dvs:

$$\text{CM:} \quad \vec{p}_a^{\,CM} + \vec{p}_b^{\,CM} = \vec{0} \tag{1.30}$$

og *laboratoriesystemet* (Lab), der er karakteriseret ved, at en af partiklerne, b fx, er i hvile, dvs

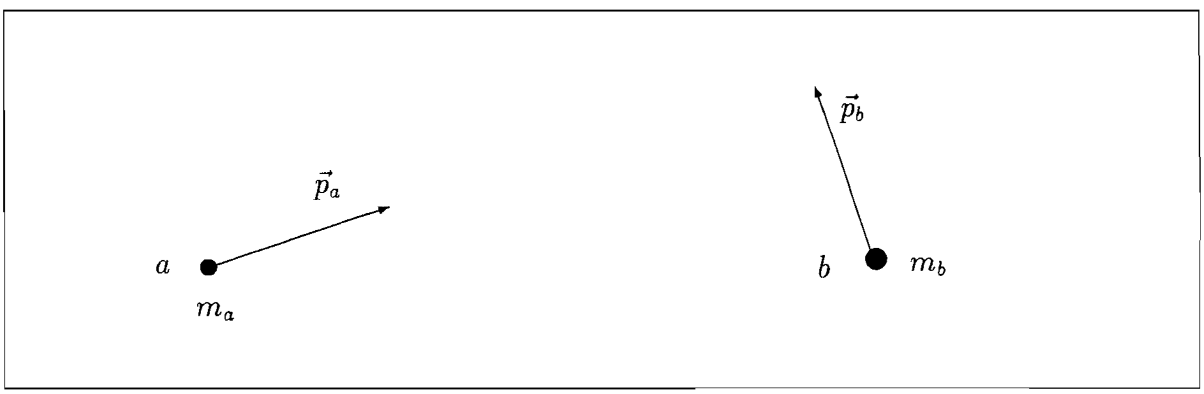
$$\text{Lab:} \quad \vec{p}_b^{\,Lab} = \vec{0} \tag{1.31}$$

Det er forudsat, at $m_b \neq 0$ (en masseløs partikel har intet hvilesystem). I praksis kommer man ofte ud for at skulle udtrykke CM-størrelser i laboratoriet og omvendt. Det udføres nemmest ved at benytte, at s i lign. (1.29) har samme værdi i begge systemer. Fra (1.30) fås

$$s = W^2 \tag{1.32}$$

hvor

$$W = E_a^{CM} + E_b^{CM} \tag{1.33}$$



Figur 1.3:

er den totale CM energi. På den anden side fås i Lab-systemet udfra (1.31) og (1.29)

$$s = m_a^2 + m_b^2 + 2m_b E_a^{Lab} \tag{1.34}$$

Ved sammenligning af (1.32) og (1.34) fås

$$W = \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + 2m_b E_a^{Lab}} \tag{1.35}$$

Det mest signifikante træk ved denne ligning er kvadratroden, der betyder, at ved høje energier hjælper det ikke forfærdeligt meget at forøge Lab-energien. I de acceleratorer, der eksisterede før 1971, kunne man opnå Lab-energier omkr. 30 GeV. I proton-proton vekselvirkning bliver dette omkring 7.4 GeV total CM-energi. Den moderne acceleratorteknik giver i dag langt højere CM-energier ved at anvende kolliderende beams. Således i CERN's $Sp\bar{p}S$ 2×300 GeV protoner på anti-protoner (fra 1981), i Fermilab's TEVATRON, 2×1000 GeV protoner på anti-protoner (fra 1987), og i CERN's LEP, 2×60 GeV elektroner på positroner (fra 1989).

Af (1.33) fås

$$(W - E_a^{CM})^2 = (E_b^{CM})^2$$

Ved at kvadrere parentesen og benytte, at (fås fra (1.30))

$$(E_a^{CM})^2 - (E_b^{CM})^2 = m_a^2 - m_b^2$$

fås

$$E_a^{CM} = \frac{s + m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}} \tag{1.36}$$

Ombyttes a og b fås

$$E_b^{CM} = \frac{s + m_b^2 - m_a^2}{2\sqrt{s}} \tag{1.37}$$

Fra (1.36) og (1.37) fås CM-impulsen

$$|\vec{p}_a^{\,CM}| = |\vec{p}_b^{\,CM}| = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}}{2\sqrt{s}} \tag{1.38}$$

hvor vi har indført den kvadratiske form

$$\lambda(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \tag{1.39}$$

λ kan udtrykkes på mange ækvivalente måder. De vigtigst er

$$\lambda(x,y,z) = (x + y - z)^2 - 4xy = \left[x - (\sqrt{y} + \sqrt{z})^2\right]\left[x - (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2\right] \tag{1.40}$$

Bemærk, at for ultrahøje energier ($s \gg (m_a + m_b)^2$) fås af (1.36), (1.37) og (1.38),

$$E_a^{CM} \simeq E_b^{CM} \simeq |\vec{p}_a^{\,CM}| \simeq |\vec{p}_b^{\,CM}| \simeq \frac{1}{2}\sqrt{s} \tag{1.41}$$

Udfra (1.34) kan vi finde lab-variablene (med b i hvile). Vi finder

$$E_a^{Lab} = \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b} \tag{1.42}$$

Benyttes

$$E_a{}^{Lab} = \sqrt{m_a^2 + (\vec{p}_a^{Lab})^2}$$

fås

$$|\vec{p}_a^{Lab}| = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}}{2m_b} \tag{1.43}$$

Af (1.34) fås den vigtige tærskelbetingelse

$$s \geq (m_a + m_b)^2$$

1.1.5 Kinematisk beskrivelse af spredningen af to partikler med to partikler i sluttilstanden

Hvis vi lader et beam af partikler af typen a ramme et target bestående af partikler af typen b, vil vi se en proces af typen

$$a + b \rightarrow c + d + e + f + \cdots$$

hvor to eller flere partikler kommer ud i sluttilstanden.

Hvis sluttilstanden består af partiklerne a og b, kaldes processen elastisk spredning af a og b,

$$a + b \rightarrow a + b$$

Alle andre processer er uelastiske. I dette afsnit skal vi betragte kinematikken for en type af uelastiske processer, der ofte kaldes *kvasielastiske* (eller blot $2 \rightarrow 2$ processer), fordi der kun findes to partikler i sluttilstanden,

$$a + b \rightarrow c + d$$

Energi- og impulsbevarelse giver

$$p_a + p_b = p_c + p_d \tag{1.44}$$

Denne relation viser, at CM-systemet er det samme for begge to-partikelsystemer (a, b) og (c, d). Lab-systemerne er ikke de samme. Vi vælger naturligvis et lab-system, hvor enten a eller b er i hvile.

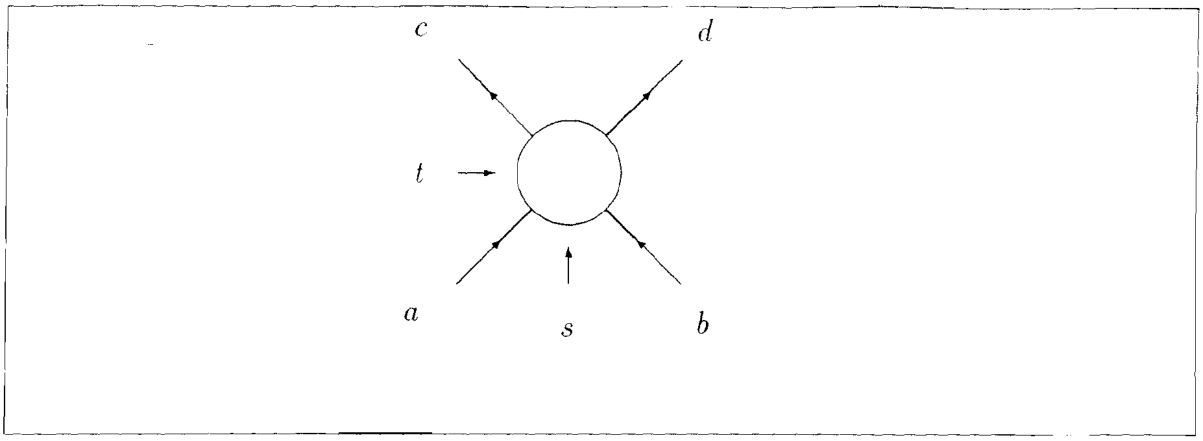
Processen (1.44) beskrives fra et kinematisk synspunkt fuldstændigt ved hjælp af to variable (dette ses let ved at gå til CM-systemet). Foruden s er det ofte bekvemt at indføre *to* nye variable t og u. Vi har pr. definition

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2 \tag{1.45}$$
$$t = (p_c - p_a)^2 = (p_d - p_b)^2 \tag{1.46}$$
$$u = (p_d - p_a)^2 = (p_c - p_b)^2 \tag{1.47}$$

hvor (1.44) er benyttet. De forskellige variable er illustreret i fig. (1.4). s, t og u er ikke uafhængige. Ved brug af (1.44) ses let, at

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \tag{1.48}$$

Vi skal først diskutere disse variable i CM-systemet. Vi definerer begyndelses- (initial)



Figur 1.4:

og slut- (final) CM-impulser,

$$\begin{aligned} p_i = |\vec{p}_a^{\,CM}| &= |\vec{p}_b^{\,CM}| \\ p_f = |\vec{p}_c^{\,CM}| &= |\vec{p}_d^{\,CM}| \end{aligned} \tag{1.49}$$

Ved brug af resultaterne fra afsnit 1.1.4 fås straks

$$E_a{}^{CM} = \frac{s + m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}} \tag{1.50}$$

$$E_b{}^{CM} = \frac{s + m_b^2 - m_a^2}{2\sqrt{s}} \tag{1.51}$$

$$p_i = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}}{2\sqrt{s}} \tag{1.52}$$

$$E_c{}^{CM} = \frac{s + m_c^2 - m_d^2}{2\sqrt{s}} \tag{1.53}$$

$$E_d{}^{CM} = \frac{s + m_d^2 - m_c^2}{2\sqrt{s}} \tag{1.54}$$

$$p_f = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}}{2\sqrt{s}} \tag{1.55}$$

Vi kan nu indføre spredningsvinklen θ mellem retningerne af $\vec{p}_a$ og $\vec{p}_c$ i CM, dvs

$$\vec{p}_a \cdot \vec{p}_c = p_i p_f \cos\theta \tag{1.56}$$

Af (1.46) og (1.47) fås så

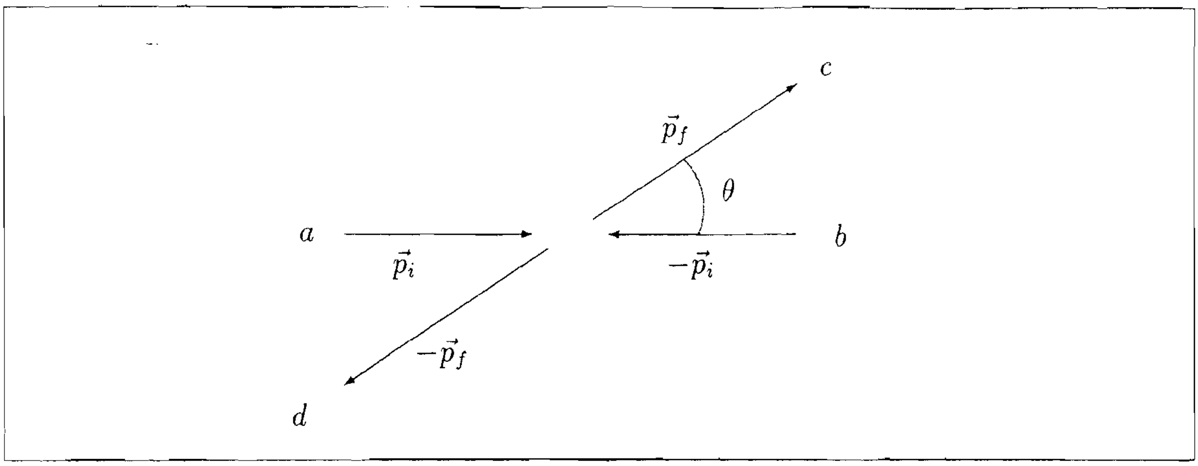
$$t = m_a^2 + m_c^2 - 2E_a{}^{CM}E_c{}^{CM} + 2p_i p_f \cos\theta \tag{1.57}$$

$$u = m_a^2 + m_d^2 - 2E_a{}^{CM}E_d{}^{CM} - 2p_i p_f \cos\theta \tag{1.58}$$

eller

$$t = \left(E_c{}^{CM} - E_a{}^{CM}\right)^2 - (p_i - p_f)^2 - 2p_i p_f(1 - \cos\theta) \tag{1.59}$$

$$u = \left(E_d{}^{CM} - E_a{}^{CM}\right)^2 - (p_i - p_f)^2 - 2p_i p_f(1 + \cos\theta) \tag{1.60}$$



Figur 1.5:

Størrelsen s må tilfredsstille

$$s \geq (m_a + m_b)^2 \quad \text{og} \quad s \geq (m_c + m_d)^2 \tag{1.61}$$

Dette udtrykker simpelthen, at den totale CM-energi må være større end summen af masserne i såvel begyndelsestilstand som sluttilstand.

For de variable t og u, der kaldes (kvadratet på) de *invariante impulsoverførsler*, finder vi for et givet s, at variationsområdet begrænses af

$$\left(E_c{}^{CM} - E_a{}^{CM}\right)^2 - (p_i + p_f)^2 \leq t \leq \left(E_c{}^{CM} - E_a{}^{CM}\right)^2 - (p_i - p_f)^2 \tag{1.62}$$

$$\left(E_d{}^{CM} - E_a{}^{CM}\right)^2 - (p_i + p_f)^2 \leq u \leq \left(E_d{}^{CM} - E_a{}^{CM}\right)^2 - (p_i - p_f)^2 \tag{1.63}$$

Ved hjælp af (1.50) - (1.55) kan vi udtrykke disse grænser ved hjælp af s, således at de kinematiske grænser kan udtrykkes på invariant form.

En betragtelig simplifikation opstår, når vi går til det elastiske tilfælde, hvor

$$m_a = m_c \quad , \quad m_b = m_d \tag{1.64}$$

Vi får så

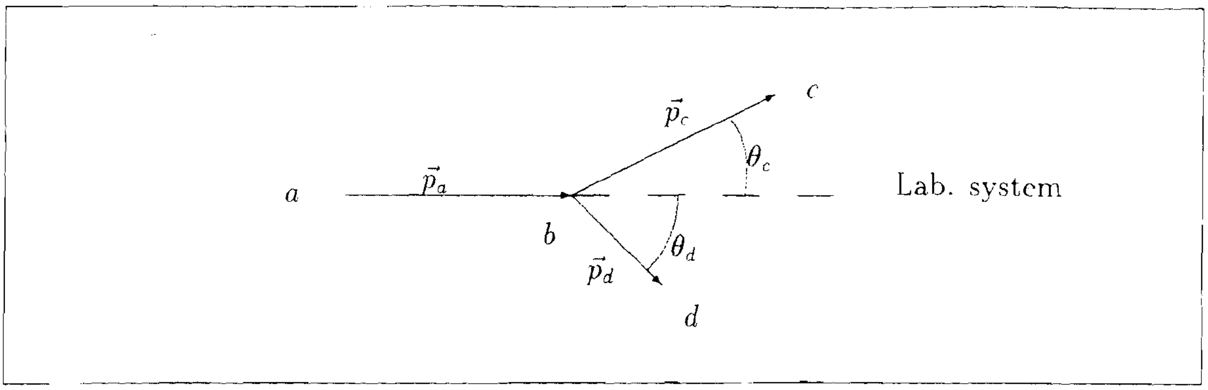
$$\begin{aligned} p_i &= p_f \equiv p \\ E_a^{CM} &= E_c^{CM} \\ E_b^{CM} &= E_d^{CM} \end{aligned} \tag{1.65}$$

For t fås

$$t = -\left(\vec{p}_c^{\,CM} - \vec{p}_a^{\,CM}\right)^2 = -2p^2(1 - \cos\theta) \tag{1.66}$$

Omvendt fås af (1.52)

$$\cos\theta = 1 + \frac{2st}{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)} \tag{1.67}$$



Figur 1.6:

De kinematiske grænser for t er

$$\frac{-\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}{s} < t < 0 \tag{1.68}$$

For u fås

$$u = \frac{(m_b^2 - m_a^2)^2}{s} - 2p^2(1 + \cos\theta) \tag{1.69}$$

Ved elastisk spredning af to partikler med samme masse (elektron-elektron, elektron-positron, proton-proton, ...) falder det første led i (1.69) bort. For $s \to \infty$ er dette led i øvrigt forsvindende.

Vi skal dernæst kort diskutere variablene i lab-systemet. Her er det mest bekvemt at bruge den kinetiske energi $T = E - m$. Af (1.45) - (1.47) fås

$$s = (m_a + m_b)^2 + 2m_b T_a^{Lab} \tag{1.70}$$

$$t = (m_d - m_b)^2 - 2m_b T_d^{Lab} \tag{1.71}$$

$$u = (m_c - m_b)^2 - 2m_b T_c^{Lab} \tag{1.72}$$

Heraf findes impulserne let $\left[|\vec{p}| = \sqrt{T(T + 2m)}\right]$

$$|\vec{p}_a^{Lab}| = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}}{2m_b} \tag{1.73}$$

$$|\vec{p}_c^{Lab}| = \frac{\sqrt{\lambda(u, m_c^2, m_b^2)}}{2m_b} \tag{1.74}$$

$$|\vec{p}_d^{Lab}| = \frac{\sqrt{\lambda(t, m_d^2, m_b^2)}}{2m_b} \tag{1.75}$$

Der er to spredningsvinkler θ_c og θ_d (se fig. (1.6)). For t og u har vi

$$t = (p_c - p_a)^2 = m_c^2 + m_a^2 - 2E_c^{Lab}E_a^{Lab} + 2|\vec{p}_c^{Lab}|\,|\vec{p}_a^{Lab}|\cos\theta_c \tag{1.76}$$

$$u = (p_d - p_a)^2 = m_d^2 + m_a^2 - 2E_d^{Lab}E_a^{Lab} + 2|\vec{p}_d^{Lab}|\,|\vec{p}_a^{Lab}|\cos\theta_d \tag{1.77}$$

Udfra disse relationer kan vinkler udtrykkes ved invarianter.

1.1.6 Bemærkninger om produktionsprocesser

Den generelle produktionsproces

$$a + b \to c_1 + c_2 \cdots + c_q \tag{1.78}$$

er selv fra et kinematisk synspunkt meget kompliceret at beskrive. Antallet af uafhængige kinematiske variable, der beskriver processen (1.78), er $3q-4$ (hvorfor?). Hvis partiklerne har spin, stiger antallet af frihedsgrader.

Selv om processen (1.78) er undersøgt eksperimentelt, er det klart, at det er svært at præsentere de eksperimentelle data på overskuelig vis. Man må nødvendigvis integrere over en række variable og nøjes med at studere processens forløb i nogle få variable. Vi skal senere vende tilbage til produktionsprocesser.

1.2 Den relativistiske S-matrix

Mens vi i kap. 1.1 udelukkende beskæftigede os med de kinematiske forhold i spredningsprocesser og henfald, skal vi nu se, hvorledes man i kvanteteorien kan beskrive sådanne processer. Vore betragtninger vil være meget almene, men i senere kapitler vil vi gang på gang få brug for diverse specialtilfælde af denne almene formalisme. Det er derfor i høj grad nyttigt først at gøre sig fortrolig med de almene træk.

1.2.1 Spredningseksperimenter og den dynamiske S-matriks

Vi har allerede i kap. 1.1.5 og 1.1.6 nævnt begrebet spredningsproces. Vi var da interesserede i de kinematiske træk ved processerne. Lad os imidlertid forsøge at analysere spredningen fra et kvantemekanisk synspunkt.

På fig. 1.7 ser vi en meget skematisk tegning af et spredningseksperiment. Fra protonacceleratoren udtages et beam vha en magnet. Dette protonbeam fokuseres og sendes ind i et boblekammer, [2] hvor beamets partikler vekselvirker med brint. Boblekammeret virker altså både som target og detektor. Vi skal senere møde andre eksempler på, hvorledes eksperimenter rent faktisk udføres. Ovenstående må blot opfattes som en grov skitse. De principielle træk ved ovennævnte type af spredningseksperimenter kan udtrykkes ved nøgleordene *"beam", "target"* og *"detektion"*. Eller sagt mere udførligt:

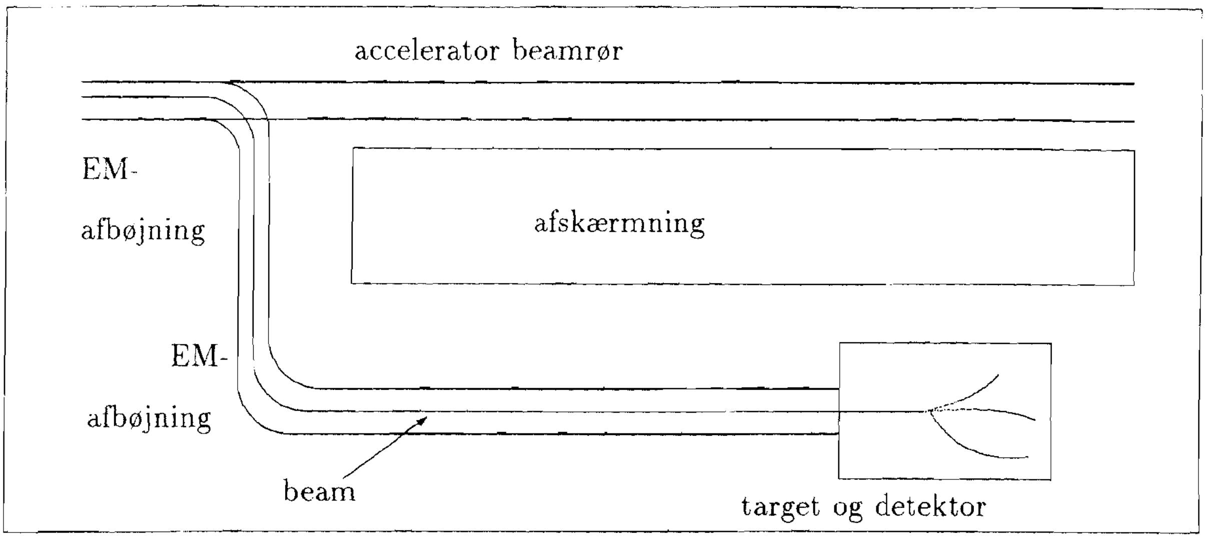
(a) *Beam*: Ved hjælp af maskiner accelereres beampartiklerne op til den energi, man ønsker at studere. Ved hjælp af magneter tages beampartiklerne ud af acceleratoren.

(b) *Target*: Beamet ledes ind i et target, og selve spredningsprocessen finder sted. Er der tale om to beams, der kolliderer, er target selv et beam.

(c) *Detektion*: Resultatet af vekselvirkningen mellem beam og target detekteres. I figuren produceres to ladede partikler (sluttilstanden består af fire ladede partikler - eventuelle neutrale partikler kan ikke *direkte* ses i boblekammeret, men nok i visse andre detektorer).

---

[2] De fleste boblekamre er nu "pensionerede" til fordel for elektroniske detektorer, men ideen er stort set den samme



Figur 1.7:

Principielt kan vi derfor beskrive en spredningsproces ved ligningen

$$\underbrace{a + b}_{i} \rightarrow \underbrace{c + d \ldots + e}_{f} \quad , \tag{1.79}$$

Her indeholder begyndelsestilstanden (i) (i står for "initial") to partikler, mens sluttilstanden (f) indeholder to eller flere partikler (f står for "final").

Der er altså tre trin i en vilkårlig spredningsproces, "konstruktionen" dvs begyndelsestilstanden (i), spredningen, og detektion af sluttilstanden (f). Konstruktionen af begyndelsestilstanden finder sted så langt fra spredningsområdet, at vi kan karakterisere begyndelsestilstanden med et sæt af kvantetal for frie partikler (impulser, spin, etc.). Den således karakteriserede tilstand betegner vi kort med $|i\rangle$. På samme måde vil detektionen foregå udenfor spredningsområdet, og sluttilstanden $|f\rangle$ er karakteriseret ved et andet sæt af kvantetal for frie partikler.

For at redegøre for eksperimenter er vi interesserede i overgangssandsynligheden p_{fi} for, at et system bestående af beam plus target, og som oprindeligt beskrives ved tilstanden $|i\rangle$, senere måles at være i tilstanden $|f\rangle$. Kvantemekanisk set er p_{fi} imidlertid ikke den fundamentale størrelse. I henhold til generelle kvantemekaniske regler er p_{fi} proportional med kvadratet på en overgangsamplitude, som vi betegner med $\langle f|S|i\rangle$. Ved denne betegnelse har vi tilkendegivet, at overgangsamplituden afhænger af kvantetallene for de indkommende partikler. I stedet for $\langle f|S|i\rangle$ skriver man ofte S_{fi}.

Mens $|i\rangle$ og $|f\rangle$ er tilstande, der indeholder frie partikler, beskriver bogstavet S selve spredningen. ***Transformationsoperatoren S beskriver altså dynamikken.***

Hvis der ingen vekselvirkning findes, må vi have $|i\rangle$, altså $S = 1$. Det er bekvemt straks at separere den trivielle mulighed at intet sker. Vi skriver derfor

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|i\rangle + \langle f|U|i\rangle \tag{1.80}$$

$\langle f|U|i\rangle$ beskriver den egentlige spredning. I begyndelses- og sluttilstanden har vi veldefinerede totale fire-impulser p_i og p_f henholdsvis. Da energier og impulser er bevarede, gælder

$$\langle f|U|i\rangle = 0 \quad for \quad p_i \neq p_f \tag{1.81}$$

Dette repræsenterer en vigtig randbetingelse på U-matricen. I impulsrummet er $\langle f|U|i\rangle$ kun forskellig fra nul i det punkt, hvor $p_i = p_f$. Det er derfor naturligt at forvente (da fire-impulserne jo er kontinuerte variable)

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= \langle f|i\rangle + i(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)\langle f|T|i\rangle \\ \delta^4(p) &= \delta(p^0)\delta(p^1)\delta(p^2)\delta(p^3) \end{aligned} \tag{1.82}$$

hvor den fire-dimensionale δ-funktion udtrykker bevarelsen af energi og impuls. T-matricen $\langle f|T|i\rangle$ udtrykker således den egentlige dynamik. Faktoren, $i(2\pi)^4$, er blot indført af bekvemmelighedsgrunde (se senere afsnit).

Det bemærkes, at definitionen i (1.82) naturligvis forudsætter, at vi har detekteret *alle* partikler i sluttilstanden (ellers vil vi jo ikke observere energi-impulsbevarelse). På fig. 1.7 vil der således ikke være udetekterede neutrale partikler.

Vi skal i kap. 1.4 se, hvorledes man beskriver den situation, at visse typer (fx neutrale) partikler unddrager sig vores detektors opmærksomhed.

1.2.2 Tilstandvektorer i Heisenberg-billedet

I de foregående betragtninger er der tilsyneladende en mangel på symmetri mellem tilstandene $|f\rangle$ og $|i\rangle$, idet $|i\rangle$ i spredningsamplituden kun indeholder to partikler.

Er der tale om et henfald

$$a \longrightarrow b + c + d + \ldots + e$$

indeholder $|i\rangle$ kun *en* partikel. Det er klart, at denne mangel på symmetri kun er tilsyneladende, idet såvel $|i\rangle$ som $|f\rangle$ er karakteriserede ved, at de er egentilstande for et fuldstændigt sæt af kommuterende observable. De observable er defineret ved hjælp af detektorerne, der benyttes ved karakteriseringen af $|f\rangle$ og $|i\rangle$. Vi kan således forestille os, at $|f\rangle$ og $|i\rangle$ begge udgør et komplet sæt af tilstande, - den kendsgerning, at $|i\rangle$ består af en eller to partikler, er således en ren praktisk restriktion.

Indtil nu har vi været meget upræcise med hensyn til karakteriseringen af $|f\rangle$ og $|i\rangle$. Som bekendt kan man i kvantemekanikken beskrive tidsudviklingen af et system på flere måder. I Schrödinger-billedet indeholder tilstandsvektorerne hele tidsafhængigheden, mens operatorerne er tidsuafhængige. I Heisenberg-billedet er alle tilstandsvektorer tidsuafhængige, mens operatorerne varierer med tiden. Desuden findes en række "billeder" (fx vekselvirkningsbilledet), hvor en del af tidsafhængigheden ligger i tilstandsvektorerne og en del i operatorerne. Schrödinger- og Heisenberg-billederne bliver således ekstreme tilfælde.

I urelativistisk kvantemekanik er samtlige tidsudviklingsbilleder ækvivalente, og det er en bekvemmelighed og en smagssag, hvilket man vælger. For systemer med uendelig mange frihedsgrader (fx relativistisk kvantefeltteori) er dette imidlertid ikke længere tilfældet. Det viser sig, at Heisenberg-billedet er det tidsudviklingsbillede, der har størst chance for at eksistere fysisk og matematisk. Det er unødvendigt for os i dette elementære kursus at komme nærmere ind på disse subtile spørgsmål. Vores eneste pointe er, at der er god grund til at benytte Heisenberg-billedet i det følgende.

I Heisenberg-billedet beskriver vi systemet til *alle tider* ved en vektor $|\Phi\rangle$. Denne tilstandsvektor beskriver tilstande for systemet uafhængig af hvilke mere eller mindre dramatiske begivenheder, der sker i løbet af tiden. I Heisenberg-billedet er den indkommende tilstand (begyndelsestilstanden) betegnet ved $|i, in\rangle$, hvor i igen står for et sæt af kvantetal for frie partikler (impulser, spin, etc.). Analogt står $|f, out\rangle$ for tilstanden, der specificeres af detektorerne i sluttilstanden. Tilstandene $|i, in\rangle$ og $|f, out\rangle$ er tidsuafhængige, da vi er i Heisenberg-billedet. Derfor går $|i, in\rangle$ heller ikke med tiden *over* i $|f, out\rangle$. Man kan snarere sige, at systemet en gang for alle er beskrevet enten ved $|i, in\rangle$ eller $|f, out\rangle$ - tilstandene.

Beskrivemåden kan minde lidt om beskrivelsen af en planets bevægelsestilstand ved hjælp af baneelementer. Normalt tænker vi måske på at specificere planetens position og impuls som funktioner af tiden. Men samme information er tilrådighed ved at angive baneelementerne: parametre for Kepler-banens størrelse, form og orientering i rummet samt den afgørende vigtige *epoke*, der angiver tidspunktet for en bestemt perihelpassage. Herefter kan position og impuls altid simpelt *beregnes* til enhver tid. Men *spcifikationen* af planetens tilstand er tidsuafhængig.

Tilsvarende med tilstandsvektorer i Heisenbergbilledet. Deres tidsuafhængighed er ingenlunde et udtryk for at alle målinger på systemet vil give samme resultat til alle tider. Sådanne målinger vil være relaterede til visse matrixelementer af visse observable, og disse sidste vil være *tidsafhængige*.

Overgangsamplituden $i \to f$ er da givet ved

$$S_{fi} = \langle f, out|i, in\rangle \tag{1.83}$$

idet S_{fi} ifølge denne definition er amplituden for et system, der præpareres i tilstanden $|i, in\rangle$, vil blive fundet i tilstanden $|f, out\rangle$. Da såvel $|i, in\rangle$ som $|f, out\rangle$ udgør fuldstændige sæt, kan vi fx udvikle $|i, in\rangle$ på $|f, out\rangle$. Af (1.83) fås

$$|i, in\rangle = \sum_f |f, out\rangle\langle f, out|i, in\rangle = \sum_f |f, out\rangle S_{fi} \tag{1.84}$$

I operatorformulering kan vi skrive (1.84) som

$$S_{fi} = \langle f, out|S|i, out\rangle = \langle f, in|S|i, in\rangle \tag{1.85}$$

Sædvanligvis vil vi undlade "out" og "in" i betegnelsen for tilstandene og blot skrive S_{fi} som $\langle f|S|i\rangle$. Det er underforstået, at $\langle f|$ og $|i\rangle$ tilhører *samme* sæt af tilstandsvektorer (dvs enten "in" eller "out"-sættet).

1.2.3 Unitaritet

Da "in"- og "out"-tilstandene er fuldstændige, har vi

$$\sum_f |f, out\rangle\langle f, out| = \sum_i |i, in\rangle\langle i, in| = 1 \tag{1.86}$$

Vi forudsætter her, at tilstandene er "normerede til 1": at (i en vis forstand, se nærmere afsnit 1.3)

$$\langle f|f\rangle = 1$$

Af forrige ligning fås ved at tage matrikselementet mellem $\langle f, out|$ og $|f', out\rangle$ at

$$\sum_i \langle f|S|i\rangle\langle i|S^\dagger|f'\rangle = \langle f|f'\rangle \tag{1.87}$$

hvor alle tilstande er out-tilstande (jfr lign. (1.86)). Tilsvarende

$$\sum_f \langle i|S^\dagger|f\rangle\langle f|S|i'\rangle = \langle i|i'\rangle \tag{1.88}$$

Altså er S-matricen unitær. I operatorformulering gælder

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1 \tag{1.89}$$

Denne ligning udtrykker blot (via (1.86)), at da "in"- og "out"- tilstandene hver for sig udgør fuldstændige sæt, vil de være forbundne med en unitær transformation.

Unitariteten (1.89) kan også udtrykkes vha den egentlige dynamiske størrelse $\langle f|T|i\rangle$, defineret i lign. (1.82). Ved simpel algebra fås

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|\beta\rangle &= \sum_\gamma (\langle\gamma|\alpha\rangle^* - i(2\pi)^4\delta^4(p_\gamma - p_\alpha)\langle\gamma|T|\alpha\rangle^*) \\
&\quad (\langle\gamma|\beta\rangle + i(2\pi)^4\delta^4(p_\gamma - p_\beta)\langle\gamma|T|\beta\rangle) \\
&= \langle\alpha|\beta\rangle + i(2\pi)^4\delta^4(p_\alpha - p_\beta)(\langle\alpha|T|\beta\rangle - \langle\beta|T|\alpha\rangle^*) \\
&\quad + \sum_\gamma (2\pi)^8\delta^4(p_\gamma - p_\alpha)\delta^4(p_\gamma - p_\beta)\langle\gamma|T|\alpha\rangle^*\langle\gamma|T|\beta\rangle
\end{aligned} \tag{1.90}$$

Benyttes, at $\delta^4(p_\gamma - p_\alpha)\delta^4(p_\gamma - p_\beta) = \delta^4(p_\alpha - p_\beta)\delta^4(p_\gamma - p_\beta)$, fås

$$\langle\alpha|T|\beta\rangle - \langle\beta|T|\alpha\rangle^* = i\sum_\gamma (2\pi)^4\delta^4(p_\gamma - p_\beta)\langle\gamma|T|\alpha\rangle^*\langle\gamma|T|\beta\rangle \tag{1.91}$$

Bruger vi

$$\langle\alpha|T^\dagger|\beta\rangle = \langle\beta|T|\alpha\rangle^* \tag{1.92}$$

kan T-matricens unitaritet udtrykkes på følgende simple måde

$$\langle f|T|i\rangle - \langle f|T^\dagger|i\rangle = i\sum_n (2\pi)^4\delta^4(p_n - p_i)\langle f|T^\dagger|n\rangle\langle n|T|i\rangle \tag{1.93}$$

Summationen går over et fuldstændigt sæt af (normerede!) mellemtilstande karakteriseret ved kvantetallene n.

Unitariteten er en vigtig egenskab ved S- (og T-) matricerne. Hvis man har en eksakt dynamisk teori for spredningsprocesser (og henfald), må unitariteten naturligvis være eksakt opfyldt. Har man derimod kun brudstykker af en dynamik for spredningsprocesser, giver unitariteten et vigtigt bånd på de relevante amplituder.

Et vigtigt specialtilfælde af (1.93) fås, hvis $|i\rangle = |f\rangle$. Da er

$$Im\langle i|T|i\rangle = \frac{1}{2}\sum_n (2\pi)^4 \delta^4(p_n - p_i)|\langle n|T|i\rangle|^2 \tag{1.94}$$

Imaginærdelen af den forlæns (forlæns, fordi de to $|i\rangle$-tilstande er *nøjagtigt* ens) amplitude. $Im\ \langle i|T|i\rangle$ er altså positiv. I tilfældet topartikelspredning viser det sig, at (1.94) er identisk med den berømte *optiske* sætning[3].

1.2.4 Nogle vigtige historiske bemærkninger

Den sædvanlige urelativistiske kvantemekanik kan naturligvis formuleres vha en S-matriks for så vidt angår beregningen af spredningsprocesser, idet man går ud fra at Schrödinger-ligningen kan udtrykke $\langle f|S|i\rangle$ i termer af potentialet. At S-matricen imidlertid er et nyttigt generelt hjælpemiddel, selv i tilfælde hvor man ikke har bevægelsesligninger, er først påpeget klart af Heisenberg *"Die beobachtbaren Grössen in der Theorie der Elementarteilchen"*, Z. Phys. **120** 513 (1943) .

I studiet af vekselvirkningen mellem partikler ved høje energier ("højenergifysikken", "elementarpartikelfysikken", "partikelfysikken", ...) er vi netop i den situation, at vi - trods de seneste par årtiers store fremskridt - ikke i al fremtid kan formode fuldt ud at forstå dynamikken, især hvad angår produktionsprocesser

$$a + b \rightarrow c + d + e + \ldots + f$$

I en sådan situation kan S-matricens generelle egenskaber (fx unitariteten) være meget nyttige.

1.3 Eksklusive tværsnit

I dette afsnit skal vi beskæftige os med processer, hvor sluttilstanden $|f\rangle$ består af et bestemt antal partikler, altså processer af typen

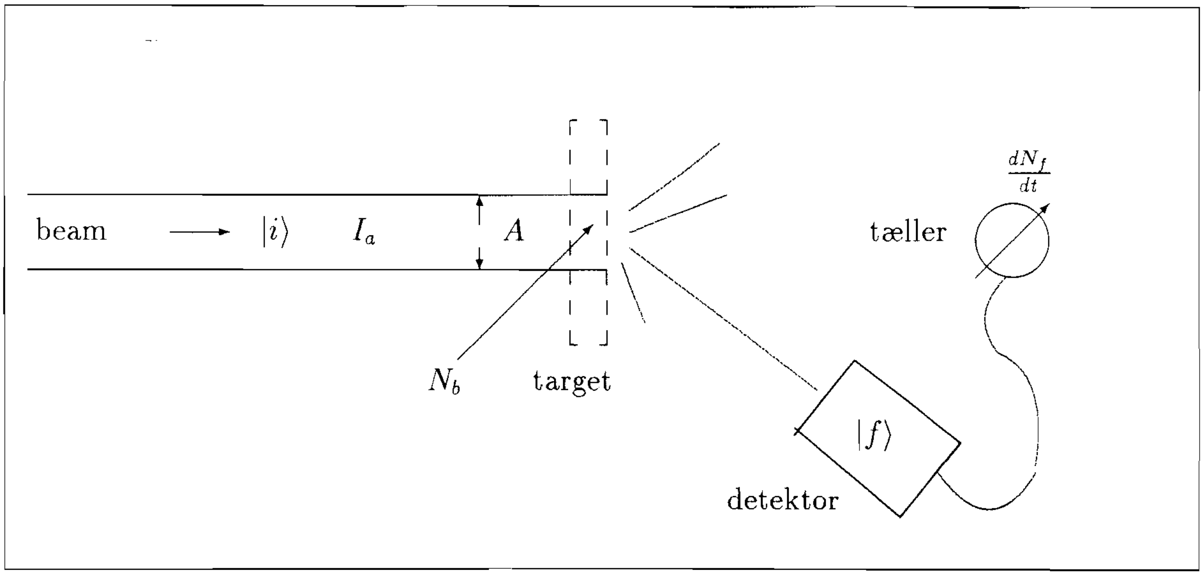
$$a + b \rightarrow c_1 + c_2 + \ldots + c_n \tag{1.95}$$

Sådanne processer kaldes (efter Feynman) eksklusive processer, idet udetekterede partikler i sluttilstanden er udelukket. Hvis (1.95) fx er observeret i et boblekammer, må man ved at undersøge energi-impulsbalancen sikre sig, at sluttilstanden virkelig ikke indeholder flere end n partikler.

1.3.1 Definition af tværsnit

Eksperimentelle resultater for spredningsprocesser udtrykkes vha tværsnit. Vi skal først definere tværsnittet for processen (1.95), og i de følgende afsnit vil vi derpå finde forbindelsen mellem tværsnittene og den i kap.1.2 definerede S-matrix. Fig. 1.8 viser meget

[3]Bemærk, at i almindelighed er venstre side af (1.93) *ikke* imaginærdelen af $\langle f|T|i\rangle$.



Figur 1.8:

skematisk, hvad vi observerer i spredningseksperimentet i laboratoriesystemet for b. Lad beamet have den konstante partikelintensitet I_a, dvs I_a partikler passerer et enhedsareal vinkelret på beamretningen pr. tidsenhed. Target antages at være så "tyndt", at vi kan se bort fra multipel-spredning. Lad antallet af "aktive" target partikler (dvs de targetpartikler, der befinder sig i den del af target, der gennemskæres af beamet) være N_b. Sluttilstanden $|f\rangle$ registreres af detektorer, der befinder sig langt fra target. Lad tællehastigheden, dvs antallet af gange tilstanden $|f\rangle$ registreres pr. tidsenhed, være dN_f/dt. Tværsnittet for $i \to f, \sigma_{fi}$, er da defineret ved

$$\frac{dN_f}{dt} = \sigma_{fi} I_a N_b \tag{1.96}$$

Det ses, at σ_{fi} har dimension som et areal. Bemærk her, at dN_f/dt trivielt er *propertional med* $I_a N_b$. σ_{fi} indeholder den ikke-trivielle, interessante information.

Man kan også let direkte se, at σ_{fi} har dimension af et areal. Betragter vi systemet over en tid T, da er det totale antal af partikler i beamet

$$N_a = I_a A T \tag{1.97}$$

hvor A er beamtværsnittet. Intensiteten I_a er forudsat at være konstant i tiden. Tællehastigheden er da også konstant, og det totale antal begivenheder, der registreres i sluttilstanden f er da $N_f = T(dN_f/dt)$. Af (1.96) fås så

$$\sigma_{fi} = \frac{N_f}{N_a N_b} A \tag{1.98}$$

der klart viser, at tværsnittet er et areal. Det bemærkes, at $N_a N_b$ er det totale antal af mulige vekselvirkninger mellem partiklerne a og b. Man kan derfor sige, at σ_{fi} er det effektive areal en indkommende partikel må ramme, for at sluttilstanden f kan optræde.

En lille advarsel: For et target bestående af mange partikler er tællehastigheden ikke *altid* N_b gange tællehastigheden for et target bestående af en enkelt partikel. Et velkendt eksempel, hvor dette ikke er opfyldt, er diffraktionsspredning af elektroner i en krystal (Davisson og Germers eksperiment), hvor den koherente vekselvirkning af beamelektronerne med krystalatomerne giver anledning til interferenseffekter. Tværsnittet for elektron-krystalspredning er da meget forskellig fra tværsnittet for elektron-atomspredning. Interferenseffekten vil dog i almindelighed kun optræde, når de Broglie- bølgelængden for den indkommende partikel er sammenlignelig med de interatomare afstande i krystallen. Ved større impulser er det tilladeligt at se bort fra disse effekter, og i det følgende vil vi antage, at dette er tilfældet.

Til sidst vender vi os til den situation, hvor sluttilstanden er lig begyndelsestilstanden, dvs $f = i$. Dette tilfælde optræder fx i elastisk spredning $a + b \to a + b$, når spredningsvinklen går mod nul. Eksperimentelt kan vi ikke skelne de partikler, der går gennem target uden at blive spredt (dvs, de partikler der svarer til leddet $\langle f|i\rangle$ i S-matricen (1.82)) fra de partikler, der spredes i forlæns retning. Da tællehastigheden dN_f/dt varierer diskontinuert, når tælleren placeres i forlæns retning (og dermed rammer det ikke-spredte beam), kan definitionen, (1.96) ikke benyttes i forlæns retning for $f = i$. Imidlertid kan vi såvel eksperimentelt som teoretisk benytte kontinuitetsbetragtninger ved definitionen af det forlæns elastiske tværsnit.

1.3.2 Relativistisk normering

Som bekendt fungerer den kvantemekaniske formalisme på den måde, at udsagn om *sandsynligheder* fås fra visse matrix-elementer ved at tage absolutkvadratet på disse sidste. For at denne regel kan fungere umodificeret, må det forudsættes, at vi benytter tilstande hvis "absolut-kvadrat" eller normering er givet ved et 1-tal. I relativistisk fysik er det ofte mere bekvemt, at arbejde med tilstande, der *ikke* adlyder denne normering. Faktisk er det *umuligt* at opretholde denne normering i alle inertialsystemer, som vi nu skal se. Men det gør heller ikke noget når blot vi husker altid at dividere med tilstandsnormeringen lige inden vi beregner sandsynligheder.

Er således en tilstand $|\psi\rangle$ defineret med en normering $\langle\psi|\psi\rangle \neq 1$, så er tilstanden $(\langle\psi|\psi\rangle)^{-1/2}|\psi\rangle$ enhedsnormeret:

$$(\langle\psi|\psi\rangle)^{-1/2}\langle\psi|\psi\rangle(\langle\psi|\psi\rangle)^{-1/2} = 1$$

Tilsvarende kan vi skrive fuldstændighedsrelationen for et sæt af orthogonale, men ikke nødvendigvis ortho*normale* tilstande som

$$1 = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{\langle n|n\rangle}$$

Først minder vi om, at den ikke-relativistiske bølgefunktion for en partikel med impuls $\vec{p}$ er givet ved

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \tag{1.99}$$

Disse tilstande tilfredsstiller normeringsbetingelsen $(\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle^* = \langle\vec{p}|\vec{x}\rangle)$

$$\langle\vec{p}|\vec{p}\,'\rangle = \int d^3x \langle\vec{p}|\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|\vec{p}\,'\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,') \tag{1.100}$$

og fuldstændighedsrelationen

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle \vec{x}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\vec{y}\rangle = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{1.101}$$

I abstrakt form kan denne ligning skrives

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| = 1 \tag{1.102}$$

Normeringsbetingelsen (1.100) er invariant under rumlige rotationer, dvs

$$\langle\tilde{\vec{p}}|\tilde{\vec{p}}'\rangle = \langle\vec{p}|\vec{p}'\rangle \tag{1.103}$$

for enhver rotation

$$\tilde{p}_i = R_{ik}p_k \quad , \quad \tilde{p}_i' = R_{ik}p_k'$$

Dette følger af, at ortogonalitetsbetingelsen for rotationen R, nemlig $R_{ik} \cdot R_{kl} = \delta_{il}$ medfører, at det $R = 1$ (for egentlige rotationer). Heraf følger

$$\begin{aligned} \delta^3(\tilde{\vec{p}}-\tilde{\vec{p}}') &= \prod_{i=1}^{3} \delta(R_{ik}(p_k - p_k')) = \frac{1}{|\det R|}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,') \\ &= \delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,') \end{aligned} \tag{1.104}$$

hvilket medfører (1.103).

Normeringen er endvidere invariant under Galilei-transformationer

$$\tilde{\vec{p}}\,' = \vec{p}\,' - m\vec{v} \quad , \quad \tilde{\vec{p}} = \vec{p} - m\vec{v}$$

Fuldstændighedsrelationen (1.101) er naturligvis også invariant under disse transformationer.

I en relativistisk kvantemekanik arbejder vi også med egentilstande af impulsen $\vec{p}$. Men i en relativistisk teori er det ubekvemt at benytte normeringen (1.100) pga dennes Galilei-invarians. Det vil være mere praktisk at have en Lorentz-invariant normering. Vi skal se, at en sådan opnås ved at vælge

$$\langle\vec{p}|\vec{q}\,\rangle = 2E_p(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q}\,) \quad , \quad E_p = \sqrt{m^2+\vec{p}^2} \tag{1.105}$$

E_p er altså energien af partiklen med impuls $\vec{p}$. Invarians under sædvanlige rotationer er klar. Det er derfor tilstrækkeligt at vise invariansen under specielle Lorentz-transformationer,

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma(p_x - vE_p) \quad , \quad p'_y = p_y \quad , \quad p'_z = p_z \\ E'_p &= \gamma(E_p - vp_x) \quad , \quad \gamma = (1-v^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1.106}$$

(og analogt for $\vec{q}\,$). Invariansen af y- og z-komponenterne er triviel. For x-komponenten haves

$$\delta(p'_x - q'_x) = \delta(\gamma(p_x - q_x) - \gamma v(E_p - E_q)) \tag{1.107}$$

Argumentet for δ-funktionen er kun nul for $p_x = q_x$, og vi kan benytte, at

$$\delta(f(u) - f(v)) = \frac{1}{|f'(u)|}\delta(u - v) \tag{1.108}$$

der gælder for monotone funktioner (generelt: i omegnen af et isoleret nulpunkt for f). Altså er

$$\delta(p'_x - q'_x) = \frac{1}{\gamma - \gamma v \frac{p_x}{E_p}}\delta(p_x - q_x) = \frac{E_p}{E'_p}\delta(p_x - q_x) \tag{1.109}$$

Denne relation viser, at (1.105) er invariant, dvs:

$$\langle \vec{p}\,'|\vec{q}\,'\rangle = \langle \vec{p}|\vec{q}\,\rangle$$

Fuldstændighedsrelationen influeres så også. Fra (1.105) fås

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2E_p}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\vec{q}\,\rangle = |\vec{q}\,\rangle \tag{1.110}$$

eller, i abstrakt form,

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2E_p}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| = 1 \tag{1.111}$$

Denne betingelse er Lorentz-invariant, fordi $\frac{d^3p}{E_p}$ er Lorentz-invariant (dette ses let vha (1.106) og (1.109)).

Det er ofte bekvemt, at indføre en notation, der minder om, hvad vi er vante til fra diskrete variable, og skrive

$$\sum_{\vec{p}} \cdots \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2E_p} \cdots \tag{1.112}$$

Dette er reglen for at gå fra en formel sum over en kontinuert impulsvariabel til et integral over denne variabel.

Med denne notation kan vi så skrive (1.111) som en formel sum,

$$\sum_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| = 1 \tag{1.113}$$

som om $\vec{p}$ var en diskret variabel. Hertil svarer notationen

$$\delta_{\vec{p}\vec{p}'} \equiv (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

For den her indførte Lorentz-invariante normering gælder, at den ikke giver "enhedsnormerede tilstande". I stedet har vi for en 1-partikeltilstand

$$\langle\vec{p}|\vec{p}\rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\vec{0}) = 2p^0 \cdot V \tag{1.114}$$

hvor V betegner "kvantiseringsvolumenet", det område af rummet i hvilket vi (via meget store bølgepakker) trods alt er sikre på at have partiklen indespærret (således at impulsen kun bliver helt veldefineret i grænsen $V \to \infty$). Der gælder nemlig

$$(2\pi)^3\delta^3(\vec{0}) = \int d^3x e^{i\vec{x}\cdot\vec{0}} = \int d^3x\; 1 = V$$

1.3.3 Sammenhængen mellem tværsnit og S-matricen

Det næste problem består nu i at sammenknytte det eksperimentelt betonede tværsnit, σ_{fi}, med den kvantemekanisk mere relevante S-matrix, der direkte giver overgangsamplituden mellem begyndelses- og slut-tilstandene $|i\rangle$ og $|f\rangle$.

I praksis vil tilstandene $|i\rangle$ og $|f\rangle$ være karakteriserede ved partiklernes impulser (foruden evt. spin etc.). Dette giver anledning til en vanskelighed fra et kvantemekanisk synspunkt, fordi en partikel med veldefineret impuls ikke kan lokaliseres ifølge ubestemthedsrelationerne. Sandsynligheden, for at en sådan partikel befinder sig i et endeligt volumen, må derfor være nul. Dette er til en vis grad upraktisk, og vi skal derfor indgå det kompromis, at vi som før nævnt tænker os alle fysisk relevante systemer indesluttet i et endeligt, men vilkårligt stort volumen, V. Impulserne kan da ikke være fuldstædigt bestemte. Ved at udføre grænseovergangen $V \to \infty$ i vore slutresultater kan vi imidlertid opnå impulsdefinition med vilkårlig nøjagtighed.

Lad os nu igen betragte processen $|i\rangle \to |f\rangle$, hvor $|i\rangle$ består af to partikler, a og b, mens $|f\rangle$ er en tilstand bestående af et bestemt antal partikler ($\geq$ 2 normalt). Lad os endvidere antage, at b er i hvile. Vi betragter a som værende beskrevet ved en kasseagtig bølgepakke, der bevæger sig med hastigheden v_a (med et snævert impulsspektrum), og som har tværsnittet, A, vinkelret på bevægelsesretningen. Lad T være den tid, det tager for a at passere et givet punkt. Længden af bølgepakken er da v_aT. Partiklen b er også beskrevet ved en bølgepakke (næsten i hvile) med volumen V. Vi antager, at b-bølgepakken kan indesluttes fuldstændigt i a-bølgepakken. V er det "effektive vekselvirkningsvolumen". Det spiller også rollen som kvantiseringsvolumen for partiklen b.

Efter foregående afsnit har vi så for normeringen af begyndelsestilstanden

$$\langle i|i\rangle = 2E_a 2E_b V_a V_b$$

($V_b \equiv V$). Overgangssandsynligheden fås fra S-matricen *såfremt tilstandene er enhedsnormerede*, og det er kun tilstandene

$$|\tilde{i}\rangle \equiv \frac{|i\rangle}{\sqrt{\langle i|i\rangle}} \quad \text{og} \quad |\tilde{f}\rangle \equiv \frac{|f\rangle}{\sqrt{\langle f|f\rangle}}$$

Vi får så fra (1.98), idet overgangssandsynligheden

$$P_{fi} \equiv \frac{N_f}{N_a N_b}$$

indføres,

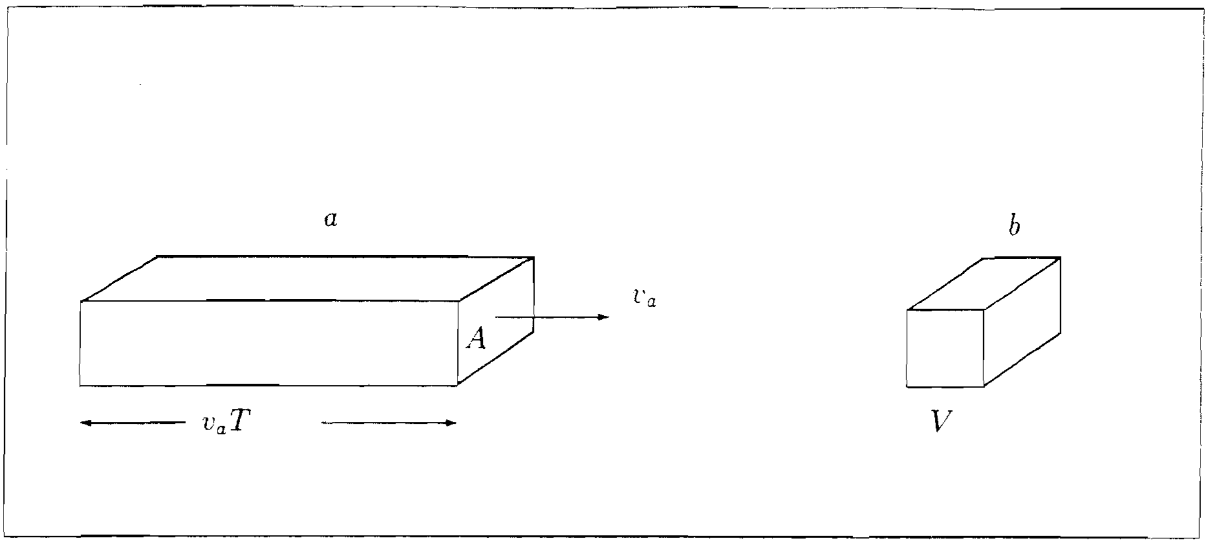
$$\sigma_{fi} = \frac{N_f}{N_a N_b} A = P_{fi} A = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle} A; \quad A = \frac{V_a}{T v_a}$$

hvoraf

$$\sigma_{fi} = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle} \frac{V_a}{T v_a} = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle (2E_a)(2E_b) v_a (VT)} \tag{1.115}$$

1.3.4 Tværsnittet og T-matricen

Det netop fundne udtryk er ikke nyttigt, da det involverer allehånde normeringsvoulmener, som vi i praksis ikke ønsker at skulle holde styr på . Problemet løses dels ved at se på det



Figur 1.9:

differentielle tværsnit, dels ved at benytte T-matricen (1.82) fremfor S-matricen. Som allerede omtalt har T-matricen også den fordel, dels at den har indbygget 4-impulsbevarelse, dels at den har udsepareret den trivielle mulighed, at intet sker. Fra (1.82) får vi

$$|\langle f|S|i\rangle|^2 = [(2\pi)^4\delta^4(p_i - p_f)]^2 |\langle f|T|i\rangle|^2 \tag{1.116}$$

Her har vi taget kvadratet på deltafunktionen, en størrelse, der er endnu mere matematisk suspekt end deltafunktionen selv. Meningen er, at vi altid bør tænke på en situation, hvor vi har endelige (omend meget store) bølgepakker, så at deltafunktioner erstattes med sædvanlige funktioner, der approksimerer deltafunktioner, men for hvilke det at tage kvadratet strengt taget godt kan forsvares. For enhver sådan sædvanlig funktion, $f(x)$, gælder

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$$

hvorfor vi også vil sætte

$$(\delta(x))^2 = \delta(0)\delta(x)$$

eller i vores tilfælde

$$[(2\pi)^4\delta^4(p_i - p_f)]^2 = (2\pi)^4\delta^4(0) \cdot (2\pi)^4\delta^4(p_i - p_f)$$

Videre bruger vi igen deltafunktionens Fourier–transformerede til at skrive

$$(2\pi)^4\delta^4(0) = \int d^4x e^{i0\cdot x} = VT$$

hvor V er "kvantiseringsvolumenet" og T er den tid, eksperimentet tager, så at VT er det "effektive" 4-volumen af vores rum-tid. Igen: i en mere omhyggelig behandling ville integrationen ikke blot være over plane bølger, men over bølgefunktioner, der virkelig forsvandt (bedre: ikke havde noget overlap) uden for dette 4-volumen.

Vi får så

$$\sigma_{fi} = \frac{(2\pi)^4\delta^4(p_i - p_f)|\langle f|T|i\rangle|^2}{\rho_a\rho_b v_a\langle f|f\rangle} \tag{1.117}$$

hvor

$$\rho_a \equiv 2E_a \qquad \rho_b \equiv 2E_b$$

Dette udtryk er stadig behæftet med uønskede normeringsvolumener:

$$\langle f|f\rangle = \prod_i (2E_i V)$$

Vi kommer ud over også dem ved at studere et eksperimentelt set mere fornuftigt tværsnit: det *differentielle* tværsnit. Antag at $|f\rangle$ er på formen

$$|f\rangle = |c_1(p_1), \ldots, c_n(p_n)\rangle$$

Eksperimentelt vil bestemmelsen af impulserne, p_i, altid være behæftet med en vis måleusikkerhed hidrørende fra detektorernes endelige opløsningsevne. Hvad vi kan måle, er derfor *summen* af alle begivenheder, hvor de enkelte impulser ligger inden for et vist område, d^3p_i, omkring p_i. Antallet af kvantetilstande inden for et sådant område er som bekendt (som i elementær kvantemekanik)

$$\prod_i V \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}$$

Heraf fås så

$$d\sigma_{fi} = \frac{1}{v_a \rho_a \rho_b} |\langle f|T|i\rangle|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{n} p_i) \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \cdot \ldots \cdot \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \tag{1.118}$$

Yderligere gælder, at

$$v_a \rho_a \rho_b = 4m_b |\vec{p}_a^{\,Lab}| = 2\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)} \tag{1.119}$$

en form, der eksplicit godtgør, at denne faktor er invariant under Lorentz-transformationer.

Ved integration over en eller flere impulser fås tværsnittet svarende til eksperimenter, hvor en eller flere af partiklernes impulser ikke måles.

1.3.5 Det kvasielastiske tværsnit

Lad os nu i mere detalje studere det kvasielastiske tværsnit, dvs vi betragter

$$a + b \rightarrow c + d \tag{1.120}$$

og (1.118) giver

$$d\sigma = \frac{1}{2}(2\pi)^4 \int \frac{\delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d)}{\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}} |\langle c + d|T|a + b\rangle|^2 \frac{d^3p_c}{(2\pi)^3\, 2E_c} \frac{d^3p_d}{(2\pi)^3\, 2E_d} \tag{1.121}$$

Her vil vi vente med at specificere over hvilke variable, det er underforstået, at vi integrerer. Vha rumparten af δ-funktionen kan vi integrere over $\vec{p}_d$ og får så i tyngdepunktsystemet

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{8\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}} \int \frac{|\vec{p}_c|^2\, d|\vec{p}_c| d\Omega_c}{E_c E_d} |\langle f|T|i\rangle|^2 \delta(E_c + E_d - \sqrt{s}) \tag{1.122}$$

hvor $E_d = \sqrt{\vec{p}_c^{\,2} + m_d^2}$ pga $\vec{p}_c + \vec{p}_d = 0$. Da

$$d|\vec{p}_c| = \frac{d(E_c + E_d)}{d(E_c + E_d)/d|\vec{p}_c|} = \frac{d(E_c + E_d)}{|\vec{p}_c|\,(E_c + E_d)/E_c E_d}$$

fås, efter integration over $E_c + E_d$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = \frac{p_f}{p_i}\left|\frac{\langle f|T|i\rangle}{8\pi\sqrt{s}}\right|^2 \tag{1.123}$$

hvor vi har benyttet lign. (1.38):

$$\sqrt{\lambda} = 2|\vec{p}_a^{\,CM}| = 2|\vec{p}_b^{\,CM}|.$$

Her er $(d\sigma/d\Omega)_{CM}$ det differentielle tværsnit pr. enhedsrumvinkel i tyngdepunktsystemet.

Indføres den invariante impulsoverførsel t vha lign. (1.57) fås

$$dt = 2p_i p_f d\cos\theta$$

og derfor er

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{|\langle c + d|T|a + b\rangle|^2}{16\pi\ \lambda(s, m_a^2, m_b^2)} \tag{1.124}$$

Det er her forudsat, at partiklerne er spinløse, eller at man midler over spin (således at vi får det upolariserede tværsnit). Ellers vil vi ikke kunne integrere afhængigheden af den azimutale vinkel ud i (1.123).

1.3.6 Faserum

I eksklusive processer, med tre eller flere partikler i sluttilstanden, bliver de kinematiske forhold ret komplicerede. Man kan derfor forvente, at de dynamiske effekter også er ret komplicerede.

For at adskille dynamik fra kinematik benytter man ofte såkaldte *faserumsbetragtninger:* Man siger, at den rene kinematik svarer til, at T-matricen er konstant. Tværsnittet (1.118) må da opføre sig som

$$\sigma_{fi} = \frac{\text{konstant}}{\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}} \int \frac{d^3p_1}{2E_1} \cdots \frac{d^3p_n}{2E_n} \delta^4(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{n} p_i) \tag{1.125}$$

Afvigelser fra denne opførsel viser dynamiske effekter.

1.4 Henfald

En proces af typen

$$i \to a_1(p_1) + a_2(p_2) + \cdots + a_n(p_n) \tag{1.126}$$

hvor et system (en partikel) med masse M henfalder til et antal partikler $a_1, a_2, \ldots, a_n$ med masser $m_1, m_2, \ldots, m_n$, kaldes en *henfaldsproces.* En sådan proces er også eksklusiv, idet alle partikler registreres. Ved at gå til i's hvilesystem ses, at en betingelse for henfaldet er, at

$$M \geq m_1 + m_2 + \cdots + m_n \tag{1.127}$$

Impulsbevarelsen

$$P = p_1 + p_2 + \cdots + p_n \tag{1.128}$$

er også særlig simpel i i's hvilesystem. For et henfald til to partikler følger det straks af diskussionen i (1.1.5), at

$$\begin{aligned} |\vec{p}_a| = |\vec{p}_b| &= \frac{\sqrt{\lambda(M^2, m_a^2, m_b^2)}}{2M} \\ E_a &= \frac{M^2 + m_a^2 - m_b^2}{2M} \\ E_b &= \frac{M^2 + m_b^2 - m_a^2}{2M} \end{aligned} \tag{1.129}$$

Som i afsnit (1.3.3) kan vi nu beregne overgangssandsynligheden pr. tidsenhed. Kaldes denne Γ_{fi}, haves (for $N_f \ll N_i$)

$$\Gamma_{fi} = \frac{N_f}{N_i T} = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle T} \quad , \quad \langle i|i\rangle = 2MV \tag{1.130}$$

hvor vi har benyttet tilsvarende betegnelser som i afsn. 1.3.3 (se især lign. (1.115)). Som i (1.116) ff. fås så

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i)|\langle f|T|i\rangle|^2}{2M\langle f|f\rangle} \tag{1.131}$$

Normeringsvolumenet V og tiden T går altså ud igen. Det er klart, at Γ_{fi} har dimensionen 1/(tid).

I almindelighed kan i henfalde til flere sluttilstande. Den totale overgangssandsynlighed pr. tidsenhed er da

$$\Gamma_i = \frac{(2\pi)^4}{2M} \sum_f \delta^4(p_f - p_i) \frac{|\langle f|T|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle} \tag{1.132}$$

Γ_{fi} er den partielle overgangssandsynlighed.

For henfaldet (1.126) fås overgangssandsynligheden (som i afsn. 1.3.4)

$$\begin{aligned} \Gamma_{fi} &= \frac{(2\pi)^4}{2M} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3\, 2E_1} \cdots \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3\, 2E_n} \delta^4(p - p_1 - \cdots - p_n) \\ & |\langle a_1(p_1) + \cdots + a_n(p_n)|T|i(M)\rangle|^2 \end{aligned} \tag{1.133}$$

Ved benyttelse af metoden i afsnit (1.3.5) fås for et henfald til to partikler

$$\frac{d\Gamma_{fi}}{d\Omega} = \frac{\sqrt{\lambda(M^2, m_a^2, m_b^2)}}{64\pi^2 M^3} |\langle f|T|i\rangle|^2 \tag{1.134}$$

Middellevetiden for systemet i defineres ved

$$\tau_i = \frac{1}{\Gamma_i} \tag{1.135}$$

hvor

$$\Gamma_i = \sum_f \Gamma_{fi}$$

Begrundelsen for dette resultat ses således:

Γ_i betegner det totale antal henfaldsbegivenheder (totalt fordi vi tæller alle henfald sammen, uanset hvilken henfaldskanal, der er tale om; for π^+-henfald således både $\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$ og $\pi^+ \to e^+\nu_e$ osv) pr. tidsenhed, relativt til det forhåndenværende sample af henfaldende partikler. Er antallet af endnu ikke henfaldte partikler $N_i(t)$ gælder altså

$$\frac{1}{N_i(t)}\frac{dN_i(t)}{dt} = -\Gamma_i$$

eller

$$N_i(t) = N_i(0)e^{-\Gamma_i t} = N_i(0)e^{-t/\tau_i}$$

Hvis $N_i(0) = 1$, er sandsynligheden for at partiklen henfalder i tidsintervallet $(t, t+dt)$ altså

$$P(t) = \Gamma_i e^{-t\Gamma_i}$$

således at

$$\int_0^\infty dt P(t) = 1$$

Middellevetiden er da

$$< t >= \int_0^\infty dt \cdot tP(t) = -\Gamma_i \frac{d}{d\Gamma_i}\int_0^\infty dt e^{-t\Gamma_i} = -\Gamma_i \frac{d}{d\Gamma_i}\frac{1}{\Gamma_i} = \frac{1}{\Gamma_i} = \tau_i$$

Overgangssandsynligheden for et henfald til tre partikler er givet ved

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2M}\int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3\,2E_1}\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3\,2E_2}\frac{d^3p_3}{(2\pi)^3\,2E_3}\delta^4(p - p_1 - p_2 - p_3)|\langle f|T|i\rangle|^2 \qquad (1.136)$$

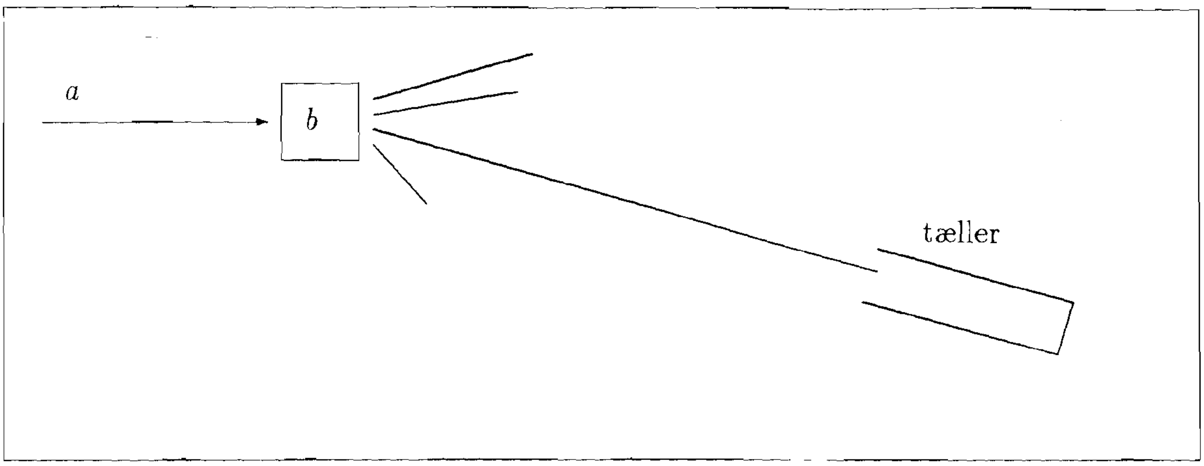
Man kan analysere dette integrals kinematiske indhold (Dalitz-analyse), men resultatet er ret kompliceret og afhænger en del af masserne m_1, m_2 og m_3. Derfor udføres en sådan analyse bedst i forbindelse med konkrete eksempler, hvor der ofte foreligger simplifikationer (fx $m_1 = m_2 = m_3$).

1.5 Inklusive eksperimenter

Indtil nu har vi diskuteret generelle egenskaber ved den relativistiske S-matrix og fundet sammenhængen mellem denne og de eksklusive tværsnit for processer af typen

$$a + b \to c_1(p_1) + c_2(p_2) + \cdots + c_n(p_n) \qquad (1.137)$$

Eksperimenter af typen (1.137) er karakteriseret ved, at sluttilstanden er nøje specificeret. Antallet af uafhængige kinematiske variable nødvendige for beskrivelsen af (1.137) er stort, og den fænomenologiske og dynamiske tydning af givne eksperimentelle data kan derfor være overordentlig kompliceret. Et overblik over forholdene vanskeliggøres i høj grad af, at menneskets visuelle forestillinger begrænser sig til tre dimensioner. Man må derfor (for overblikkets skyld) udvælge nogle ganske få kinematiske variable af gangen,



Figur 1.10: Denne figur illustrerer det inklusive enkeltpartikeltværsnit

afbilde tværsnittets variation med disse få variable og forsøge at uddrage empiriske regler og lovmæssigheder udfra disse afbildninger. Det er klart, at man på denne måde ikke har nogen garanti for at få den mest adekvate fremstilling af de dynamiske forhold i de eksklusive tværsnit.

Den mindst oplysende, men samtidig også den simpleste information om (1.137) får man ved at betragte det totale tværsnit for produktion af n partikler. I det følgende betragter vi en pseudo-verden bestående af identiske, spinløse partikler. Generalisation til en mere realistisk verden med ikke-identiske partikler (evt. med spin) er simpel. I (1.118) fandt vi da, at tværsnittet kunne udtrykkes ved formlen

$$\begin{aligned}\sigma_n(a+b \to c_1 + c_2 + \cdots c_n) &= \frac{(2\pi)^4}{2\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}} \frac{1}{n!} \int \cdots \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3\, 2E_1} \cdots \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3\, 2E_n} \\ &\times \quad \delta^4(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{n} p_i) \\ &\times \quad |\langle c_1(p_1) + \cdots + c_n(p_n)|T|a(p_a) + b(p_b)\rangle|^2 \qquad (1.138)\end{aligned}$$

Faktoren $1/n!$ er en statistisk faktor, der optræder, fordi vi har n identiske partikler i sluttilstanden.

1.5.1 Definition af inklusive eksperimenter

Feynman har diskuteret en klasse af eksperimenter af typen

$$a + b \to c_1(p_1) + c_2(p_2) + \cdots + c_n(p_n) + \text{hvad som helst} \qquad (1.139)$$

Denne klasse af eksperimenter kaldes *inklusive.* (1.139) svarer til en eksperimentel opstilling (fx vha tællere), hvor vi detekterer et vist antal partikler, mens et ukendt antal partikler unddrager sig vore tællers opmærksomhed.

I fig. 1.10 har vi illustreret tilfældet $n = 1$.

1.5.2 Totalt tværsnit og optisk sætning

Det simpleste inklusive eksperiment er det, hvor vi ikke observerer partiklerne i sluttilstanden, dvs

$$a + b \to h.s.h. \tag{1.140}$$

hvor $h.s.h.$ står for "hvad som helst". Dette er altså en sum af tilstande med et varierende antal af partikler. Det eneste bånd på (1.140) er derfor, at den totale CM-energi $\sqrt{s}$ er specificeret, og at partiklerne a og b har bestemte kvantetal. Tværsnittet $\sigma_{ab}(s)$ for (1.140) er åbenbart

$$\sigma_{ab}(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n(s) \tag{1.141}$$

hvor $\sigma_n(s)$ er det i (1.138) definerede tværsnit for produktion af n partikler. Tallet n af partikler kaldes ofte *multipliciteten*, og $\sigma_n(s)$ kaldes da *multiplicitetsfordelingen.*

Det er evident, at tværsnittet σ_{ab} indeholder langt mindre information end produktionstværsnittene σ_n. På den anden side er σ_{ab} på mange måder en let tilgængelig størrelse, fx hvad angår måleligheden.

Der eksisterer en fundamental relation mellem det total tværsnit og den forlæns elastiske amplitude. Går vi tilbage til unitariteten af S-matricen i afsnit 1.2.3, ses af (1.94), at

$$\begin{aligned} Im\langle a+b|T|a+b\rangle &= \frac{1}{2}(2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_a + p_b - p_n) \frac{1}{n!} |\langle n|T|a+b\rangle|^2 \\ &= \sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}\sigma_{ab}(s) \end{aligned} \tag{1.142}$$

Den statistiske faktor $1/n!$ optræder igen pga de identiske partikler, og den anden linie i (1.142) følger (1.138) og (1.141).

Man ser altså, at imaginærdelen af den forlæns T-amplitude kan udtrykkes i termer af totaltværsnittet. Udtrykt i laboratoriet, hvor b er i hvile, fås

$$Im\langle a+b|T|a+b\rangle = 2m_b\sqrt{E_a^2 - m_a^2}\, \sigma_{ab}(s) \tag{1.143}$$

1.5.3 Middelmultiplicitet

Definitionen i (1.141) udtrykker essentielt en normaliseringsbetingelse. Lidt mere information om σ_n får vi ved at definere middelmultipliciteten $\langle n\rangle$,

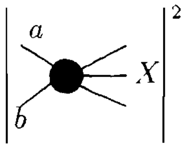
$$\langle n\rangle\sigma_{ab}(s) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} n\sigma_n(s) \tag{1.144}$$

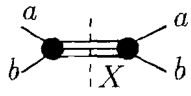
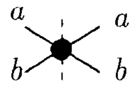
Denne definition er et lån fra statistikken. Hvis produktionstværsnittene $\sigma_n(s)$ er tilstrækkeligt snævre omkring middelværdien $\langle n\rangle$, vil $\langle n\rangle$ være et udtryk for, hvor mange partikler man kan forvente at få produceret ved en given energi $\sqrt{s}$ (i en statistisk forstand).

Tilsvarende defineres

$$\langle n^q\rangle\sigma_{ab}(s) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} n^q\sigma_n(s) \tag{1.145}$$

Et mål for den statistiske spredning er da størrelsen $\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2$. Det inklusive tværsnit (1.141) kan da grafisk illustreres på flg. måde,

$\sigma_{ab} = \sum_X$ 

$= \sum_X$  $\sim \mathrm{Im}$  (1.146)

hvor vi i sidste trin har benyttet den optiske sætning (1.143). Den anden ligning er et udtryk for, at

$$|\langle n|T|a+b\rangle|^2 = \langle a+b|T^\dagger|n\rangle\langle n|T|a+b\rangle$$

Ved at benytte en grafisk symbolik som i (1.146) kan man ofte illustrere relativt komplicerede formler på simpel vis.

Kapitel 2

POINCARÉGRUPPEN

2.1 Hvad er en elementarpartikel?

Vi skal i kurset give forskellige mere eller mindre idealiserede og brugbare svar på dette spørgsmål. I dette kapitel skal vi forsøge en ganske bred definition: *En elementarpartikel er et kvantefysisk system, hvis tilstande transformerer irreducibelt under Poincaré-gruppen.*

Lad os kort forklare begreberne: Poincaré-gruppen og irreducibilitet. *Poincaré-gruppen* er gruppen af Lorentz-transformationer og rum-tids-translationer. At det fysiske system transformerer *irreducibelt* betyder, at vi kan konstruere alle kvantetilstande af systemet ved at anvende gruppetransformationer på én bestemt (vilkårlig) tilstand. Dette er, hvad vi venter for en elementarpartikel: Starter vi med partiklen i hvile i en bestemt spin-tilstand, kan vi danne tilstande med vilkårlig fire-impuls og spin ved at dreje og/eller accelerere partiklen passende.

I modsætning hertil transformerer for eksempel et system bestående af to uafhængige partikler (et sammensat system) *reducibelt*: Starter vi i en situation, hvor begge partikler er i hvile, vil vi ved hjælp af Lorentz-transformationer kunne konstruere mange andre tilstande, men i alle disse vil partiklerne have præcist samme hastighed. Vi kan altså ikke ved hjælp af nogen Lorentz-transformationer danne nogen af de kvantetilstande, hvor partiklerne i det sammensatte system har forskellige hastigheder.

Ovenstående definition kan, som vi skal se, også udtrykkes derved, at elementarpartikler er systemer med veldefinerede masser, spin og statistik. Vi skal i dette kapitel studere den fundamentale sammenhæng mellem den specielle relativitetsteoris krav til naturbeskrivelsen og begreberne fire-impuls og angulært moment.

Den nævnte definition på en elementarpartikel er i praksis for bred i den forstand, at iflg. den er fx et atom i grundtilstanden en elementarpartikel. Men det er på den anden side nyttigt at gøre sig klart, at et atom i grundtilstanden for så vidt *er* en elementarpartikel som det ikke kan afsløre atomets sammensatte natur. Den får vi først noget at vide om ved at studere atomets *ekscitationer*. U-eksciteret derimod, har atomet "ikke andre egenskaber" end masse, spin og impuls, netop som en elementarpartikel.

Ovenstående definition er på den anden side lidt for snæver i den forstand, at ustabile "partikler" ikke regnes med, da de ikke har helt veldefinerede masser.

De Poincaré-transformationer, som iflg. det specielle relativitetsprincip lader vores naturbeskrivelse invariant, er kun sådanne, som kan forbindes kontinuert med identiteten, dvs de bevægelsestilstande af et fysisk system, som kan fås ved kontinuert og konkret at flytte, rotere og accelerere systemet til en anden hastighed. Sådanne transformationer analyseres bedst ved at studere de tilhørende infinitesimale transformationer (sådanne, som kun afviger infinitesimalt fra identiteten). Herved ledes vi til gruppens *Lie-algebra* med dens *generatorer*. Disse generatorer for infinitesimale transformationer er netop systemets vigtigste observable: Fireimpuls-operatoren, spin-operatoren etc.

Skønt det specielle relativitetsprincip ikke udtaler sig om *diskrete* transformationer (sådanne som *ikke* kan forbindes kontinuert med identiteten), er disse dog elementer af Poincaré-gruppen, og det kan derfor forventes, at teorier, som ifølge det specielle relativitetsprincip er tvunget til at være invariant under transformationer, som *kan* forbindes kontinuert med identiteten, også vil have en "naturlig tilbøjelighed" til at være invariant under diskrete transformationer.

Til de diskrete transformationer hører paritets- og tidsomvendelsestransformationerne, og som bekendt synes det også at være en egenskab ved de elektromagnetiske og de stærke vekselvirkninger, at de *er* invariante herunder, medens dette med bestemthed vides *ikke* at være tilfældet med de svage vekselvirkninger.

2.2 Det specielle relativitetsprincip

Lad $\mathcal{O}$ og $\mathcal{O}'$ være to iagttagere i hvile i hvert sit kartesiske inertialsystem S og S'. De beskriver én og samme begivenhed ved forskellige talsæt [1]

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \ : x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x}) = (t, \vec{x}) \\ \mathcal{O}' \ : x'^\mu &= (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (x'^0, \vec{x}\,') = (t', \vec{x}\,') \end{aligned} \tag{2.1}$$

forbundet ved den inhomogene Lorentz-transformation (Poincaré-transformationen)

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu + a^\mu \tag{2.2}$$

Lad os nu betragte en eksperimentel opstilling i hvile i S, som $\mathcal{O}$ bruger til at præparere bestemte kvantetilstande af et fysisk system.

Opstillingen definerer tilstandene vha et fuldstændigt system af observable $\{\mathcal{I}_i\}$. Vi kan fx tænke på opstillingen som en accelerator, der producerer beams af elektroner og positroner og lader dem kollidere. Det fuldstændige sæt af observable kan da fx være fire-impulsoperatorerne for elektronerne og positronerne samt observable, der bestemmer deres spintilstand.

Vi betragter dernæst et *målesystem*, som $\mathcal{O}$ bruger til at udføre målingerne på den tilstand, hans opstilling har præpareret. I ovenstående eksempel kan vi naturligt tænke på et ideelt detektorsystem, som kan måle fire-impulser, spin og arten af alle de partikler, der produceres som følge af sammenstødet mellem e^+ og e^-. Lad et fuldstændigt sæt af operatorer hørende til målesystemet være $\{\mathcal{F}_i\}$ ("$\mathcal{I}$" står for "initial" og "$\mathcal{F}$" for "final").

Lad den tilstand, opstillingen præparerer, være en vis egentilstand af sættet $\{\mathcal{I}_i\}$:

$$\mathcal{I}_i|\{I_i\}\rangle = I_i|\{I_i\}\rangle$$

hvor altså $\{I_i\}$ er sættet af egenværdier hørende til de observable $\{\mathcal{I}_i\}$, og lad en egentilstand svarende til det fuldstændige sæt defineret af målesystemets observable være $|\{F_i\}\rangle$:

$$\mathcal{F}_i|\{F_i\}\rangle = F_i|\{F_i\}\rangle$$

[1] Se kapitel 1 for en mere udførlig gennemgang af notation og gymnastik med Lorentz indices.

Det bemærkes, at vi i relativistisk kvantefysik så godt som altid vil bruge tidsuafhængige tilstande i Heisenberg-billedet. Den særlige rolle, som tidsparameteren har i Schrödinger-billedet, passer meget dårligt til en bekvem formulering af relativitetsprincippet. En fuldstændig *måling* består da i en fastlæggelse af de talværdier, som kvantemekanisk beskrives af

$$|\langle\{F_i\}|\{I_i\}\rangle|^2 \tag{2.3}$$

Lad os nu betragte en ny eksperimentel opstilling med tilhørende detektor-udstyr, nemlig den, som $\mathcal{O}'$ konstruerer ved nøje at følge de samme arbejdstegninger som $\mathcal{O}$ således at $(\mathcal{O}')$'s apparatur i hans koordinater beskrives præcist som $(\mathcal{O})$'s apparatur i hans koordinater. Det specielle relativitetsprincip forlanger nu, at alle de målinger, som $\mathcal{O}'$ udfører, skal stemme overens med de tilsvarende målinger, som $\mathcal{O}$ udfører. Vi ønsker at studere den matematiske formulering heraf.

For det første følger det af relativitetsprincippet, at $\mathcal{O}'$ kan bruge nøjagtig de samme tilstandsvektorer til beskrivelse af sit fysiske system, som $\mathcal{O}$ bruger til beskrivelse af sit. (Strengt taget hører der forskellige Hilbert-rum til forskellige fysiske systemer, men de er her isomorfe, og vi skelner da ikke mellem dem).

Ligesom Poincaré-transformationen (2.2) i vores formulering er en transformation mellem to iagttageres forskellige beskrivelse af samme begivenhed, ønsker vi nu også at definere den kvantemekaniske transformation, som overgangen fra $(\mathcal{O}')$'s til $(\mathcal{O})$'s beskrivelser af *samme* fysiske system. Hvis således $\mathcal{O}$ bruger tilstandsvektoren $|\{I_i\}\rangle$ til beskrivelse af en tilstand af sit system, vil $\mathcal{O}'$ bruge *en anden* tilstand

$$|\{I_i'\}\rangle$$

til beskrivelse af samme tilstand af $(\mathcal{O})$'s system. Er således denne tilstand en enkeltpartikel-tilstand med fire-impuls p^μ i S, er den selvfølgelig en enkeltpartikel-tilstand med fire-impuls

$$p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, p^\nu$$

i systemet S'.

Vi kan nu formulere det specielle relativitetsprincip ved kravene:

1. Den transformation U, der forbinder de tilstandsvektorer $|\{I\}\rangle$ og $|\{I'\}\rangle$ henholdsvis $|\{F\}\rangle$ og $|\{F'\}\rangle$, som benyttes af $\mathcal{O}$ og $\mathcal{O}'$ til beskrivelse af samme tilstande af samme fysiske system, afhænger *kun* af den Poincaré-transformation, (2.2), der forbinder koordinatsystemerne S og S':

   $$|\{I'\}\rangle = U(\Lambda, a)|\{I\}\rangle \quad , \quad |\{F'\}\rangle = U(\Lambda, a)|\{F\}\rangle$$

   Her er altså

   $$\mathcal{I}_i|\{I'\}\rangle = I_i'|\{I'\}\rangle \quad \text{og} \quad \mathcal{F}_i|\{F'\}\rangle = F_i'|\{F'\}\rangle$$

2. For tilstandene i (1) gælder

   $$|\langle\{F'\}|\{I'\}\rangle|^2 = |\langle\{F\}|\{I\}\rangle|^2 \tag{2.4}$$

Det kan vises, at (2.4) medfører, at transformationsoperatoren $U(\Lambda, a)$ *enten* er unitær *eller* antiunitær. Da endvidere $U(\Lambda, a)$ er kontinuert forbundet med identiteten, følger det, at $U(\Lambda, a)$ er en unitær operator:

$$U(\Lambda, a)^{-1} = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = U^\dagger(\Lambda, a) \tag{2.5}$$

(sml. (2.22)).

Observable beskrives kvantemekanisk ved operatorer, som er uafhængige af inertialsystemet, dvs $\mathcal{O}$ og $\mathcal{O}'$ benytter den samme operator for samme observable. Imidlertid transformerer naturligvis *matrix-elementerne* (specielt egenværdierne)af disse operatorer på samme måde som de klassiske variable. Lad os som et eksempel betragte fire-impulsen af en partikel beskrevet af $\mathcal{O}$ ved p^μ og af $\mathcal{O}'$ ved p'^μ:

$$p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, p^\nu$$

hvor p^μ og p'^μ er de egenværdier af den fælles fireimpuls-operator, P^μ, som $\mathcal{O}$ og $\mathcal{O}'$ observerer. Lad os dernæst betragte en bestemt tilstand af partiklen, som $\mathcal{O}$ bruger vektoren $|\alpha\rangle$ til at beskrive, medens $\mathcal{O}'$ bruger vektoren $|\alpha'\rangle$:

$$|\alpha'\rangle = U(\Lambda, a)|\alpha\rangle$$

Da gælder (idet $|\beta\rangle$ og $|\beta'\rangle$ på tilsvarende måde beskriver en anden tilstand)

$$\langle\beta'|P^\mu|\alpha'\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu \, \langle\beta|P^\nu|\alpha\rangle$$

eller

$$\langle\beta|U^\dagger(\Lambda, a)P^\mu \, U(\Lambda, a)|\alpha\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu \, \langle\beta|P^\nu|\alpha\rangle$$

eller, idet $|\alpha\rangle$ og $|\beta\rangle$ er medlemmer af et fuldstændigt sæt,

$$U^\dagger(\Lambda, a)P^\mu \, U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu{}_\nu \, P^\nu \equiv P'^\mu \tag{2.6}$$

hvor vi har fundet det bekvemt at indføre symbolet P'^μ, skønt $\mathcal{O}'$ som før nævnt, benytter samme operator som $\mathcal{O}$. Undertiden er det mere bekvemt at omskrive dette til

$$U(\Lambda, a)P^\mu \, U^\dagger(\Lambda, a) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \, P^\nu \tag{2.7}$$

Vi ser, at under transformationen U transformerer *operatoren* P^μ "modsat" af de klassiske egenværdier.

Et særlig vigtigt eksempel på transformation af operatorer har vi i *felt-operatorer*. En felt-operator er en operator-funktion defineret på mængden af *begivenheder*. Klassisk beskrives feltet som en sædvanlig (reel eller komplex) funktion af begivenhederne. Vi vil kun få brug for felter, der transformerer *lineært* og *homogent* under Poincaré-transformationer.

Lad os først betragte et *klassisk* felt, beskrevet af $\mathcal{O}$ ved funktionen $\phi_r(x)$. Index r står for samlingen af alle de indices, som spiller en rolle for Lorentz-transformationen. Et skalar-felt har således ikke noget index, et vektorfelt har $r = \mu = 0, 1, 2, 3,$ et tensorfelt af rang 2 har $r = (\mu, \nu)$ hvor $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. I kap. 3 skal vi også studere transformationsegenskaberne af Dirac-felter, som beskriver partikler med spin 1/2.

Det samme *klassiske* felt er af $\mathcal{O}'$ beskrevet ved funktionen

$$\phi'_r(x') = S_{rs}(\Lambda)\phi_s(x) \tag{2.8}$$

hvor x' og x er forbundet ved (2.2) $x' = \Lambda x + a$ (i matrix notation). Symbolet S_{rs} er en reel eller komplex matrix, som kun afhænger af Lorentz-transformationen Λ. Vi siger, at S_{rs} er en repræsentation af Lorentz-transformationen, og at feltet $\phi_r(x)$ *bærer* denne repræsentation. I (2.8) har vi naturligvis underforstået summation over alle værdier, som s kan antage.

Det tilhørende kvantefelt beskrives af operatoren Φ_r, som er fælles for de to iagttagere. For en begivenhed, som for $\mathcal{O}$ har koordinaterne x, taler han om $\Phi_r(x)$. Matrixelementerne af disse operatorer transformerer nu som det klassiske felt (2.8). Heraf fås som i (2.6)

$$\Phi'_r(x') \equiv U^\dagger(\Lambda, a)\Phi_r(x')U(\Lambda, a) = S_{rs}(\Lambda)\Phi_s(x)$$

eller

$$U(\Lambda, a)\Phi_r(x)U^\dagger(\Lambda, a) = S^{-1}_{rs}(\Lambda)\Phi_s(\Lambda x + a) \tag{2.9}$$

Et vigtigt specialtilfælde fås ved at sætte $\Lambda = I$ og derfor $S_{rs} = \delta_{rs}$. Så siger (2.9), at

$$U(I, a)\Phi_r(x)U^\dagger(I, a) = \Phi_r(x + a)$$

Sættes videre $x = 0$ og skrives x for a får vi

$$\Phi_r(x) = U(I, x)\Phi_r(0)U^\dagger(I, x) \tag{2.10}$$

2.3 Poincaré-gruppens generatorer

Vi definerer på sædvanlig måde fire-intervallet hørende til begivenhedsdifferentialet dx^ν

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = dx^\mu dx^\nu\ g_{\mu\nu} = dx_\mu dx_\nu\ g^{\mu\nu}$$

hvor vi hæver og sænker indices med den metriske tensor [2]

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{i.e.}\ \ x_\mu = (x_0,\ -\vec{x}) \quad \text{etc.}$$

Invarians af fire-intervallet medfører

$$\Lambda^\mu{}_{\mu'}\Lambda^\nu{}_{\nu'}\ g_{\mu\nu} = g_{\mu'\nu'} \tag{2.11}$$

Alle transformationer Λ, som tilfredsstiller (2.11) kaldes Lorentz-transformationer. Af (2.11) følger straks

$$(\det\Lambda)^2 = +1 \tag{2.12}$$

eller

$$\det\Lambda = \pm 1$$

Endvidere fås ved at sætte $\mu' = \nu' = 0$

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + (\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2 + (\Lambda^3{}_0)^2 \geq 1$$

[2] Se nærmere kaptiel 1.

eller

$$\Lambda^0{}_0 = \begin{cases} \geq +1 \\ \leq -1 \end{cases} \tag{2.13}$$

For Lorentz-transformationer, der kan forbindes kontinuert med identiteten:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad \mu = \nu \\ 0 & \text{for} \quad \mu \neq \nu \end{cases}$$

gælder selvfølgelig det $\Lambda = +1$, $\Lambda^0{}_0 \geq 1$. Sådanne transformationer danner undergruppen af *egentlige, orthochrone* transformationer $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Det er disse, vi først skal studere. Lad $\Lambda^\mu{}_\nu$ være en infinitesimal Lorentz-transformation, så vi kan skrive

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu$$

hvor $\delta\omega^\mu{}_\nu$ er 16 infinitesimale tal. Betingelsen (2.11) for, at Λ virkelig er en Lorentz-transformation, medfører

$$(\delta^\mu_{\mu'} + \delta\omega^\mu{}_{\mu'})\ (\delta^\nu_{\nu'} + \delta\omega^\nu{}_{\nu'})g_{\mu\nu} = g_{\mu'\nu'}$$

eller

$$\begin{aligned} g_{\mu'\nu'} &= \delta^\mu_{\mu'}\ \delta^\nu_{\nu'} g_{\mu\nu} + \delta^\mu_{\mu'}\ d\omega^\nu{}_{\nu'}\ g_{\mu\nu} + \delta\omega^\mu{}_{\mu'}\ \delta^\nu_{\nu'}\ g_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\delta\omega)^2 \\ &= g_{\mu'\nu'} + \delta\omega^\nu{}_{\nu'}\ g_{\mu'\nu} + \delta\omega^\mu{}_{\mu'}\ g_{\mu\nu'} + \mathcal{O}(\delta\omega)^2 \\ &= g_{\mu'\nu'} + \delta\omega_{\mu'\nu'} + \delta\omega_{\nu'\mu'} + \mathcal{O}(\delta\omega)^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Heraf fås

$$\delta\omega_{\mu'\nu'} = -\delta\omega_{\nu'\mu'}$$

altså, at $\delta\omega_{\mu\nu}$ skal være antisymmetrisk.

Øvelse: Vis, at der gælder et tilsvarende resultat for generatorerne for infinitesimale 3-dimensionale rotationer, de orthogonale transformationer.

For en infinitesimal *fire-translation* af længden δx^μ har vi simpelthen

$$a^\mu = \delta x^\mu$$

Til nulte orden i de infinitesimale størrelser $\delta\omega_{\mu\nu}$ og δx_μ har vi $U(\Lambda, a) = 1$, identiteten. Til første orden kan vi indføre visse koefficient-operatorer P_μ og $M_{\mu\nu}$ og skrive

$$U(\Lambda, a) = I + \frac{i}{2}\ \delta\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} + i\delta x_\mu P^\mu \tag{2.15}$$

Disse operatorer vil vise sig at have fundamental betydning for beskrivelsen af vores fysiske system. Således vil P^μ vise sig at være fire-impulsoperatoren, medens $M^{\mu\nu}$ bl.a. vil indeholde systemets spin-operatorer. At dette er tilfældet, skal vi se i de følgende paragraffer. Lad os først gøre nogle almindelige bemærkninger.

En infinitesimal, unitær operator af formen

$$U = I + i\epsilon G$$

hvor ϵ er reel, har en *hermitesk generator* G. Dette ses af

$$\begin{aligned} I = UU^\dagger &= (I + i\epsilon G)(I - i\epsilon G^\dagger) \\ &= I + i\epsilon G - i\epsilon G^\dagger + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= I + i\epsilon(G - G^\dagger) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \Rightarrow G = G^\dagger \end{aligned} \tag{2.16}$$

Allerede heraf vil vi forvente, at gruppens generatorer repræsenterer fysiske observable.

Svarende til den infinitesimale transformation karakteriseret ved parameteren ϵ kan vi nemt danne et udtryk for en vilkårlig endelig transformation, karakteriseret ved en parameter ξ. Vi kan nemlig tænke os den endelige transformation opbygget af N deltransformationer, hver karakteriseret ved parameteren ξ/N, og så lade $N \to \infty$:

$$U(\xi) = \lim_{N\to\infty}\left[U(\frac{\xi}{N})\right]^N = \lim_{N\to\infty}\left[I + i\frac{\xi}{N}G\right]^N = \exp\{i\xi G\}$$

Øvelse: Vis ved at betragte logaritmen, at

$$\lim_{N\to\infty}\left[1 + \frac{x}{N}\right]^N = e^x$$

For en vilkårlig, endelig Lorentz-transformation kan vi så skrive

$$U(\Lambda, 0) = e^{+i/2\ \omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} \tag{2.17}$$

og for en vilkårlig rum-tids-translation

$$U(I, a) = e^{+ia_\mu P^\mu} \tag{2.18}$$

Poincaré-gruppen er et eksempel på en *Lie-gruppe*, et begreb som spiller den allerstørste rolle i moderne partikelfysik.

En Lie-gruppe er en uendelig gruppe forsynet med passende topologi- og differentiabilitetsegenskaber. Specielt kan elementerne parametriseres ved "koordinater", efter hvilke der kan differentieres. Lie-grupper klassificeres bekvemt gennem studiet af de infinitesimale transformationer og de derved fremkomne generatorer.

Som det fremgår af ovenstående behandling af Poincaré-gruppen, danner mængden af generatorer et vektorrum:

Hvis G_1 og G_2 er generatorer og ϵ_1 og ϵ_2 infinitesimale parametre, således at

$$U_1 = I + i\epsilon_1 G_1 \quad \text{og} \quad U_2 = I + i\epsilon_2 G_2$$

er gruppeelementer, så er også

$$U_{12} = I + i(\epsilon_1 G_1 + \epsilon_2 G_2)$$

et gruppeelement. Dette følger af, at $U_{12} = U_1 U_2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, der viser, at U_{12} tilhører gruppen.

Vektorrummet, udspændt af Lie-gruppens generatorer, kaldes *Lie-algebraen*. Dimensionen af vektorrummet kaldes også dimensionen af Lie-algebraen, eller dimensionen af Lie-gruppen.

Vi kan let finde dimensionen af Lorentz- og Poincaré-gruppen. Lorentz-gruppens generatorer er sættet $M^{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$, men da $\omega_{\mu\nu}$ er anti-symmetrisk, er det kun den antisymmetriske del af $M^{\mu\nu}$, der har interesse (den symmetriske del giver jo nul ved kontraktion med $\omega_{\mu\nu}$). Bemærk også, at i summen over μ, ν :

$$\frac{1}{2}\,\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$$

forekommer hver uafhængig generator med vægten 1. Da antallet af uafhængige elementer i en antisymmetrisk 4×4 matrix $(\omega_{\mu\nu})$ er $\frac{1}{2}(4^2 - 4) = 6$, følger det, at

- **dimensionen af Lorentzgruppen er 6;**
- **dimensionen af Poincaré-gruppen er 10.**

Det sidste følger af, at Poincaré-gruppen foruden Lorentz-gruppens generatorer også har rum-tids-translations- generatorerne.

Vi kan også tælle Lorentz-gruppens generatorer på en mere fysisk måde: For at specificere bevægelsen og orienteringen af to inertialsystemer i forhold til hinanden skal vi bruge en hastighedsvektor (3 parametre) samt fx Euler-vinklerne til specifikation af den relative orientering (3 parametre mere).

I det følgende skal vi studere den fysiske betydning af generatorerne P^μ og$M^{\mu\nu}$ og hvorledes de fører til en første klassificering af elementarpartiklerne. Hertil skal vi indføre det for en Lie-algebra centrale begreb: Generatorernes ombytningsrelationer. Lad os imidlertid først se på et simpelt vigtigt eksempel.

2.4 Tidstranslationer

Vi ønsker at vise, at generatoren P^0 for tidstranslationer kan identificeres med systemets Hamilton- eller energioperator (vi betragter kun afsluttede systemer).

Lad os betragte et fysisk system, for hvilket $\{A\}$ er et fuldstændigt sæt af observable. Lad os se på den tilstand af systemet, som er karakteriseret ved, at en måling af disse observable ***til tiden*** $t = t_0$ (t er den tid, $\mathcal{O}$ bruger i sit system, S) giver resultatet $\{\alpha\}$. I Schrödinger-billedet er den pågældende tilstand tidsafhængig, og vi betegner den med

$$|\{\alpha\}, t_0; t\rangle \tag{2.19}$$

altså

$$A_i|\{\alpha\}, t_0; t_0\rangle = \alpha_i|\{\alpha\}, t_0; t_0\rangle$$

Iagttageren $\mathcal{O}'$ vil benytte et inertialsystem S', som er hvile i forhold til S og bruger de samme koordinatakser som S. Kun er urenes gang i S' sådan, at S'-tiden t' er givet ved

$$t' = t + \tau$$

hvor $\tau = a^0$ er tidstranslationen. Af $\mathcal{O}'$ beskrives tilstanden (2.19) på den måde, at til tiden $t' = t_0 + \tau$ (nemlig til tiden $t = t_0$) giver en måling af sættet $\{A\}$ resultatet $\{\alpha\}$. Altså bruger $\mathcal{O}'$ tilstandsvektoren i Schrödinger-billedet

$$|\{\alpha\}, t_0 + \tau; t'\rangle$$

til beskrivelse af samme tilstand. På grund af tids-translations-invarians er imidlertid tilstandene kun afhængige af tidsforskellene. Dvs at i Schrödinger-billedet bruger $\mathcal{O}$ tilstanden $|\{\alpha\}, t - t_0\rangle$ og $\mathcal{O}'$ tilstanden $|\{\alpha\}, t - t_0 - \tau\rangle$. Nu gælder vores transformationslov (1) for tilstandene i Heisenberg-billedet, som vi her vælger at stemme overens med Schrödinger-billedet for $t = 0$ i S, henholdsvis $t' = 0$ i S'. Altså bruger i Heisenberg-billedet $\mathcal{O}$ tilstanden $|\{\alpha\}, -t_0\rangle$ og $\mathcal{O}'$ tilstanden $|\{\alpha\}, -t_0 - \tau\rangle$ og der gælder derfor

$$|\{\alpha\}, -t_0 - \tau\rangle = e^{iP^0\tau}|\{\alpha\}, -t_0\rangle$$

eller (sæt $t_0 \equiv -\tau$)

$$|\{\alpha\}, \tau\rangle = e^{-iP^0\tau}\, |\{\alpha\}, 0\rangle \tag{2.20}$$

der netop udtrykker tidsudviklingen i Schrödinger-billedet for en tilstand med Hamilton-operator $H = P^0$.

2.5 Poincaré-algebraen

Vi ønsker i denne paragraf at finde ombytningsrelationerne (kommutationsrelationerne) mellem alle Poincaré-gruppens 10 generatorer P^μ og $M^{\mu\nu}$. Dette kaldes at bestemme Poincaré-algebraen.

Nøglen til dette problem ligger i den måde to på hinanden følgende Poincaré-transformationer virker på:

$$x^\mu \overset{(\Lambda_1,a_1)}{\longrightarrow} x'^\mu \overset{(\Lambda_2,a_2)}{\longrightarrow} x''^\mu$$

dvs

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda_1^\mu{}_\nu x^\nu + a_1^\mu \\ x''^\mu &= \Lambda_2^\mu{}_\nu x'^\nu + a_2^\mu \\ &= \Lambda_2^\mu{}_\nu(\Lambda_1^\nu{}_\rho x^\rho + a_1^\nu) + a_2^\mu \\ &= (\Lambda_2^\mu{}_\nu \Lambda_1^\nu{}_\rho) x^\rho + (\Lambda_2^\mu{}_\nu a_1^\nu + a_2^\mu) \end{aligned} \tag{2.21}$$

eller [3]

$$U(\Lambda_2, a_2)\, U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \tag{2.22}$$

Lad os først sætte både $\Lambda_1 = I$ og $\Lambda_2 = I$ og betragte rene rumtids-translationer. (2.22) siger da

$$U(I, a_2)\, U(I, a_1) = U(I, a_1 + a_2) = U(I, a_1)\, U(I, a_2)$$

[3]Strengt taget kan vi kun konkludere, at nedenstående ligning skal være opfyldt på nær en multiplikativ fase. Man taler da om en strålerepræsentation (jfr. (2.46)).

Indføres $U(I,a) = e^{+iP^\mu a_\mu}$ og rækkeudvikles til 2. orden i a_1 og a_2 fås

$$\begin{aligned} U(I,a_2)\,U(I,a_1) &\simeq \left[1 + i\,a_2^\mu P_\mu - \frac{1}{2}\,a_2^\mu a_2^\nu P_\mu P_\nu\right]\left[1 + i a_1^{\mu'} P_{\mu'} - \frac{1}{2}\,a_1^{\mu'} a_1^{\nu'} P_{\mu'} P_{\nu'}\right] \\ &= 1 + i a_2^\mu P_\mu + i a_1^{\mu'} P_{\mu'} - a_2^\mu P_\mu a_1^{\mu'} P_{\mu'} \\ &\quad -\frac{1}{2}\,a_2^\mu a_2^\nu P_\mu P_\nu - \frac{1}{2}\,a_1^{\mu'} a_1^{\nu'} P_{\mu'} P_{\nu'} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Da vi ifølge ovenstående skal få samme resultat ved at ombytte a_1 og a_2, slutter vi, at (pas på rækkefølgen af to P-operatorer)

$$a_2^\mu P_\mu a_1^{\mu'} P_{\mu'} = a_1^\mu P_\mu a_2^{\mu'} P_{\mu'} = a_1^{\mu'} P_{\mu'} a_2^\mu P_\mu$$

eller, da a_1 og a_2 er vilkårlige

$$P_\mu P_{\mu'} = P_{\mu'} P_\mu$$

eller

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{2.24}$$

Lad os dernæst se på ombytningsrelationerne mellem P_μ og $M_{\mu\nu}$. Af (2.22) fås

$$U(\Lambda,0)\;U(I,a) = U(\Lambda,\Lambda a)$$

og

$$U(\Lambda,0)\;U(I,a)\;U^{-1}(\Lambda,0) = U(\Lambda,0)\;U(I,a)\;U(\Lambda^{-1},0) = U(\Lambda,\Lambda a)\;U(\Lambda^{-1},0) = U(I,\Lambda a)$$

hvor vi har brugt (2.22) igen.

Heraf fås hvordan translationsoperatoren transformerer under rene (homogene) Lorentz-transformationer:

$$U(\Lambda,0) e^{iP_\mu a^\mu} U^\dagger(\Lambda,0) = e^{iP_\mu(\Lambda a)^\mu} = e^{iP_\mu \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu}$$

eller for infinitesimal a^μ

$$U(\Lambda,0)\,[1 + iP_\mu a^\mu]\,U^\dagger(\Lambda,0) = 1 + i a_\mu U(\Lambda,0) P^\mu\; U^\dagger(\Lambda,0) = 1 + iP^\mu \Lambda_\mu{}^\nu\; a_\nu$$

hvoraf, idet a_μ er vilkårlig,

$$U(\Lambda,0) P^\mu\; U^\dagger(\Lambda,0) = P^\nu \Lambda_\nu{}^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu P^\nu \tag{2.25}$$

der netop er udtrykket for 4-impulsoperatorens transformationsegenskaber, idet $\Lambda_\nu{}^\mu$ ifølge (2.11) er $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$ (jfr. (2.6)).

Da vi allerede har overbevist os om, at P^0 er energioperatoren, og da komponenterne af P^μ transformerer som fire-impulsoperatoren, har vi fuldført beviset for, at generatorerne for rum-tids-translationer netop er 4-impulsoperatorerne.

Ligning (2.24) viser så, at alle komponenter er bevægelseskonstanter: De kommuterer med Hamilton-operatoren P^0. Da de endvidere kommuterer indbyrdes, kan de alle bruges samtidigt til specifikation af en tilstand. Dette er selfølgelig velkendt og ikke overraskende, men det er instruktivt at se hvorledes det følger af Poincaré-algebraen.

Vi bruger nu (2.25) på en infinitesimal Lorentz-transformation

$$U(\Lambda,0) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\,M^{\mu\nu}} \simeq 1 + \frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\omega^2)$$

(2.25) bliver da

$$(1 + \frac{i}{2}\,\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma})P^{\mu}(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}) = (\delta^{\mu}{}_{\nu} - \omega^{\mu}{}_{\nu})P^{\nu}$$

hvor vi har brugt

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \simeq \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} \quad \text{og} \quad (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} \simeq \delta^{\mu}{}_{\nu} - \omega^{\mu}{}_{\nu}$$

Heraf fås

$$\frac{i}{2}\,\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}P^{\mu} - \frac{i}{2}\,\omega_{\rho\sigma}P^{\mu}M^{\rho\sigma} + \mathcal{O}(\omega^2) = -\omega^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu} + \mathcal{O}(\omega^2)$$

eller

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}\,\omega_{\rho\sigma}[M^{\rho\sigma}, P^{\mu}] &= -\,\omega_{\rho\sigma}g^{\rho\mu}P^{\sigma} \\ &= -\frac{1}{2}\,\omega_{\rho\sigma}[g^{\rho\mu}P^{\sigma} - g^{\sigma\mu}P^{\rho}] \end{aligned} \tag{2.26}$$

hvor vi har benyttet, at $\omega_{\rho\sigma}$ er antisymmetrisk. Heraf fås, idet $\omega_{\rho\sigma}$ er vilkårlig (antisymmetrisk)

$$[M^{\rho\sigma}, P^{\mu}] = i(g^{\rho\mu}P^{\sigma} - g^{\sigma\mu}P^{\rho}) \tag{2.27}$$

(Bemærk, at da $\omega_{\rho\sigma}$ er antisymmetrisk, kan vi kun slutte noget om koefficienter til denne tensor hvis også disse er antisymmetriske. Enhver tensor kan skrives som halvdelen af den symmetriserede del plus halvdelen af den antisymmetriserede del. Det er det, vi har brugt.)

Lad os dernæst definere masse-kvadrat-operatoren $\mathcal{M}^2$ ved

$$\mathcal{M}^2 \equiv P_{\mu}P^{\mu} \tag{2.28}$$

for hvilken

$$[P_{\mu}, \mathcal{M}^2] = 0 \tag{2.29}$$

iflg. (2.24). (2.29) viser, at masse-kvadrat-operatoren er translationsinvariant. At den også er Lorentz-invariant, følger af

$$\begin{aligned} [\mathcal{M}^2, M^{\mu\nu}] &= [P_{\rho}P^{\rho}, M^{\mu\nu}] = P_{\rho}P^{\rho}M^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}P_{\rho}P^{\rho} \\ &= P_{\rho}(P^{\rho}M^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}P^{\rho}) + (P_{\rho}M^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}P_{\rho})P^{\rho} \\ &= P_{\rho}[P^{\rho}, M^{\mu\nu}] + [P_{\rho}, M^{\mu\nu}]P^{\rho} \qquad (\text{jfr. } (2.27)) \\ &= i\,P_{\rho}(P^{\mu}\,g^{\rho\nu} - P^{\nu}\,g^{\rho\mu}) + i(P^{\mu}\,g^{\nu}_{\rho} - P^{\nu}\,g^{\mu}_{\rho})P^{\rho} \\ &= i\{P^{\nu}P^{\mu} - P^{\mu}P^{\nu} + P^{\mu}P^{\nu} - P^{\nu}P^{\mu}\} = 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

altså

$$[\mathcal{M}^2, M^{\mu\nu}] = 0 \tag{2.31}$$

Ligningerne (2.24) og (2.27) fortæller, hvorledes 4-impulsoperatoren (dvs 4-translationsgeneratorerne) kommuterer med samtlige Poincaré-algebraens generatorer. (2.31) viser videre, at der findes en invariant kombination: Masse-kvadrat-operatoren.

Vi mangler at finde de indbyrdes ombytningsrelationer mellem $M^{\mu\nu}$-operatorerne. Hertil benytter vi pány (2.22) med $a_1 = a_2 = 0$. Først bemærkes, at

$$U(\Lambda,0)U^{-1}(\Lambda,0) = I = U(I,0) = U(\Lambda\Lambda^{-1},0) = U(\Lambda,0)U(\Lambda^{-1},0) \tag{2.32}$$

altså at $U^{-1}(\Lambda,0) = U(\Lambda^{-1},0)$, et indlysende resultat, vi allerede har benyttet os af. Dernæst fås af (2.22)

$$U(\Lambda,0)U(\Lambda',0)U^{-1}(\Lambda,0) = U(\Lambda\Lambda',0)U^{-1}(\Lambda,0) = U(\Lambda\Lambda'\Lambda^{-1},0) \tag{2.33}$$

Vi indsætter nu (2. orden)

$$\begin{aligned} U(\Lambda,0) &= 1+\frac{i}{2}(\omega M)-\frac{1}{8}(\omega M)(\omega M) \quad , \quad \text{hvor} \quad (\omega M)\equiv \omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \\ U(\Lambda',0) &= 1+\frac{i}{2}(\omega' M)-\frac{1}{8}(\omega' M)(\omega' M) \\ U^{-1}(\Lambda,0) &= 1-\frac{i}{2}(\omega M)-\frac{1}{8}(\omega M)(\omega M) \end{aligned} \tag{2.34}$$

Endvidere $\Lambda = I+\omega+\frac{1}{2}\omega^2$, $\Lambda' = I+\omega'+\frac{1}{2}\omega'^2$, $\Lambda^{-1} = I-\omega+\frac{1}{2}\omega^2$ i matrix-notation. Vi kan opsamle leddene med $\omega\cdot\omega'$ på begge sider af lighedstegnet i (2.33) og få

$$(\frac{i}{2}\omega M)(\frac{i}{2}\omega' M)-(\frac{i}{2}\omega' M)(\frac{i}{2}\omega M) = \frac{i}{2}(\omega\omega'-\omega'\omega)M$$

Venstre side skriver vi

$$-\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega'_{\rho\sigma}[M^{\mu\nu},M^{\rho\sigma}]$$

Højre side er tilsvarende

$$\frac{i}{2}(\omega_{\alpha\beta}\omega'^{\beta}{}_{\gamma}-\omega'_{\alpha\beta}\omega^{\beta}{}_{\gamma})M^{\alpha\gamma} = \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\omega'_{\rho\sigma}(g^{\rho\nu}M^{\mu\sigma}-g^{\sigma\mu}M^{\rho\nu})$$

Vi kan først identificere koefficienterne til $\omega_{\mu\nu}\omega'_{\rho\sigma}$ når disse er antisymmetriserede i $\mu\nu$ og $\rho\sigma$. Dette er allerede tilfældet på venstre side af lighedstegnet. For højre side fås

$$g^{\rho\nu}M^{\mu\sigma}-g^{\sigma\mu}M^{\rho\nu} \to \frac{1}{2}(g^{\rho\nu}M^{\mu\sigma}-g^{\sigma\mu}M^{\rho\nu}-g^{\rho\mu}M^{\nu\sigma}+g^{\sigma\nu}M^{\rho\mu})$$

altså

$$[M^{\mu\nu},M^{\rho\sigma}] = i(-g^{\rho\nu}M^{\mu\sigma}+g^{\sigma\mu}M^{\rho\nu}+g^{\rho\mu}M^{\nu\sigma}-g^{\sigma\nu}M^{\rho\mu}) \tag{2.35}$$

Dermed har vi fuldført opgaven at bestemme Poincaré-algebraen.

2.5.1 Poincaré-algebraens fysiske tolkning

Vi skal nu studere den fysiske betydning af alle disse ombytningsrelationer og herved nå frem til en bestemmelse af den fysiske betydning af generatorerne. Vi har allerede set, at translations-generatorerne P^μ spiller rollen som systemets 4-impuls-operator. Vi skal specielt se, hvorledes operatorerne $M^{\mu\nu}$ indeholder information om systemets spin. Hertil er det bekvemt at indføre en ny notation. Den antisymmetriske tensor $M^{\mu\nu}$ har 6 uafhængige komponenter. Vi indfører nu to 3-vektoroperatorer $\vec{J}$ og $\vec{K}$ som en alternativ beskrivelse for $M^{\mu\nu}$:

$$J_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk} \quad \text{og} \quad K_i = M_{i0} \tag{2.36}$$

Bemærk, at vi bruger græske bogstaver til Lorentz-indices, som løber fra 0 til 3 og latinske bogstaver til sædvanlige 3-dimensionale indices. Symbolet ϵ_{ijk} er det sædvanlige Levi-Civita symbol:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +\ 1 & \text{når } (ijk) \text{ er en lige permutation af } (123) \\ -\ 1 & \text{når } (ijk) \text{ er en ulige permutation af } (123) \\ \ \ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Operatorerne $\vec{J}$ og $\vec{K}$ har ikke nogen simple transformationsegenskaber under Lorentz-transformationer, så vi indfører ikke øvre indices på dem. Vi kan også skrive

$$M^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ -K_1 & 0 & -J_3 & J_2 \\ -K_2 & J_3 & 0 & -J_1 \\ -K_3 & -J_2 & J_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Bemærk, at beskrivelsen af tensoren $M^{\mu\nu}$ ved 3-vektorerne $\vec{K}$ og $\vec{J}$ er helt analog til den velkendte beskrivelse af den elektromagnetiske felttensor $F_{\mu\nu}$ ved de elektriske og magnetiske vektorer $\vec{E}$ og $\vec{H}$.

Vi ser, at operatorerne, J_i vedrører sådanne "Lorentz-transformationer" som ikke vedrører tids-variablen: de sammenblander kun rum-variable. Det viser selvfølgelig, at de er generatorerne for *rumlige rotationer*. Tilsvarende beskriver generatorerne $\vec{K}$ netop de egentlige Lorentz-transformationer. Således vil en Lorentz-transformation af formen

$$e^{-i\xi K_1}$$

beskrive den sædvnalige "elementære" transformation hvor de to inertialsystemer har parallelle akser og bevæger sig langs x-akserne i forhold til hinanden. Operatoren K_1 omtales derfor som en *boost*-operator langs x-aksen (amerikansk: en booster kan for eksempel være en raketmotor, der "booster", dvs accelererer, raketten op til den ønskede hastighed). Tilsvarende betegnes K_2 og K_3 som boost-operatorerne langs y- og z-akserne.

Det er nu en triviel øvelse at omskrive ombytningsrelationerne (2.27) og (2.35) ved hjælp af $\vec{K}$ og $\vec{J}$. Fra (2.27) får vi

$$\begin{aligned} [J_i, P_k] &= i\epsilon_{ikl}\, P_l \\ [J_i, P_0] &= 0 \\ [K_i, P_k] &= i\ P_0\ g_{ik} \\ [K_i, P_0] &= -i\ P_i \end{aligned} \tag{2.38}$$

Tilsvarende giver (2.35)

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\ \epsilon_{ijk}\ J_k \\ [J_i, K_j] &= i\ \epsilon_{ijk}\ K_k \\ [K_i, K_j] &= -i\ \epsilon_{ijk}\ J_k \end{aligned} \tag{2.39}$$

Først en mere "filosofisk" bemærkning. Vi ser, at disse ombytningsrelationer i almindelighed *ikke forsvinder*. Dette er selvfølgelig blot den velkendte situation i kvantemekanik. Men på den anden side udledte vi ombytningsrelationerne udelukkende ud fra gruppeteoretiske betragtninger, og fra den synsvinkel udsiger den manglende ombyttelighed blot, at Poincaré-gruppen ikke er kommutativ, altså at den er, hvad vi kalder *ikke-Abelsk*. Men hvor kommer kvantemekanikken overhovedet ind i billedet? En del af forvirringen kommer af, at vi har sat $\hbar \equiv 1$, samt fra, at den sædvanlige definition af observable indeholder en faktor $\hbar$ mellem fysisk observabel og symmetri-generator. Indføres $\hbar$ overalt, vil vi finde faktorer $\hbar$ på en del af højresiderne af ligningerne (2.38), (2.39). Det er altså kun når $\hbar \neq 0$ at identifikationen mellem observable og symmetrigeneratorer overhovedet kan foretages. Men så er denne identifikation også et udtryk for selve kernen i kvantefysikken.

Lad os derefter kort gennemgå indholdet i de forskellige ombytningsrelationer. Først ligningerne (2.38):

1. Den første ombytningsrelation udsiger dels at impulsen transformerer som en 3-vektor under rotationer, dels at impulsmoment og impuls i almindelighed ikke kommuterer og derfor ikke samtidigt kan benyttes til karakterisering af tilstande; se næste afsnit.

2. Energien er rotationsinvariant og energi og impulsmoment *kan* benyttes til samtidig karakterisering af tilstande.

3. Under en infinitesimal Lorentz-transformation ændrer impulsen sig med et beløb, der afhænger af energien.

4. Tilsvarende ændrer energien sig med et beløb, der afhænger af impulsen.

Tilsvarende tolkes ligningerne (2.39):

1. Impulsmomentet transformerer som en vektor under rotationer, og de forskellige komponenter kommuterer ikke og kan derfor ikke samtidigt benyttes til karakterisering af tilstande.

2. Boost-operatorerne transformerer som vektorer under rotationer.

3. Den sidste ombytningsrelation indeholder blandt andet den berømte relativistiske Thomas-præcessions-effekt, som blandt andet forklarer visse ejendommeligheder i atomspektre. Den udsiger for eksempel, at hvis vi først booster i x-aksens retning og derefter i y-aksens retning, begge gange *uden at foretage nogen drejning af inertialsystemerne*, og bagefter sammenligner det resulterende inertialsystem med det vi får ved på passende måde at booste i den modsatte rækkefølge (først langs y-aksen, så langs x-aksen), så vil de to inertialsystemer være *drejede* i forhold til hinanden! Denne effekt er uforståelig for en fysiker, der er vant til Galilei-transformationer. I vores behandling er denne interessante fysiske effekt "faldet ud" som et automatisk resultat af den gruppeteoretiske undersøgelse. Vi skal i øvrigt ikke komme nærmere ind på Thomas-præcessionen.

2.6 Spin

Af formen (2.37) ses, at generatorerne $\vec{J}$ genererer sådanne Lorentz-transformationer som *ikke* sammenblander rum- og tidskomponenter, men alene vedrører rumkomponenterne. Det er derfor klart, at $\vec{J}$ må være nært forbundet til generatorerne for rotationer. At normaliseringen også er den sædvanlige følger af de første ligninger (2.39), der viser at J adlyder de sædvanlige ombytningsrelationer for angulært moment. Af (2.38) ses, at $\vec{J}$ i almindelighed *ikke* kommuterer med P^μ. Vi kan altså ikke benytte $\vec{J}$ og P^μ til en samtidig karakterisering af en fysisk tilstand. Dog er der en særdeles vigtig undtagelse herfra, som vi vil udnytte til at definere *spinnet for et massivt fysisk system.*

Vi har tidligere set, at ethvert fysisk system har en invariant masse-operator. Vi betragter nu et system i en egentilstand af P^μ og altså også i en egentilstand af $\mathcal{M}^2 = P_\mu P^\mu$, som vi antager $\neq 0$. For sådan et system i en egentilstand af P^μ eksisterer der et inertialsystem, hvor egenværdien af $\vec{P}$ er $= \vec{0}$ (kort 3-impulsen er 0). Dette inertialsystem kaldes hvilesystemet eller tyngdepunktsystemet eller centre-of-mass systemet (c.m.) for det fysiske system.

Af ligningerne (2.38) følger, at i c.m. forsvinder alle *matrixelementer* af kommutatorerne mellem $\vec{J}$ og P^μ. Altså kan vi i dette system bruge operatorerne $\vec{J}$ til en karakterisering af vores fysiske system uden at forstyrre den omstændighed, at $\vec{P} = \vec{0}$ her. Operatorerne $\vec{J}$ benævnes spinoperatorerne i dette system. Fra kvantemekanikken ved vi, at egentilstande af $\vec{J}$ kan karakteriseres ved de ombyttelige operatorer $\vec{J}^2$ og J_3, som har egenværdier af formen

$$\begin{aligned} j(j+1) \quad \text{med} \quad j &= 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}, \dots \quad \text{for} \quad \vec{J}^2 \\ j_3 &= -j,\ \ -j+1, \dots, j-1,\ \ j \quad \text{for} \quad J_3 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Størrelsen j kaldes *spinnet* af det pågældende fysiske system. Det findes altså ved at studere systemets transformationsegenskaber under rotationer i hvilesystemet.

Spinoperatoren, $\vec{J}$ transformerer ikke på simpel måde under Lorentz-transformationer, men der findes en anden, nyttig operator, som er nært beslægtet med $\vec{J}$ og som transformerer som en (pseudo-) 4-vektor. Det er *polarisationsoperatoren* W^σ. Den defineres ved

$$W^\sigma = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\mu\nu} P_\rho \tag{2.41}$$

hvor $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ er den 4-dimensionale Levi-Civita tensor:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +\ 1 & \text{når } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ er en lige permutation af } (0123) \\ -\ 1 & \text{når } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ er en ulige permutation af } (0123) \\ \ \ \ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Øvelse: Vis, at $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ved at sænke indices.

Det er umiddelbart fra definitionen (2.41), at W^σ transformerer som en 4-vektor under homogene egentlige Lorentz-transformationer. Under paritetstransformationer skifter 3-delen ikke fortegn. Den kaldes derfor en pseudo-4-vektor. Dens slægtskab med $\vec{J}$ ses ved at betragte alle *matrixelementer* af den i c.m.-systemet, hvor P_σ har egenværdierne $P_\sigma = (m, 0, 0, 0)$, og hvor m er systemets masse. Idet vi nu underforstår, at vi betragter sådanne matrixelementer, har vi:

$$W^0 = 0$$

da summen på højre side af (2.41) giver nul med mindre $\rho = 0$. Men her giver den også nul, da $\sigma = 0$ og $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ er antisymmetrisk i ρ og σ.

For W^i med $i = 1, 2, 3$ fås tilsvarende kun bidrag, når $\rho = 0$, i hvilket tilfælde vi får

$$W^i = -\frac{1}{2}[\epsilon^{\mu\nu 0 i} M_{\mu\nu} \cdot m]$$

som let ses at give

$$W^1 = mJ_1, \quad W^2 = mJ_2, \quad W^3 = mJ_3 \tag{2.42}$$

ved brug af (2.37).

Den Lorentz-invariante operator

$$W_\sigma W^\sigma \tag{2.43}$$

kommuterer med *alle* Poincaré-algebraens generatorer og kan derfor benyttes på tilsvarende måde som $\mathcal{M}^2 = P_\sigma P^\sigma$ til en invariant karakterisering af "elementarpartikler". At $W_\sigma W^\sigma$ kommuterer med $M_{\mu\nu}$ følger simpelthen af, at $M_{\mu\nu}$ er generatorerne for Lorentz-transformationer, men $W_\sigma W^\sigma$ er *invariant* under sådanne. At $W_\sigma W^\sigma$ kommuterer med P_μ kommer af, at W_σ selv kommuterer med P_μ, hvilket igen følger af, at dette åbenbart er sandt i tyngdepunktsystemet ifølge det foregående, samt af at $[W_\sigma, P_\mu]$ er en Lorentz-tensoroperator.

Hvad vi hermed har lært er, at operatorerne

$$\mathcal{M}^2 = P_\mu P^\mu \qquad \text{samt} \qquad W_\sigma W^\sigma$$

er invariante operatorer, som kommuterer med alle Poincaré-generatorer. Dette betyder, at vi - uanset bevægelsestilstanden for det fysiske system - kan bruge egentilstande af disse to operatorer til at karakterisere systemet. Her har vi brugt, at *alle* bevægelsestilstande af systemet hænger sammen ved Poincaré-transformationer, altså at systemets tilstande transformerer irreducibelt under Poincaré-gruppen (jfr. afsnit 2.1). Egenværdierne er Lorentz-invariante samt tidsuafhængige (kommutation med P^0). Vi har simpelthen bevist, at masse og spin er uforanderlige, karakteristiske egenskaber ved afsluttede (irreducible) fysiske systemer såsom elementarpartikler.

Vi understreger, at vores behandling af spin var helt afhængig af antagelsen om, at systemets masse var større end nul. Masseløse partikler spiller også en stor rolle i elementarpartikelfysikken, og for dem må vi derfor give en anden behandling. Vi skal komme tilbage hertil i afsnit 2.8.

2.7 Helicitet

Heliciteten af en partikel er spinnets projektion på impulsens retning:

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{J} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \tag{2.44}$$

(Bemærk, at der ikke er de store problemer forbundet med at definere, hvad man forstår ved den inverse af $|\vec{P}|$, selv om dette er en operator. Det er nok at definere den på et fuldstændigt sæt, og som et sådant kan vi simpelthen vælge egentilstande af $\vec{P}$, og her er der ingen tvivl - uden for hvilesystemet.) Denne operator er åbenbart rotationsinvariant. For den praktiske beskrivelse af relativistiske partikler med spin er heliciteten ofte at foretrække frem for spinprojektionen på en fast akse (z-aksen), som normalt er den foretrukne beskrivelse i urelativistisk kvantemekanik. Dette hænger sammen med, at spintilstande altid må defineres i hvilesystemet. Tænker vi os imidlertid en spintilstand langs *hvilesystemets* z-akse, er det ikke så klart, hvorledes vi skal interpretere denne tilstands beskrivelse i det system, hvor partiklen har impulsen $\vec{p}$. I almindelighed vil jo nemlig den Lorentz-transformation, der forbinder hvilesystemet med laboratoriesystemet *ikke* kommutere med den *rotation*, der forbinder impulsens retning med z-aksens retning.

Disse komplikationer forsvinder med helicitetsbeskrivelsen, hvor den Lorentz-transformation, der forbinder hvilesystemet med laboratoriesystemet, har *samme retning* som spinnet, således at der ikke bliver mulighed for flertydighed, idet den pågældende Lorentz-boost kommuterer med heliciteten iflg. (2.40). Den anden måde at anskue problemet på er at tænke sig det totale angulære moment opbygget af en "banedel" $\vec{r}\times\vec{p}$ og en indre "spindel". For en kvantemekanisk partikel med bestemt impuls er banedelen ikke veldefineret ($\vec{p}$ og $\vec{r}$ kan ikke samtidigt specificeres), men dens projektion på $\vec{p}$ er 0, således at $\vec{J}\cdot\vec{P}$ entydigt vil være givet ved spindelen alene.

Lad os slutte med at beskrive i detalje hvorledes helicitetstilstande konstrueres.

Vi betragter en partikel med masse m og spin j. Vi ønsker at angive, hvad vi forstår ved tilstanden

$$|j, m;\ \vec{p}, \lambda\rangle \tag{2.45}$$

hvor $\vec{p}$ er partiklens impuls og λ dens helicitet:

$$\lambda = -j,\ -j+1, \ldots,\ j-1,\ j$$

Vi betragter først tilstanden

$$|j, m; \vec{0}, j_3 = \lambda\rangle$$

af partiklen i dens hvilesystem ($\vec{p} = \vec{0}$), hvor spinnets projektion på 3-aksen har værdien λ.

Lad nu Z_p være en "boost-operator" i 3-aksens (z-aksens) retning, som svarer til Lorentz-transformationen fra $p^\mu = (m, \vec{0})$ til $p^\mu = (p^0, 0, 0, p)$, hvor $p = |\vec{p}|$ og $(p^0)^2 - p^2 = m^2$. Vi ved, at Z_p er på formen

$$Z_p = e^{-iK_3\zeta}$$

hvor ζ er et reelt tal, hvis værdi vi ikke vil interessere os for. Lad nu $\vec{p}$'s retning være specificeret ved polære vinkler θ og φ. Vi definerer så

$$|j, m; \vec{p}, \lambda\rangle = e^{-i\varphi J_3}\ e^{-i\theta j_y}\ e^{+i\varphi J_3} e^{-iK_3\zeta} |j, m; \vec{0}, j_3 = \lambda\rangle \tag{2.46}$$

Læseren opfordres til at gøre sig fortrolig med den successive virkning af de forskellige boost- og rotationsoperatorer. Definitionen (2.46) indeholder en bestemt konvention angående fasevalg for tilstanden. Vi skal dog ikke komme nærmere ind på disse tekniske detaljer.

2.8 Masseløse partiklers spin

Vores definition af spin har været baseret på at betragte forholdene i hvilesystemet, som ikke eksisterer for masseløse partikler. Vi ser også af (2.42), at

$$W_\sigma W^\sigma \propto m^2 = 0 \tag{2.47}$$

for $m = 0$, således at denne invariant ikke indeholder særlig meget nyttig information for masseløse partikler.

Vi vil imidlertid nu bevise, at for en masseløs partikel er (middelværdien af) polarisationsoperatoren W^σ proportional med (værdien af) 4-impulsoperatoren, samt at proportionalitetsfaktoren kan fortolkes som partiklens *helicitet.*

Først bemærkes, at

$$[W_\sigma, P^\lambda] = 0 \tag{2.48}$$

Dette følger af definitionen (2.41) for W_σ og af ombytningsrelationerne (2.27) og (2.24).

Øvelse: Vis dette !

Det følger heraf, at vi kan vælge tilstande, $|p, w\rangle$, som er samtidige egentilstande af både fire-impulsen og polarisationsoperatoren. Den sidstes egenværdi kalder vi polarisationsvektoren, w^μ:

$$W^\mu |p, w\rangle = w^\mu |p, w\rangle.$$

Vi indlægger koordinatsystemet, så

$$p^\mu = (p, 0, 0, p) \qquad (|\vec{p}| = p^0 \quad \text{for en masseløs partikel}).$$

Af definitionen (2.41) følger straks, at

$$W^\sigma P_\sigma = 0$$

idet $W^\sigma P_\sigma = -\frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\mu\nu} P_\rho P_\sigma$, og $P_\rho P_\sigma$ er symmetrisk i (ρ, σ), da P_ρ og P_σ kommuterer, medens $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ er antisymmetrisk.

Vi har da

$$p_\sigma w^\sigma = 0 \tag{2.49}$$

Endvidere havde vi

$$w_\alpha w^\alpha = 0 \tag{2.50}$$

idet

$$0 = \langle p, w | W^\sigma W_\sigma | p, w\rangle = w_\sigma \langle p, w | W^\sigma | p, w\rangle = w_\sigma w^\sigma \langle p, w | p, w\rangle$$

(2.49) giver $\quad p(w^0 - w^3) = 0 \quad , \quad w^0 = w^3 \equiv w \quad ;$
(2.50) giver så $\;(w^1)^2 + (w^2)^2 = 0$, eller $\;w^1 = w^2 = 0$.
Altså har vi $\;w^\mu = (w, 0, 0, w)\;$ eller

$$w^\mu = \lambda p^\mu \tag{2.51}$$

Men da både p^μ og w^μ transformerer som 4-vektorer, følger det at *konstanten λ er uafhængig af inertialsystemet.* For en hvilken som helst 4-vektor n^μ kan vi også skrive

$$\lambda = \frac{w^\mu n_\mu}{p^\mu n_\mu}$$

hvor vi altså må få samme resultat for *alle* 4-vektorer n^μ (vi bør dog ikke vælge $n^\mu \propto p^\mu$, idet så λ" ="0/0). Vi benytter nu definitionen (2.41) for W^σ og får

$$\lambda = \frac{\langle p|W^\sigma|p\rangle n_\sigma}{(p^\mu n_\mu)} = \frac{-\frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\langle p|M_{\mu\nu}|p\rangle p_\rho n_\sigma}{(p^\mu n_\mu)}$$

Lad os udregne dette udtryk for $n_\sigma = (1,0,0,0)$:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{-\frac{1}{2}\{\epsilon^{\mu\nu 30}p_3\langle p|M_{\mu\nu}|p\rangle + \epsilon^{\mu\nu 20}p_2\langle p|M_{\mu\nu}|p\rangle + \epsilon^{\mu\nu 10}p_1\langle p|M_{\mu\nu}|p\rangle\}}{p^0} \\
&= -\frac{\{-p_3\langle p|M_{12}|p\rangle + p_2\langle p|M_{13}|p\rangle - p_1\langle p|M_{23}|p\rangle\}}{p_0} \\
&= -\frac{\{p_3\langle J_3\rangle + p_2\langle J_2\rangle + p_1\langle J_1\rangle\}}{p_0} \\
&= \frac{\vec{p}\cdot\langle\vec{J}\rangle}{p_0} = \frac{\vec{p}\cdot\langle\vec{J}\rangle}{|\vec{p}|} \qquad \text{idet} \quad |\vec{p}| = p_0
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Hermed har vi bevist, at λ kan fortolkes som den masseløse partikels helicitet.

Imidlertid er der nu en fundamental forskel på helicitetsforholdene for massive og masseløse partikler. For en massiv partikel med spin j kan vi konstruere helicitetstilstande med alle værdier af λ fra $-j$ til j (spring på 1). Dette skyldes, at vi kan gå til partiklens hvilesystem og derefter booste i en ny retning. Har vi således en partikel med impuls $\vec{p}$, spin j og helicitet $\lambda = +j$, i laboratoriesystemet vil partiklen have impuls $-\vec{p}$ og helicitet $\lambda = -j$ i det inertialsystem, som fremkommer ved først at booste til hvilesystemet og derefter booste til et system, hvor partiklen har samme hastighed, men modsat retning.

En sådan mulighed er helt udelukket for masseløse partikler. Her er

$$w^\mu = \lambda p^\mu$$

en identitet, som gælder eksakt i alle inertialsystemer! *Masseløse partikler findes overhovedet kun med én eneste helicitet a priori!* Den numeriske værdi af λ benævnes spinnet for den masseløse partikel.

Et godt eksempel udgøres af neutrinoerne. Eksperimentelt er neutrinoer masseløse partikler, hvis helicitet altid er $-1/2$: Neutrinoen er venstrehåndet. Antineutrinoer har altid helicitet $= +1/2$. Dette sidste følger af almindelige forhold vedrørende beskrivelse af fermioner.

Lidt anderledes forholder situationen sig med fotoner. Fotoner findes faktisk med helicitet $+1$ såvel som med helicitet -1 (men *ikke* med helicitet 0 !). Dette hænger sammen med, at de elektromagnetiske vekselvirkninger er invariante under paritetstransformationer (se kap. 5). Under en paritetstransformation går en tilstand med helicitet λ over i en tilstand med helicitet $-\lambda$. Som bekendt er de svage vekselvirkninger *ikke* invariante under paritet. Vi kan derfor ikke slutte os til eksistensen af højrehåndede neutrinoer ud fra eksistensen af venstrehåndede neutrinoer i dette tilfælde.

I næste afsnit skal vi undersøge virkningen af paritetsoperatoren generelt.

2.9 Paritet

Paritetstransformationen af koordinaterne af en begivenhed er defineret ved

$$P: \quad t \to t \quad ; \quad \vec{x} \to -\vec{x}$$

Denne transformation kan opfattes som det "normale" resultat af en bestemt Lorentztransformation ($\mathcal{P}$), som blot ikke er forbundet kontinuert med identiteten. Denne meget "specielle" Lorentz-transformation's matrix vil vi betegne med $P^\mu{}_\nu$ (i stedet for $\Lambda^\mu{}_\nu$). Vi har altså

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = P^\mu{}_\nu \, x^\nu \tag{2.53}$$

Matricen $P^\mu{}_\nu$ er på formen

$$P^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

Det er klart, at $\mathcal{P}^2 = I$ eller $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$. Vi kan endvidere finde transformationsegenskaberne for energi, impuls, spin etc. på sædvanlig måde af kompositionsloven for Poincaré-transformationer (2.22) :

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$$

Heraf fås, med $U(\Lambda_2, a_2) = \mathcal{P} = U(P, 0)$:

$$\mathcal{P}U(\Lambda, a) = U(P \cdot \Lambda, P \cdot a) \quad ,\text{og} \tag{2.55}$$

$$\mathcal{P}U(\Lambda, a)\mathcal{P}^{-1} = U(P\Lambda, Pa)\mathcal{P} = U(P\Lambda P, Pa) \tag{2.56}$$

Lad os se på sammenhængen mellem 4-vektorerne a^μ og $(P \cdot a)^\mu$:

$$(P \cdot a)^\mu = P^\mu{}_\nu \, a^\nu = (a^0, -\vec{a}) \equiv (a_P)^\mu \tag{2.57}$$

Vi ser, at 4-vektorerne a^μ samt dens "paritetstransformerede" a^μ_P har samme tidskomponent - men modsatte rumkomponenter.

Videre gælder, idet Λ er en homogen, egentlig Lorentz-transformationsmatrix:

$$(\Lambda_P)^\mu{}_\nu \equiv (P \cdot \Lambda \cdot P)^\mu{}_\nu = P^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\sigma P^\sigma{}_\nu = \sum_{\rho,\sigma} g^{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma g_{\sigma\nu}$$

Resultatet af paritetstransformation af Λ kan så anskueliggøres på følgende figur:

Λ_p :

	−	−	−
−			
−			
−			

Felterne med minus-tegn viser komponenter af Λ_P, som har modsat fortegn af de tilsvarende komponenter i Λ. Tilsvarende har de tomme komponenter samme værdi som i Λ.

Lad os nu betragte en Poincaré-transformation, som er en infinitesimal translation:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^\mu{}_\nu & = & \delta^\mu_\nu \quad \text{og} \quad a^\mu = (\delta a)^\mu \\ U(\Lambda, a) & = & e^{i\delta a_\mu P^\mu} \simeq I + i\delta a_\mu P^\mu \end{array} \tag{2.58}$$

Vi har så:

$$\mathcal{P}U(\Lambda, a)\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}(I + i\delta a_\mu P^\mu)\mathcal{P}^{-1} = I + i\delta a_\mu \mathcal{P}P^\mu\mathcal{P}^{-1} \tag{2.59}$$

[*Bemærk:* $\mathcal{P}$ er en (unitær) *operator*, og P^μ er (4) Hermiteske *operatorer*. δa_μ er fire reelle *tal*, som $\mathcal{P}$ ingen virkning har på. Omvendt er $P^\mu{}_\nu$ *ikke* en operator, men blot en reel *matrix* med komponenterne (2.54)]. Endvidere gælder iflg. (2.56)

$$\begin{aligned}\mathcal{P}U(\Lambda,a)\mathcal{P}^{-1} &= U(P\Lambda P, Pa) = U(I, P\cdot(\delta a)) \\ &= U(I,(\delta a)_P) = I + i(\delta a_P)_\mu P^\mu \end{aligned} \tag{2.60}$$

Ved sammenligning med (2.59), (2.57) og (2.60) fås (idet komponenterne af δa_μ kan antage alle mulige infinitesimale værdier)

$$\begin{aligned}\mathcal{P}P^0\mathcal{P} &= +P^0 \\ \mathcal{P}\vec{P}\mathcal{P} &= -\vec{P}\end{aligned} \tag{2.61}$$

Hermed har vi vist, at 4-impulsoperatoren transformerer under paritet, ganske som vi ventede det.

På helt tilsvarende måde findes ved at betragte en infinitesimal homogen Lorentz-transformation:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\vec{K}\mathcal{P}^{-1} &= -\vec{K} \\ \mathcal{P}\vec{J}\mathcal{P}^{-1} &= +\vec{J}\end{aligned} \tag{2.62}$$

altså boostoperatorerne transformerer som en polær vektor, angulær moment operatorerne som en axial vektor. Det ses let, at $\vec{K}$ og $\vec{J}$ transformerer som vektorer under rotation.

Øvelse: Gennemfør detaljerne.

For helicitetsoperatoren findes så

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\mathcal{H}\mathcal{P}^{-1} &= \mathcal{P}\left(\frac{\vec{J}\cdot\vec{P}}{|\vec{P}|}\right)\mathcal{P}^{-1} \\ &= \frac{\mathcal{P}\vec{J}\mathcal{P}^{-1}\cdot\mathcal{P}\vec{P}\mathcal{P}^{-1}}{|\vec{P}|} = \frac{+\vec{J}\cdot(-\vec{P})}{|\vec{P}|} \\ &= -\mathcal{H}\end{aligned} \tag{2.63}$$

hvor vi har benyttet, at $|\vec{P}|$ er invariant under $\mathcal{P}$ (der gælder jo nemlig $|\vec{P}| = [(P^0)^2 - M^2]^{\frac{1}{2}}$ og P^0 er invariant under $\mathcal{P}$). Vi ser, at helicitetsoperatoren transformerer som en pseudoskalar under paritet (men husk, at $\mathcal{H}$ *ikke* er en Lorentz-invariant for massive partikler, blot en rotationsinvariant).

Vi ser også heraf, at for en helicitetstilstand med impuls p og helicitet λ

$$|\vec{p},\lambda\rangle$$

fås for den paritetstransformerede tilstand, $|\vec{p},\lambda\rangle_P \equiv \mathcal{P}|\vec{p},\lambda\rangle$:

$$\begin{aligned}\vec{P}|\vec{p},\lambda\rangle_P &= \vec{P}\mathcal{P}|\vec{p},\lambda\rangle = -\mathcal{P}\vec{P}|\vec{p},\lambda\rangle = -\vec{p}\mathcal{P}|\vec{p},\lambda\rangle = -\vec{p}|\vec{p},\lambda\rangle_P \;. \\ \text{Og} \qquad \mathcal{H}|\vec{p},\lambda\rangle_P &= \mathcal{H}\mathcal{P}|\vec{p},\lambda\rangle = -\mathcal{P}\mathcal{H}|\vec{p},\lambda\rangle = -\lambda|\vec{p},\lambda\rangle_P\end{aligned} \tag{2.64}$$

hvor vi brugte $\vec{P}\mathcal{P} = -\mathcal{P}\vec{P}$, jfr. (2.61). Vi ser, at den paritetstransformerede tilstand har modsatte egenværdier af $\vec{P}$ og $\mathcal{H}$ i forhold til den oprindelige tilstand. Hvis sættet af helicitetstilstande er fuldstændigt, kan vi da slutte, at

$$|\vec{p},\lambda\rangle_P \equiv \mathcal{P}|\vec{p},\lambda\rangle = \eta|-\vec{p},-\lambda\rangle \tag{2.65}$$

hvor η er en fasefaktor, der altid kan vælges reel, og som er udtryk dels for et konventionsvalg, dels for hvad vi kalder partiklens (systemets) *indre paritet.*

For at nå en definition af begrebet indre paritet uafhængigt af sådanne fasekonventions-valg, må vi se på *egentilstande* af paritetsoperatoren. Sådanne egentilstande kan da ikke være impulstilstande, eller rettere: for impultilstande må vi kræve $\vec{p} = 0$, altså gå til hvilesystemet. Det kan vi gøre for massive partiler, men ikke for masseløse. Vi ser også at vi heller ikke kan benytte helicitetstilstande, men for massive partikler derimod godt spintilstande med spinnet kvantiseret langs en fast akse i hvilesystemet.

For masseløse partikler, må vi se på sådanne superpositioner af impuls- og helicitetstilstande at resultatet bliver en egentilstand af paritetsoperatoren. Men for sådanne superpositioner er paritets-egenværdien delvist en funktion af tilstandens impulsmoment, og det bliver til dels en definitionssag hvilket bidrag vi vælger at kalde "den indre paritet".

Kapitel 3

ELEMENTÆR KVANTEFELTTEORI

3.1 Umuligheden af relativistisk Schrödingerteori

I den elementære kvantemekanik lærer vi, hvorledes enkeltpartikeltilstande beskrives i Schrödingerbilledet. Beskrivelsen er baseret på eksistensen af en bølgefunktion $\psi(\vec{x}, t) = \langle\vec{x}|t\rangle$, som er det kvantemekaniske overlap mellem den tidsafhængige tilstandsvektor $|t\rangle$ og tilstandsvektoren $\langle\vec{x}|$, som beskriver en lokaliseret tilstand af partiklen svarende til, at partiklen er på stedet $\vec{x}$ (i.e. er i en egentilstand af sted-operatoren med egenværdien, $\vec{x}$). Overgangen fra en beskrivelse ved de klassiske variable, energi E og impuls $\vec{p}$, fås da ved i de klassiske bevægelsesligninger at substituere ($\hbar \equiv 1$)

$$E \to i\frac{\partial}{\partial t}$$

$$p_x \to -i\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad p_y \to -i\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad p_z \to -i\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.1}$$

Udtrykket for den frie Hamilton-funktion

$$E = H = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

bliver så til Schrödinger-ligningen for en fri partikel

$$i\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\Delta$$

hvor disse differentialoperatorer skal virke på Schrödinger-bølgefunktionen.

Straks efter fremkomsten af denne formalisme meldte sig spørgsmålet om en Lorentz-invariant generalisation. Denne generalisation viste sig uhyre meget vanskeligere, end man først kunne vente. Efter adskillige forgæves forsøg nåede man til den erkendelse, at en direkte generalisation overhovedet ikke er mulig. Derimod førte anstrengelserne til udviklingen af den relativistiske kvantefeltteori i 30'erne. Det er denne udvikling, vi her kort skal gennemgå og dermed især interessere os for en konsistent beskrivelse af fermioner, - en beskrivelse, vi i næste kapitel vil få brug for i kvarkmodellen, og som vi senere skal bruge ved gennemgangen af de moderne teorier for elementarpartiklernes vekselvirkninger: **Standardmodellen**.

Først bemærker vi, at operatoroversættelsen (3.1) har et kovariant udseende

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) \rightarrow (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla}) = +\, i\,\frac{\partial}{\partial x_\mu} = +\, i\partial^\mu \tag{3.2}$$

et forhold, vi allerede ved, hænger nøje sammen med, at 4-impulsoperatoren er generatoren for rum-tidstranslationer, som jo igen netop kan repræsenteres ved $i\partial^\mu$, når den skal virke på en funktion af (x^μ). Bemærk her, at det er helt afgørende for kovariansen, at Planck's konstant for energier og frekvenser er eksakt den samme som Planck's konstant for impulser og bølgelængder. Det ville ikke have været nødvendigt i en urelativistisk verden.

Da nu 4-impulsen oversættes kovariant, kunne man tænke sig at erstatte Schrödinger-ligningen med en invariant ligning fremkommet ved at anvende det relativistiske udtryk for energien i stedet for $\vec{p}^2/2m$:

$$(p^0)^2 - (\vec{p})^2 = m^2$$

eller med (3.2)

$$\begin{aligned}
(i\partial_\mu)(i\partial^\mu)\psi(x) &= m^2\psi(x) \quad \text{eller} \\
\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2\right)\psi(x) &= m^2\psi(x) \quad \text{eller} \\
\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)\psi(x) &= m^2\psi(x) \quad \text{eller} \\
(-\Box - m^2)\psi(x) &= 0 \qquad\quad \text{eller}
\end{aligned}$$

$$(\Box + m^2)\psi(x) = 0 \tag{3.3}$$

(hvor $\Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu$). Alle disse ækvivalente ligninger, som altså blot udtrykker, at $P_\mu P^\mu = m^2$ for en relativistisk partikel, benævnes *Klein-Gordon-ligningen* og var første forsøg i retning af en Lorentz-invariant Schrödinger-ligning. Det er da også indlysende, at ligningen har løsninger, der synes brugbare til beskrivelse af relativistiske partikler med 4-impuls p^μ:

$$\psi_p(x) = e^{-ip_\mu x^\mu} \tag{3.4}$$

er trivielt en løsning, såfremt $P_\mu P^\mu = m^2$. Vi genkender formen fra bølgefunktionen for en fri partikel i urelativistisk kvantemekanik

$$\psi_p(x) = e^{-iEt}e^{+i\vec{x}\cdot\vec{p}}$$

Her er ganske vist $E = p^0 - m$, men fasefaktoren e^{-imt} har ingen observable konsekvenser, så foreløbigt synes alt godt. Imidlertid er desværre også (3.4) en løsning, hvis $p^0 < 0$ (når blot $(p^0)^2 - (\vec{p})^2 = m^2$), men en sådan løsning synes at unddrage sig fysisk interpretation. Vi kan heller ikke blot erklære disse løsninger med negativ energi for ufysiske. Det kan nemlig vises, at der via vekselvirkninger altid vil kunne ske overgange fra løsninger med $p_0 > 0$ til dem med $p_0 < 0$. Denne omstændighed hænger sammen med, at hvis vi pålægger betingelsen $p^0 > 0$, danner løsningerne (3.4) ikke noget fuldstændigt sæt. Vi skal senere se i feltteorien, hvordan disse løsninger kommer til at optræde som koefficienter til annihilations*operatorer*, og enhver modstrid kan herved undgås.

Lad os imidlertid kort fuldføre den historiske gennemgang. Dirac bemærkede, at Klein-Gordon-ligningen havde en anden skavank i forhold til Schrödinger-ligningen: Den indeholder ingen 1. afledet mht tiden, kun en 2. afledet; men det betyder, at ligningen slet ikke løses ved et sædvanligt randproblem med begyndelsesværdier for $\psi(0,\vec{x})$. Det syntes nærliggende at antage, at denne skavank var beslægtet med forekomsten af både positive og negative løsninger til ligningen

$$(p^0)^2 - (\vec{p})^2 = m^2 \quad \text{eller} \quad p^0 = \pm\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

Dirac satte sig derfor det mål i en eller anden forstand at "uddrage kvadratroden" af Klein-Gordon-ligningen på en sådan måde, at problemet om de negative energier kunne undgås. Dette førte til en af de vigtigste begivenheder i fysikken i dette århundrede: Opstillingen af Dirac-ligningen, som vi nu ved danner udgangspunktet for studiet af fermioner (se afsn. 3.5ff). Men ligningen løste overhovedet *ikke* problemet om de negative energier.

Baggrunden for disse problemer kan føres tilbage til selve definitionen af begrebet: en enkeltpartikel bølgefunktion

$$\psi(\vec{x},t) = \langle \vec{x}|t\rangle$$

som åbenbart benytter eksistensen af *lokaliserede* tilstande $|\vec{x}\rangle$. Sådanne lokaliserede tilstande kan udmærket konstrueres i urelativistisk kvantemekanik:

$$|\vec{x},t\rangle \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}|\vec{p}\rangle\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\, e^{+iEt}$$

som er lokaliseret for tiden $t = 0$. Man har nemlig

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}\,'|\vec{x},t\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\langle \vec{p}\,'|\vec{p}\rangle e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}+iEt}\, e^{+i\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^3p'\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,')e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}+iE\cdot t}\, e^{+i\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'} \end{aligned} \tag{3.5}$$

som for $t = 0$ giver

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}\,'-\vec{x})} = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,') \tag{3.6}$$

Ligning (3.6) viser, at tilstandene $|\vec{x},t\rangle$ er orthonormerede, (for $t = 0$) samt at sættet $\{|p\rangle\}$ er fuldstændigt. Et tilsvarende argument viser, at tilstandene $\{|p\rangle\}$ kan udvikles på tilstandene $|\vec{x},t\rangle$, som derfor *danner* et fuldstændigt sæt. Undervejs anvendte vi normeringsbetingelsen

$$\langle \vec{p}\,'|\vec{p}\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,')$$

men denne er ikke invariant. Argumentet kan højst gælde i et bestemt inertialsystem, og i øvrigt er jo heller ikke $\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,')$ invariant. Vi kan forsøge at anvende den invariante normering

$$\langle \vec{p}\,'|\vec{p}\rangle = 2p^0(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,')$$

I så fald vil vores konklusioner kunne opretholdes i alle inertialsystemer. Desværre viser det sig så, at de konstruerede tilstande ikke bliver lokaliserbare, i hvert fald ikke hvis vi kun bruger tilstande med $p^0 > 0$. For en nærmere redegørelse henvises til opgaverne.

Konklusionen er, at vi i relativistisk kvantefysik helt må opgive at arbejde med nogen generaliseret Schrödinger-ligning. Klein-Gordon-ligningen og Dirac-ligningen vil vise sig at genopstå med fornyet glans, men kun som bevægelsesligninger for *feltoperatorer.*

Vi har set, at selv for frie partikler udgør systemet af enkeltpartikeltilstande med positiv energi ikke noget fuldstændigt sæt! Man kan spørge, hvilke tilstande et fuldstændigt sæt så består af. Svaret vil vise sig at være: Nulpartikeltilstanden (vacuum), enkeltpartikeltilstande, 2-partikeltilstande, 3-partikelstande, ..., hvor alle tilstande indeholder identiske partikler. Hermed er vi imidlertid ført til at betragte et fysisk system med *uendeligt mange frihedsgrader*, nemlig (for eksempel) 4-impulskomponenterne for hver af de vilkårligt mange partikler. Denne situation er radikalt forskellig fra den urelativistiske, hvor vi kan betragte enkeltpartikeltilstande for sig: Her har vi kun 3 frihedsgrader: p_x, p_y, p_z.

Som vi skal se, synes feltteorien som skabt til denne nye situation. En *klassisk* feltteori er beskrevet ved en kontinuert mangfoldighed af frihedsgrader: Feltvariablen $\varphi(\vec{x}, t)$ i hver begivenhed. Kvantiserer vi et sådant klassisk felt, bliver antallet af frihedsgrader diskret, og tilstande *af feltet* viser sig at have en naturlig fortolkning som tilstande med forskelligt antal identiske partikler.

Desværre kan dette program kun gennemføres på en helt simpel måde for spin-0 partikler, af hvilke vi ikke kender nogen fundamentale (π-mesoner antages at bestå af kvarker og altså *ikke* at være fundamentale partikler. Selv om man godt kan indføre et *effektivt* π-felt, bliver en feltteoretisk behandling yderst kompliceret undtaget i simple approximationer). De fundamentale partikler, som vi ønsker at behandle, er kvarker og leptoner (spin-$\frac{1}{2}$ fermioner) samt fotoner, gluoner og intermediære vektorbosoner (spin-1 gaugepartikler). I begge tilfælde byder den feltteoretiske behandling på komplikationer. I GSW-teorien for de svage og elektromagnetiske vekselvirkninger, indføres dog også såkaldte Higgs-bosoner, som netop er spin-0 partikler, muligvis endda ligeså "fundamentale" som de øvrige partikler i Standardmodellen. Higgs-partikler er (endnu?) ikke observeret eksperimentelt.

Under alle omstændigheder behandler vi først spin-0 felter af rent pædagogiske grunde.

3.2 Klassisk feltteori

Lad os først minde om den kanoniske beskrivelse af systemer med et endeligt antal frihedsgrader $\{q_i\}$. Det fysiske system er karakteriseret ved en *Lagrange-funktion*

$$L(q_i, \dot{q}_i)$$

af de generaliserede koordinater $\{q_i\}$ og de tilhørende hastigheder $\{\dot{q}_i\}$. Systemets tidsudvikling mellem de to konfigurationer

$$\text{fra} \quad (q_i^{(1)}(t_1)) \qquad \text{til} \quad (q_i^{(2)}(t_2))$$

findes ved at udvælge den bane i konfigurationsrummet, som minimerer virkningsintegralet

$$S(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t))dt$$

Betingelsen $\delta S = 0$ fører da til Euler-Lagrange-ligningerne

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{3.7}$$

I almindelighed benævnes størrelsen

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{3.8}$$

som den kanonisk konjugerede impuls til q_i. For kanoniske systemer kan ligningerne

$$p_i = p_i(\{q\}, \{\dot{q}\})$$

løses, så vi får udtrykt hastighederne ved impulserne. Indsættes disse udtryk for hastighederne i Lagrange-funktionen og udføres Legendre-transformationen

$$H(p,q) = p\dot{q} - L(q,\dot{q}) \tag{3.9}$$

hvor altså $\{\dot{q}\}$ skal udtrykkes ved $\{p\}$ og $\{q\}$, fås Hamilton-formalismen. Bevægelsesligningerne kan så skrives som Poisson-parenteser

$$\{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \tag{3.10}$$

og der gælder

$$\{q_j, p_i\} = \delta_{ij} \tag{3.11}$$

hvor $\{\ ,\ \}$ er Poisson-parentesen.

Vi generaliserer nu denne formalisme til at inkludere systemer med en kontinuert mangfoldighed af frihedsgrader. Det fysiske system, vi ønsker at betragte, beskrives ved et felt

$$\varphi(\vec{x}, t)$$

hvis værdi i hvert punkt repræsenterer en ny frihedsgrad. Hvis vi skriver

$$\varphi_{\vec{x}}(t) \quad \text{i stedet for} \quad \varphi(\vec{x}, t)$$

kan vi gøre analogien til det diskrete tilfælde tydeligere. I stedet for q skriver vi φ. Både q og φ er funktioner af tiden t. I stedet for index i på q har vi nu et kontinuert index $\vec{x}$ på φ

$$q_i(t) \rightarrow \varphi_{\vec{x}}(t)$$

Vi gør analogien endnu tydeligere ved en approximativ beskrivelse, hvor vi opdeler rummet i små terninger af størrelsen ΔV_i omkring "gitterpunkter" $\vec{x}_i$. Vi indfører så middelværdien

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{\Delta V_i} \int_{(\Delta V_i)} d^3x \ \varphi(\vec{x}, t) \tag{3.12}$$

Som i det diskrete tilfælde er systemets dynamik fastlagt via en Lagrange-funktion, som afhænger af de generaliserede koordinater $\{\varphi_i\}$ og disses tidsafledede

$$L = L(\{\varphi\}, \{\dot{\varphi}\}) \tag{3.13}$$

Vi indskrænker os nu til at betragte såkaldte *lokale* teorier: Sådanne, hvor Lagrange-funktionen kan skrives som en sum

$$L = \sum_i \Delta V_i \mathcal{L}_i(\varphi_i(t), \dot{\varphi}_i(t), \varphi_{i\pm s}(t))$$

hvor de enkelte led i summen kun afhænger af feltværdien i det tilhørende gitterpunkt samt dettes "lokale omegn", samt af den tidsafledede af feltet (den generaliserede hastighed): $(\varphi_{i\pm s}, \dot{\varphi}_i)$. Den kontinuerte generalisation heraf lyder

$$L = \int d^3x \; \mathcal{L} \tag{3.14}$$

hvor

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi(\vec{x},t), \dot{\varphi}(\vec{x},t), \vec{\nabla}\varphi(\vec{x},t))$$

hvor altså L kan skrives som et rumintegral over en Lagrange-*tæthed*, der kun afhænger af feltet i det pågældende rumpunkt, samt af feltets *1. afledede*. Denne indskrænkning til afhængighed af de 1. afledede er den naturlige kovariante generalisation af hastigheds-afhængigheden i sædvanlig Lagrange-formalisme.

Systemets *tidsudvikling* fastlægges ved at forlange, at virkningsintegralet er minimalt, når der pålægges faste begyndelses- og slutkonfigurationer for feltet:

$$0 = \delta S = \delta \int_{-\infty}^{\infty} dt \; L(\{\varphi(t)\} \; , \; \{\dot{\varphi}(t)\}) = \delta \int dt \; d^3x \mathcal{L}(\varphi(x) \; , \; \partial_\mu\varphi(x))$$

hvor vi nu skriver rum- og tidsvariable sammenfattet som $(\vec{x},t) = (x)$, og rum- og tidsafledede sammenfattet som $\partial_\mu\varphi(x)$. For at udføre variationen betragter vi så to forskellige feltfunktioner

$$\varphi(x) \qquad \text{og} \qquad \varphi(x) + \delta\varphi(x)$$

som kun afviger infinitesimalt. Så er

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \; \mathcal{L}\left(\varphi(x) + \delta\varphi(x) \; , \; \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} + \delta\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right) - \int d^4x \; \mathcal{L}(\varphi(x) \; , \; \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}) \\
&= \int d^4x \left[\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)) + \delta\varphi(x)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} + \delta(\partial_\mu\varphi)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} - \mathcal{L}(\varphi(x) \; , \; \partial_\mu\varphi(x))\right] \\
&= \int d^4x \left[\delta\varphi(x)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} + \delta(\partial_\mu\varphi)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Nu er

$$\delta(\partial_\mu\varphi) \equiv \partial_\mu(\varphi + \delta\varphi) - \partial_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + \partial_\mu\delta\varphi - \partial_\mu\varphi = \partial_\mu\delta\varphi$$

Indføres dette og integreres partielt under hensyntagen til, at $\delta\varphi \equiv 0$ for $t = \pm\infty$ og alle $|\vec{x}|$ pr. definition af virkningsintegralet, medens $\delta\varphi = 0$ for $|\vec{x}| = \infty$ og alle t pr. antagelse om, at det fysiske system er begrænset, fås

$$0 = \int d^4x \left[\delta\varphi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \delta\varphi\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right]$$

eller, idet $\delta\varphi$ er arbitrær,

$$\partial_\mu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \tag{3.16}$$

Disse ligninger er de generelle Euler-Lagrange-bevægelsesligninger for enhver feltteori. Bemærk, at virkningsintegralet er en Lorentz-invariant, og at Lagrange-*tætheden* er en Lorentz-skalarfunktion, medens Lagrange-*funktionen* ikke har simple transformationsegenskaber under Lorentz-transformationer.

Ovenstående generaliseres umiddelbart til situationer, hvor $\mathcal{L}$ afhænger af flere felter: $\varphi_r(x)$; $r = 1, 2, \cdots$. (3.16) gælder så for hver komponent for sig.

Lad os nu gå tilbage til den delvis diskrete formulering (3.12), (3.13) og se på de kanonisk konjugerede variable:

$$p_i(t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i(t)} = \Delta\ V_i\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i(t)} \equiv \Delta\ V_i\ \pi_i(t) \tag{3.17}$$

der viser, at det i det kontinuerte tilfælde er mest naturligt at tale om en kanonisk konjugeret impuls*tæthed*

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} \tag{3.18}$$

Af Poisson-parentesen $\{q_j(t),\ p_i(t)\} = \delta_{ij}$ fås så

$$\{\varphi_j(t),\ p_i(t)\} = \delta_{ij} \qquad\qquad \text{(samme } t\text{ !)}$$

eller

$$\Delta\ V_i\{\varphi(\vec{x}_j, t),\ \pi(\vec{x}_i, t)\} = \delta_{ij}$$

Heraf fås, at $\{\varphi(\vec{x}, t),\ \pi(\vec{x}\,', t)\}$ er en funktion med den egenskab, at når man multiplicerer den med et volumenelement og summerer bidragene, hvor $\vec{x}\,'$ vandrer over hele rummet, fås δ_{ij}. Endvidere ses det, at $\{\varphi(\vec{x}, t),\ \pi(\vec{x}\,', t)\} = 0$, hvis $\vec{x}\,' \neq \vec{x}$. Altså

$$\{\varphi(\vec{x}, t),\ \pi(\vec{x}\,', t)\} = \delta^3(\vec{x}\,' - \vec{x}) \tag{3.19}$$

Af udtrykket for Hamilton-funktionen

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

fås

$$H = \int d^3x\ \mathcal{H}$$

hvor Hamilton-*tætheden* er givet ved

$$\mathcal{H} = \pi(x)\dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \tag{3.20}$$

og hvor udtrykket (3.18) for $\pi(x)$ som funkition af $\varphi(x)$, $\vec{\nabla}\varphi$ og $\dot{\varphi}(x)$ skal løses, så $\dot{\varphi}$ bliver udtrykt ved $\pi(x)$, $\varphi(x)$ og $\vec{\nabla}\varphi(x)$.

3.3 Kanonisk kvantisering

Overgangen for klassisk mekanik til kvantemekanik foretages i feltteorien bedst i Heisenberg-billedet, hvor operatorerne er tidsafhængige, mens tilstande er tidsuafhængige. Dette giver den eneste symmetriske behandling af den rum- og tidsafhængighed af feltoperatorerne, som vi har i den klassiske teori.

Et system med et endeligt antal frihedsgrader kvantiseres som bekendt ved at postulere ombytningsrelationer

$$[p_i(t),\ q_j(t)] = -i\delta_{ij} \tag{3.21}$$

Vi kan sammenligne med det klassiske udtryk for Poisson-parentesen

$$\{p_i(t),\ q_j(t)\} = -\delta_{ij}$$

og herved formulere princippet om kanonisk kvantisering således, at klassiske Poisson-parenteser skal erstattes af kommutatorer og multipliceres med i, altså fås af (3.19)

$$[\pi(\vec{x}\,',t),\ \varphi(\vec{x},t)] = -i\delta^3(\vec{x}\,' - \vec{x}) \tag{3.22}$$

samt

$$[\varphi(\vec{x}\,',t),\ \varphi(\vec{x},t)] = [\pi(\vec{x}\,',t),\ \pi(\vec{x},t)] = 0 \tag{3.23}$$

Bevægelsesligningerne samt udtrykket for Hamilton-funktionen overtages uændret i den kvantiserede teori.

3.4 Spin-0-feltet

Vi ønsker nu at konstruere en Lorentz-kovariant, konsistent kvanteteoretisk beskrivelse af frie spin-0 partikler. Vi vil vise, at Lagrange-tætheden

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2) \tag{3.24}$$

løser dette problem, når φ opfattes som et kvantefelt. Lad os først finde bevægelsesligningerne. Vi har

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= -m^2\varphi \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} &= \partial^\mu\varphi \end{aligned} \tag{3.25}$$

(**Bevis:** $\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\,\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2$, så $\frac{\partial\mathcal{L}}{(\partial_\mu\varphi)} = \frac{1}{2}g^{\rho\mu}\partial_\rho\varphi + \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\partial_\sigma\varphi = \partial^\mu\varphi$).

Heraf fås iflg. (3.16):

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right) = \partial_\mu\partial^\mu\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -m^2\varphi$$

eller

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi = 0 \tag{3.26}$$

hvilket er Klein-Gordon-ligningen. Lagrange-tætheden (3.24) er naturligvis netop valgt for at give denne ligning.

Vi har også

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} = \partial^0\varphi(x) = \dot{\varphi}(x) \tag{3.27}$$

altså

$$[\dot{\varphi}(\vec{x}\,',t),\ \varphi(\vec{x},t)] = -i\delta^3(\vec{x}\,' - \vec{x}) \tag{3.28}$$

For at interpretere ombytningsrelationerne (3.28) udvikler vi en vilkårlig løsning til bevægelsesligningerne (3.26) på et fuldstændigt sæt. Et sådant kender vi allerede, nemlig funktionerne

$$\varphi_k(\vec{x},t) = e^{-ik_\mu x^\mu} \tag{3.29}$$

hvor blot $k_\mu k^\mu = m^2$, men hvor vi må (og skal) bruge både positive og negative værdier af k^0. Vi kan så skrive

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2k^0)(2\pi)^3}\left[a(\vec{k})\ e^{-ik_\mu x^\mu} + a^\dagger(\vec{k})\ e^{+ik_\mu x^\mu}\right] \tag{3.30}$$

Her har vi for det første antaget, at $\varphi(x)$ er et Hermitesk felt. Desuden har vi i (3.30) adskilt bidragene med positive og negative k^0-værdier explicit og ændret fortegnet på eksponenten i 2. led, så at

$$k^0 \equiv +\sqrt{m^2+\vec{k}^2}$$

i (3.30). Koefficientfunktionerne i denne udvikling på et fuldstændigt sæt er *operatorer*, $a(\vec{k})$ og $a^\dagger(\vec{k})$, som skal være hermitisk konjugerede, for at $\varphi(x)$ kan blive hermitesk. Integralmålsfaktoren $[(2\pi)^3\cdot 2k^0]^{-1}$ gør, at parentesen bliver Lorentz-invariant. Vi skal undertiden bruge skrivemåden [1]

$$\int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3} \rightarrow \sum_{\vec{k}}$$

når

$$k^0 \equiv +\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$$

altså

$$\varphi(x) = \sum_{\vec{k}}\left[a(\vec{k})\ e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})\ e^{+ikx}\right]$$

Vi har så for det kanonisk konjugerede felt

$$\pi(x) = \dot{\varphi}(x) = i\int\frac{d^3k}{2(2\pi)^3}\left[-a(\vec{k})\ e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})\ e^{ikx}\right]$$

Næste skridt bliver at bestemme ombytningsrelationerne mellem $a(k)$ og $a^\dagger(k)$ og herved vise, at disse er henholdsvis annihilations- og skabelsesoperatorer for partikeltilstande. Hertil benyttes (3.28). Men først må vi løse for $a(k)$ og $a^\dagger(k)$:

$$\begin{aligned}\int d^3x\ e^{+ikx}\varphi(x) &= \int d^3x\ \frac{d^3k'}{2k'^0(2\pi)^3}\left[a(\vec{k}\,')\ e^{-ix(k'-k)} + a^\dagger(\vec{k}\,')\ e^{ix(k'+k)}\right]\\ &= \int\frac{d^3k'}{2k'^0}\left[a(\vec{k}\,')\delta^3(\vec{k}\,'-\vec{k})\ e^{-it(k'^0-k^0)} + a^\dagger(\vec{k}\,')\ e^{it(k'^0+k^0)}\delta^3(\vec{k}\,'+\vec{k})\right]\\ &= \frac{1}{2k^0}\left[a(\vec{k}) + a^\dagger(-\vec{k})e^{2itk^0}\right] \end{aligned} \tag{3.31}$$

Tilsvarende

$$\int d^3x\ e^{ikx}\dot{\varphi}(\vec{x},t) = \frac{i}{2}\left[-a(\vec{k}) + a^\dagger(-\vec{k})e^{2itk^0}\right]$$

[1] jfr. kap.1, afsn. 1.3.2

Af disse to ligninger fås

$$a(\vec{k}) = \int d^3x \; e^{ikx} \left(k^0\varphi(x) + i\dot{\varphi}(x)\right) \tag{3.32}$$

og tilsvarende

$$a^\dagger(\vec{k}\,') = \int d^3y \; e^{-ik'y} \left(k'^0\varphi(y) - i\dot{\varphi}(y)\right)$$

Vi bruger nu fælles tid $t = x^0 = y^0$ og får så af (3.23) og (3.28)

$$\begin{aligned}
\left[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}\,')\right] &= \int d^3x d^3\,y \; e^{i(\vec{k}\,'\cdot\vec{y}-\vec{k}\cdot\vec{x})} \; e^{i(k^0-k'^0)t}[k^0\varphi(\vec{x},t) + i\dot{\varphi}(\vec{x},t),\; k'^0\varphi(\vec{y},t) - i\dot{\varphi}(\vec{y},t)] \\
&= \int d^3x d^3\,y \; e^{i(\vec{k}\,'\cdot\vec{y}-\vec{k}\cdot\vec{x})} \; e^{i(k^0-k'^0)t} \left(ik^0[\dot{\varphi}(\vec{y},t), \varphi(\vec{x},t)] + ik'^0[\dot{\varphi}(\vec{x},t),\; \varphi(\vec{y},t)]\right) \\
&= \int d^3x d^3\,y \; e^{i(\vec{k}\,'\cdot\vec{y}-\vec{k}\cdot\vec{x})} \; e^{i(k^0-k'^0)t} \left(k^0\delta^3(\vec{y}-\vec{x}) + k'^0\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\right) \\
&= \int d^3x \; e^{i\vec{x}\cdot(\vec{k}\,'-\vec{k})} \; e^{i(k^0-k'^0)t}(k^0 + k'^0) \\
&= (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,' - \vec{k}) \; e^{i(k^0-k'^0)t}(k^0 + k'^0) \\
&= (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,' - \vec{k})2k^0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Tilsvarende

$$[a(\vec{k}),\; a(\vec{k}\,')] = [a^\dagger(\vec{k}),\; a^\dagger(\vec{k}\,')] = 0 \tag{3.34}$$

I analogi med

$$\int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3} \to \sum_{\vec{k}}$$

skriver vi somme tider $(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}\,' - \vec{k})2k^0 \to \delta_{\vec{k}\vec{k}\,'}$.[2] Denne notation er konsistent, idet vi har

$$1 = \int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}(2\pi)^3 \; 2k^0\delta^3(\vec{k} - \vec{k}\,') \to \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}\vec{k}\,'} = 1$$

Vi kan så opsummere resultaterne således:

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}\,')] = \delta_{\vec{k}\vec{k}\,'}$$

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}\,')] = [a^\dagger(\vec{k}),\; a^\dagger(\vec{k}\,')] = 0$$

For et bestemt $\vec{k} = \vec{k}\,'$ er dette de velkendte ombytningsrelationer for annihilations- og skabelsesoperatorer for excitationer i den harmoniske oscillator.

[2] jfr. kap.1, afsn. 1.3.2

3.4.1 Teoriens fysiske fortolkning. Fock-rummet

Vi skal nu uddybe interpretationen af $a^\dagger(\vec{k})$ som skabelsesoperatoren for en partikel med impuls $\vec{k}$ og *positiv energi* $k^0 = +(\vec{k}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ samt af $a(k)$ som annihilationsoperatoren for en sådan partikel.

Først bevises, at Hamilton-operatoren er positiv definit, så vi kan være sikre på, at vi er sluppet helt af med tilstande med negativ energi. Vi kan konstruere Hamilton-tætheden af (3.20), men det er lettere at bruge vores resultat fra kapitel 2. Af (2.10) og (2.15) har vi således for δx infinitesimal

$$\begin{aligned}\varphi(\delta x) &= (I + i\delta x_\mu P^\mu)\varphi(0)(I - i\delta x_\mu P^\mu) \\ &= \varphi(0) + i\delta x_\mu [P^\mu, \varphi(0)] \end{aligned} \tag{3.35}$$

men selvfølgelig også

$$\varphi(\delta x) = \varphi(0) + \delta x_\mu \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_\mu} \quad \text{eller} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} = i[P^\mu, \varphi(x)]$$

Heraf fås

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} &= \sum_{\vec{k}} \left[a(\vec{k})\ e^{-ikx}\ (-ik^\mu) + a^\dagger(\vec{k})\ e^{ikx}\ (+ik^\mu)\right] \\ &= i\sum_{\vec{k}} \left[-k^\mu a(\vec{k})\ e^{-ikx} + k^\mu a^\dagger(\vec{k})\ e^{ikx}\right] \\ &= i[P^\mu,\ \varphi(x)] \end{aligned} \tag{3.36}$$

Vi vil nu vise, at løsningen for operatoren P^μ kan skrives

$$P^\mu = \sum_{\vec{k}} k^\mu N(\vec{k}) \tag{3.37}$$

hvor operatoren $N(\vec{k}) = a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})$ betegnes antalsoperatoren Bemærk den totale parallel til de velkendte forhold vedrørende den harmoniske oscillator. Beviset vil vise sig at være en simpel følge af (de sædvanlige harmonisk-oscillator)-ombytningsrelationer, vi nu udleder:

Der gælder klart

$$\begin{aligned}[N(\vec{k}),\ a^\dagger(\vec{k}\,')] &= a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}\,') - a^\dagger(\vec{k}\,')a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) \\ &= a^\dagger(\vec{k})[a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}\,') - a^\dagger(\vec{k}\,')a(\vec{k})] \quad (\text{da} \quad [a^\dagger(\vec{k}\,'), a^\dagger(\vec{k})] = 0) \\ &= a^\dagger(\vec{k})[a(\vec{k}),\ a^\dagger(\vec{k}\,')] = a^\dagger(\vec{k})\delta_{\vec{k}\vec{k}\,'} \end{aligned} \tag{3.38}$$

Tilsvarende gælder

$$[N(\vec{k}), a(\vec{k}\,')] = -a(\vec{k})\delta_{\vec{k}\vec{k}\,'} \tag{3.39}$$

som følger af (3.38), idet $N(\vec{k})$ er hermitesk:

$$(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}))^\dagger = [a(\vec{k})]^\dagger[a^\dagger(\vec{k})]^\dagger = N(\vec{k})$$

Lad os nu karakterisere tilstande vha den hermiteske operator $N(\vec{k})$. Lad $|n(\vec{k})\rangle$ være en egentilstand af $N(\vec{k})$ med egenværdien $n(\vec{k})$. Så gælder

$$n(\vec{k}) \geq 0 \tag{3.40}$$

Thi, hvis $|n(\vec{k})\rangle$ er en normeret tilstand: $\langle n(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle = 1$, så gælder

$$n(\vec{k}) = \langle n(\vec{k})|N(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle = \langle n(\vec{k})|a^\dagger(\vec{k}\,')a(\vec{k}\,')|n(\vec{k}\,')\rangle = \langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$$

hvor

$$|\alpha\rangle \equiv a(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle$$

Endvidere er tilstandene

$$a(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle \quad \text{og} \quad a^\dagger(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle$$

egentilstande af $N(\vec{k})$ med egenværdierne $n(\vec{k}) - 1$ (for $n(\vec{k}) \geq 1$) og $n(\vec{k}) + 1$ henholdsvis:

$$\begin{aligned} N(\vec{k})a(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle &= a(\vec{k})N(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle - a(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle \\ &= (n(\vec{k}) - 1)a(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle \end{aligned} \tag{3.41}$$

hvor (3.39) er brugt, og tilsvarende for $a^\dagger(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle$. Men det betyder, at vi ud fra tilstanden $|n(\vec{k})\rangle$ kan konstruere tilstande med mindre og mindre egenværdier ved at lade $a(\vec{k})$ virke på tilstanden et vilkårligt stort antal gange. På grund af betingelsen (3.40) kan dette ikke fortsættes. Altså må der findes en tilstand $|0(\vec{k})\rangle$, hvor der gælder

$$a(\vec{k})|0(\vec{k})\rangle = 0 = N(\vec{k})|0(\vec{k})\rangle \tag{3.42}$$

hvor altså egenværdien $n(\vec{k}) = 0$. Dette betyder også, at *egenværdierne* $n(\vec{k})$ *er positive hele tal.* Den tilstand, hvor (3.42) gælder for alle værdier af $\vec{k}$, betegnes *vacuumtilstanden* $|0\rangle$:

$$a(\vec{k})|0\rangle = 0 = N(\vec{k})|0\rangle \tag{3.43}$$

Vi kan nu opbygge alle systemets tilstande ved at virke med et passende antal operatorer $a^\dagger(\vec{k})$ på vacuumtilstanden. Vektorrummet udspændt af alle sådanne tilstande danner teoriens Hilbert-rum, og betegnes for sådanne frie, ikke-vekselvirkende teorier, som den, vi her betragter, **Fock-rummet**. For eksempel har tilstanden

$$a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}\,')|0\rangle \equiv |2(\vec{k}),\ 1(\vec{k}\,')\rangle \tag{3.44}$$

egenværdierne $n(\vec{k}) = 2$, $n(\vec{k}\,') = 1$.

Lad os nu gå tilbage til (3.37), som vi lovede at bevise. Vi gør det ved at eftervise, at (3.36) er en følge af (3.37) og ombytningsrelationerne (3.38), (3.39):

$$\begin{aligned} [P^\mu, \varphi(x)] &= \sum_{\vec{k},\vec{k}\,'} k^\mu \left\{[N(\vec{k}),\ a(\vec{k}\,')]\ e^{-ik'x} + [N(\vec{k}),\ a^\dagger(\vec{k}\,')]\ e^{ik'x}\right\} \\ &= \sum_{\vec{k},\vec{k}\,'} k^\mu \left\{-a(\vec{k}\,')\ e^{-ik'x}\delta_{\vec{k}\vec{k}\,'} + a^\dagger(\vec{k}\,')\delta_{\vec{k}\vec{k}\,'}\ e^{ik'x}\right\} \\ &= \sum_{\vec{k}} k^\mu \left\{-a(\vec{k})\ e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})\ e^{ikx}\right\} \end{aligned} \tag{3.45}$$

i overensstemmelse med (3.36).[3]

[3] P^μ er herved kun bestemt på nær led, der kommuterer med feltet: c-tal. Sådanne er uden fysisk betydning, idet vi forlanger $P^\mu|0\rangle = 0$. Spørgsmålet om $P^0|0\rangle \neq 0$ er dog af speciel interesse. Det er relateret til eksistensen af den berømte "kosmologiske konstant", der virkelig synes extremt lille. En diskussion ligger uden for rammerne af dette kursus.

Lad os nu lade P^μ (3.37) virke på en tilstand, der som ovenfor er karakteriseret ved egenværdier af operatorerne $N(\vec{k})$:

$$|\ \rangle = |n(\vec{k}_1),\ n(\vec{k}_2), \cdots\ \rangle$$

Så gælder

$$P^\mu|\ \rangle = \sum_{\vec{k}} k^\mu N(\vec{k})|n(\vec{k}_1),\ n(\vec{k}_2), \cdots\ \rangle = (k_1^\mu\ n(\vec{k}_1) + k_2^\mu\ n(\vec{k}_2) + \cdots\ )|n(\vec{k}_1),\ n(\vec{k}_2), \cdots\rangle$$

der viser, at tilstanden er en egentilstand af operatoren P^μ med egenværdierne

$$p^\mu = k_1^\mu\ n(\vec{k}_1) + k_2^\mu\ n(\vec{k}_2) + \cdots \tag{3.46}$$

Dette udtryk godtgør, at vores teori kun har tilstande med positiv energi. Det skyldes, at alle k_i^0'er er positive og at alle besætningstal, $n(\vec{k}_i)$, ligeledes er positive (hele tal).

Hermed har vi i det væsentlige fuldført analysen af det fysiske indhold i vores simple kvantefeltteori. Lad os opsummere.

Systemet kan karakteriseres ved en beskrivelse af et fuldstændigt sæt af tilstande. Dette sæt indeholder følgende komponenter:

(i) Vacuumtilstanden $|0\rangle$ med 4-impuls $\equiv 0$.

(ii) Enkeltpartikeltilstande, som fås ved at virke med en skabelsesoperator $a^\dagger(\vec{k})$ på vacuumtilstanden:

$$a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$$

Disse tilstande har 4-impuls $p^\mu = k^\mu$, hvor $k^\mu = (k^0, \vec{k})$ og $k^0 = +\sqrt{\vec{k}^{\,2} + m^2}$. Partiklerne har altså masse m. Enkeltpartikeltilstandenes normering er givet ved

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}\,'|\vec{k}\rangle &= \langle 0|a(\vec{k}\,')a^\dagger(\vec{k})|0\rangle \\ &= \langle 0|a(\vec{k}\,')a^\dagger(\vec{k}) - a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}\,')|0\rangle \qquad \text{(sidste led } 0) \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$= \langle 0|[a(\vec{k}\,'), a^\dagger(\vec{k})]|0\rangle = \delta_{\vec{k}\,'\vec{k}}\langle 0|0\rangle$$

eller, idet vi sætter $\langle 0|0\rangle = 1$,

$$\langle \vec{k}\,'|\vec{k}\rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}\,'} \equiv (2k^0)(2\pi)^3\delta^3(\vec{k} - \vec{k}\,') \tag{3.48}$$

som er vores sædvanlige normering af enkeltpartikeltilstande.

(iii) 2-partikeltilstande på formen

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = a^\dagger(\vec{k}_1)a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle$$

Disse adlyder Bose-Einstein statistik:

$$|\vec{k}_2, \vec{k}_1\rangle = a^\dagger(\vec{k}_2)a^\dagger(\vec{k}_1)|0\rangle = a^\dagger(\vec{k}_1)a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle = +|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle \tag{3.49}$$

hvor vi har benyttet

$$[a^\dagger(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] = 0$$

4-impulsindholdet af en 2-partikeltilstand er

$$p^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu$$

Normeringen af en 2-partikeltilstand findes således:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{k}\,'_1, \vec{k}\,'_2|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle &= \langle 0|a(\vec{k}\,'_1)a(\vec{k}\,'_2)a^\dagger(\vec{k}_1)a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle \\
&= \langle 0|a(\vec{k}\,'_1)a^\dagger(\vec{k}_1)a(\vec{k}\,'_2)a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle \\
&+ \langle 0|a(\vec{k}\,'_1)[a(\vec{k}\,'_2),\ a^\dagger(\vec{k}_1)]a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle \\
&= \langle 0|a^\dagger(\vec{k}_1)a(\vec{k}\,'_1)a(\vec{k}\,'_2)a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle \\
&+ \delta_{\vec{k}\,'_2\vec{k}_1}\langle 0|a(\vec{k}\,'_1)a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle + \langle 0|[a(\vec{k}\,'_1), a^\dagger(\vec{k}_1)]a(\vec{k}\,'_2)a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle \\
&= 0 + \delta_{\vec{k}\,'_2\vec{k}_1}\ \delta_{\vec{k}\,'_1\vec{k}_2} + \delta_{\vec{k}\,'_1\vec{k}_1}\ \delta_{\vec{k}\,'_2\vec{k}_2}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

hvor vi har brugt $\langle 0|a^\dagger(\vec{k}_1) = 0$. For $\vec{k}_1 \neq \vec{k}_2$ og $\vec{k}\,'_1 \neq \vec{k}\,'_2$ er dette den sædvanlige normering. Hvis derimod de to partikler er i *samme* kvantetilstand, haves $\langle \vec{k}\,'\vec{k}\,'|\vec{k}, \vec{k}\rangle = 2\delta_{\vec{k}\,'\vec{k}}$. I dette tilfælde er det bekvemmest at omdefinere normeringen med en faktor $\sqrt{\frac{1}{2}}$:

$$|\vec{k}, \vec{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\ a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$$

(iv) Tre- og flerepartikeltilstande konstrueres ved umiddelbar generalisation af 2-partikeltilstandene.

(v) Spinnet af de partikler, som teorien indeholder, er = 0. Dette kommer af, at feltet er en rotationsinvariant (endda en Lorentz- invariant), så at (smlgn. (2.9))

$$\mathcal{R}\varphi(x)\mathcal{R}^\dagger = \varphi(Rx)$$

hvor $\mathcal{R} = U(R, 0)$ er den unitære transformation svarende til en rotation, og R er den reelle 4×4 matrix[4] , som beskriver rotationen af komponenterne af koordinaterne $\vec{x}$. For en infinitesimal rotation med $\epsilon_1 = \omega_{23},\ \epsilon_2 = \omega_{31},\ \epsilon_3 = \omega_{12}$ fås

$$\begin{aligned}
(I + i\vec{\epsilon}\cdot\vec{J})\varphi(x)(I - i\vec{\epsilon}\cdot\vec{J}) &= \varphi(Rx) \\
\varphi(x) + i\vec{\epsilon}\cdot[\vec{J}, \varphi(x)] &= \varphi(Rx)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Vi tænker os nu at udvikle begge sider af lighedstegnet på plane bølger med

$$\varphi(x) = \sum_{\vec{k}}(a(\vec{k})\ e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})\ e^{ikx})$$

Heraf fås

$$\varphi(Rx) = \sum_{\vec{k}}[a(\vec{k})\ e^{-ik(Rx)} + a^\dagger(\vec{k})\ e^{ik(Rx)}]$$

[4]en rumlig rotation er beskrevet ved en 3 × 3 matrix, men her benyttes den fulde Lorentz-transformations-udgave, selv om tidsdelen er triviel

Vi bruger nu, at $k(Rx) = (R^{-1}k)x$ på grund af rotationsinvarians af kx. Derefter erstattes i summen over $\vec{k}$, $\vec{k}$ med $R\vec{k}$, altså

$$\begin{aligned} \varphi(Rx) &= \sum_{R\vec{k}} [a(R\vec{k})\, e^{-ikx} + a^{\dagger}(R\vec{k})\, e^{ikx}] \\ &= \sum_{\vec{k}} [a(R\vec{k})\, e^{-ikx} + a^{\dagger}(R\vec{k})\, e^{ikx}] \end{aligned} \tag{3.52}$$

Vi kan nu gå tilbage til (3.51) og forlange ligningen opfyldt for hver Fourier-komponent. Vi er i virkeligheden kun interesserede i $\vec{k} = \vec{0}$ komponenterne, da det kun er rotationens virkning i hvilesystemet, vi skal undersøge for at bestemme spinnet. For disse finder vi umiddelbart

$$[\vec{J}, a(\vec{0})] = [\vec{J}, a^{\dagger}(\vec{0})] = \vec{0}$$

For at bestemme spinnet af vores partikler skal vi iflg. kap. 2 gå til hvilesystemet for en enkeltpartikeltilstand. Her får vi så

$$\vec{J}|\vec{k} = \vec{0}\rangle = \vec{J}a^{\dagger}(\vec{0})|0\rangle = a^{\dagger}(\vec{0})\vec{J}|0\rangle = 0 \tag{3.53}$$

da $\vec{J}|0\rangle = 0$: vacuum har spin 0. Dette viser, at vores partikler har spin $= 0$.

3.5 Dirac-ligningen

Inden vi behandler den fulde kvantefeltteori for spin-1/2 fermioner, har vi brug for at kende de *klassiske* løsninger til Dirac-ligningen, som er den til Klein-Gordon-ligningen svarende bevægelsesligning for fermionfeltet. Medens det var trivielt at nedskrive et fuldstændigt sæt løsninger til den klassiske Klein-Gordon-ligning, er forholdene langt mere komplicerede for Dirac-ligningen.

Vi skal nu indføre Dirac-ligningen på samme intuitive måde, som Dirac gjorde det. Dens egentlige begrundelse ligger i, at den danner basis for en konsistent beskrivelse af fermioner. Dette skal vi senere se.

Vi søger en differentialligning med følgende egenskaber:

I. Ligningen skal være *lineær* i løsningerne og i de første afledede; linearitet er begrundet i kvantemekanikkens superpositionsprincip; og at Dirac forlangte første ordens afledede hang sammen med et håb om, at problemet med de negative energier derved kunne forsvinde (hvad det *ikke* gjorde!).

II. Klein-Gordon-ligningen skal gælde for løsningerne. Sammen med (I) betyder det, at vi i en passende forstand forsøger at "uddrage kvadratroden af Klein-Gordon-ligningen". Vi har set tidligere i dette kapitel hvorledes Klein-Gordon-ligningen er feltteoriens måde at sige "fri partikel" på .

III. Ligningens løsninger skal tilfredsstille kravet om relativistisk forminvarians. Vi kan udtrykke det mere teknisk ved at sige, at ligningens løsninger skal bære en repræsentation af Poincaré-gruppen. Det var et af de vigtigste resultater af Dirac's undersøgelse, at han således "faldt over" hidtil ukendte repræsentationer af Lorentz- og PoincarÚ-grupperne: de såkaldte *spinor-repræsentationer.*

Disse krav fastlægger (næsten) ligningen. Desuden stillede Dirac en række krav dikteret af hans ønske om at finde en relativistisk Schrödingerteori. En del af disse, men ikke alle, blev opfyldt. Dette skal vi her ikke interessere os for.

Ud fra kravet (I) kan vi skrive ligningen på formen

$$i\gamma_\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu} - m\ \psi(x) = 0$$

hvor vi altså kalder koefficienterne til $\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}$ for $i\gamma_\mu$ og koefficienten til $\psi(x)$ selv for $-m$; det har vi jo lov til. En bekvem, kompakt skrivemåde er

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{3.54}$$

Umiddelbart synes det ganske håbløst, at denne ligning skulle kunne give en kovariant beskrivelse. Koefficienterne γ_μ synes at udgøre en 4-vektor, som så vil udvælge et foretrukket inertialsystem. Som vi skal se, går alt godt, *hvis* vi lader "funktionen" $\psi(x)$ blive en søjle med 4 komponenter

$$(\psi) = (\psi_\alpha) = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \tag{3.55}$$

En sådan søjle kaldes en *spinor*. De 4-komponenter har intet at gøre med rum-tids-komponenter. Som vi senere skal se svarer de til de 4 kvantetilstande af en fermion *eller* en antifermion med spin henholdsvis $+\frac{1}{2}$ eller $-\frac{1}{2}$ langs en bestemt retning. I konsekvens af, at ψ er en søjle, er γ_μ tilsvarende en 4×4-matrix:

$$(\gamma_\mu) = (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \qquad \alpha\beta = 1, 2, 3, 4 \tag{3.56}$$

mens m vil vise sig at være et tal (m) gange 4×4 enhedsmatricen.

Vi bruger nu krav (II), at (3.54) skal medføre Klein-Gordon-ligningen for alle komponenter. For at udnytte dette virker vi på (3.54) med differentialoperatoren $(i\gamma_\nu \partial^\nu + m)$:

$$(i\gamma_\nu \partial^\nu + m)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi = 0$$

eller

$$[-\partial^\nu \partial^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu - im(\gamma_\nu \partial^\nu - \gamma_\mu \partial^\mu) - m^2]\psi = 0$$

eller, da $\partial^\nu \partial^\mu$ er symmetrisk i ν og μ ,

$$[+\frac{1}{2}\ \partial^\nu \partial^\mu (\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu) + m^2]\psi = 0$$

Betingelsen for, at denne ligning er Klein-Gordon-ligningen

$$[\partial^\nu \partial^\mu g_{\mu\nu} + m^2]\psi = 0$$

er, at

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \cdot I \tag{3.57}$$

hvor vi har indført den for Dirac-teorien og fermioner så fundamentale *antikommutator*

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} \equiv \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu$$

hvor produktet af de to gammamatricer skal forstås som et *matrixprodukt*. Foruden matricerne γ_μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, definerer vi også

$$\gamma^\mu \equiv g^{\mu\nu}\gamma_\nu = \begin{cases} \gamma_0 & \text{for} \quad \mu = 0 \\ -\gamma_i & \text{for} \quad \mu = i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Der findes uendeligt mange løsninger til (3.57) eller

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \cdot I$$

($I = 4 \times 4$ enhedsmatricen) men de er alle ækvivalente i den forstand, at de fremgår af hinanden ved ligedannetheds-transformationer, dvs. basisskift. (Bemærk, at da matricerne ikke generelt er unitære, er disse basisskift heller ikke unitære transformationer. Gamma-matricerne bærer med andre ord en ikke-unitær repræsentation af Lorentzgruppen.) En berømt løsning, som vi undertiden vil anvende, er den såkaldte Pauli-Dirac form. Vi definerer først de 4 2×2 matricer

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \tag{3.58}$$

hvor $\vec{\sigma}$ kaldes sættet af Pauli-matricer. Vi har så

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = (\gamma^i) = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

eller mere explicit for eksempel

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

At (3.59) tilfredstiller de ønskede antikommutationsrelationer følger af følgende identiteter for Pauli-matricerne, som let eftervises

$$\sigma_i\sigma_j = I\delta_{ij} + i\ \epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{3.60}$$

Detaljerne overlades til læseren (se også opgaverne).

Lad os dernæst studere ligningens relativistiske kovarians. Som sædvanlig er $\mathcal{O}$ og $\mathcal{O}'$ to iagttagere forbundet ved en homogen Lorentz-transformation :

$$x' = \Lambda x$$

Hvis $\mathcal{O}$ bruger spinoren $\psi(x)$ som løsning til Dirac-ligningen, og $\mathcal{O}'$ bruger $\psi'(x')$ til beskrivelse af samme situation, ønsker vi, at der skal findes en 4×4 matrix $S(\Lambda)$, der ifølge relativitetsprincippet kun afhænger af Λ (jfr. kap. 2), og således at [5]

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda)\psi(x) \tag{3.61}$$

[5] Bemærk, at vi her tænker på et klassisk felt foreløbigt. Jfr. diskussionen i kap. 2.2, specielt ligningerne (2.8) - (2.10).

I komponenter lyder (3.61)

$$\psi'_\alpha(x') = \sum_{\beta=1}^{4} S(\Lambda)_{\alpha\beta}\psi_\beta(x)$$

Vi siger, at matricerne $S(\Lambda)$ er spinorrepræsentationer af Lorentz-gruppen, og at denne repræsentation er båret af spinorerne $\psi(x)$. Vi ønsker nu selvfølgelig, at $\psi'(x')$ også skal være en løsning til Dirac-ligningen i $\mathcal{O}'$-koordinaterne:

$$i\gamma_\mu \frac{\partial\psi'(x')}{\partial x'_\mu} - m\psi'(x') = 0 \tag{3.62}$$

hvoraf

$$i\gamma^\mu\ S(\Lambda)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\rho}\ \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} - m\ S(\Lambda)\ \psi(x) = 0$$

eller - ved at multiplicere med matricen $S^{-1}(\Lambda)$ fra venstre -

$$iS^{-1}\gamma^\mu S\ \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\rho}\ \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} - m\psi(x) = 0$$

(Læseren opfordres til nøje at overveje hvilke bogstaver, der repræsenterer matricer, almindelige tal, søjler, etc.!). Nu er

$$x' = \Lambda x \quad , \quad x = \Lambda^{-1}x' \quad , \quad \text{så} \quad \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu$$

altså

$$i(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\ S^{-1}\gamma^\mu\ S\ \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\rho} - m\psi(x) = 0$$

Betingelsen for, at denne ligning er Dirac-ligningen, er

$$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\ S^{-1}\ \gamma^\mu S = \gamma^\rho$$

eller, da $(\Lambda)^\nu{}_\rho\ (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu$

$$S^{-1}(\Lambda)\ \gamma^\mu\ S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\ \gamma^\nu \tag{3.63}$$

Såfremt der for hver Lorentz-transformation Λ findes en 4×4-matrix $S(\Lambda)_{\alpha\beta}$, der tilfredsstiller (3.63), er den relativistiske kovarians af Dirac-ligningen sikret. Det er her nok at eftervise, at matricen S eksisterer for infinitesimale Lorentz-transformationer, i hvert fald for så vidt angår dem, som kan forbindes kontinuert med identiteten. En infinitesimal Lorentz-transformationen er på formen

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu \qquad (\delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega^{\nu\mu}) \tag{3.64}$$

Vi definerer 4×4 matricerne (6 uafhængige)

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{3.65}$$

eller i komponenter (summation over indeks γ underforstået)

$$(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\left((\gamma_\mu)_{\alpha\gamma}(\gamma_\nu)_{\gamma\beta} - (\gamma_\nu)_{\alpha\gamma}(\gamma_\mu)_{\gamma\beta}\right)$$

Vi påstår så, at til Lorentz-transformationen (3.64) svarer matricen

$$S(\Lambda) = I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\,\delta\omega^{\mu\nu} \tag{3.66}$$

hvor I er 4×4 enhedsmatricen. Først bemærkes, at $S^{-1} = I + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\delta\omega^{\mu\nu}$, hvilket er trivielt til $\mathcal{O}(\delta\omega)$. Vi får så for venstre side af (3.63)

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^\mu S &= (I + \frac{i}{4}\sigma_{\rho\delta}\delta\omega^{\rho\delta})\gamma^\mu(I - \frac{i}{4}\sigma_{\rho\delta}\delta\omega^{\rho\delta}) \\ &= \gamma^\mu + \frac{i}{4}[\sigma_{\rho\delta}, \gamma^\mu]\delta\omega^{\rho\delta} + \mathcal{O}(\delta\omega^2) \\ &= \gamma^\mu - \frac{1}{8}\left[[\gamma^\rho, \gamma^\delta], \gamma^\mu\right]\delta\omega_{\rho\delta} \\ &= \gamma^\mu - \frac{1}{8}\delta\omega_{\rho\delta}\left((\gamma^\rho\gamma^\delta - \gamma^\delta\gamma^\rho)\gamma^\mu - \gamma^\mu(\gamma^\rho\gamma^\delta - \gamma^\delta\gamma^\rho)\right) \end{aligned} \tag{3.67}$$

1. led i parentesen reduceres på flg. måde ved at anvende

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I$$

gentagne gange:

$$\begin{aligned} \gamma^\rho\gamma^\delta\gamma^\mu - \gamma^\delta\gamma^\rho\gamma^\mu &= -\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\delta + 2\gamma^\rho g^{\delta\mu} + \gamma^\delta\gamma^\mu\gamma^\rho - 2\gamma^\delta g^{\rho\mu} \\ &= \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\delta - 2g^{\rho\mu}\gamma^\delta + 2\gamma^\rho g^{\delta\mu} \\ &\quad -\gamma^\mu\gamma^\delta\gamma^\rho + 2g^{\delta\mu}\gamma^\rho - 2\gamma^\delta g^{\rho\mu} \\ &= \gamma^\mu[\gamma^\rho, \gamma^\delta] - 4g^{\rho\mu}\gamma^\delta + 4\gamma^\rho g^{\delta\mu} \end{aligned} \tag{3.68}$$

Indsættes dette, fås

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^\mu S &= \gamma^\mu - \frac{1}{8}\delta\omega_{\rho\delta}(-4g^{\rho\mu}\gamma^\delta + 4\gamma^\rho g^{\delta\mu}) \\ &= \gamma^\mu - \frac{1}{2}(-\delta\omega^\mu{}_\delta\gamma^\delta + \delta\omega_\rho{}^\mu\gamma^\rho) \\ &= \gamma^\mu + \delta\omega^\mu{}_\rho\,\gamma^\rho \qquad (\text{idet}\quad \delta\omega^\mu{}_\delta = -\delta\omega_\delta{}^\mu) \\ &= (\delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu)\gamma^\nu \end{aligned} \tag{3.69}$$

hvorved (3.63) er eftervist.

Dette vigtige resultat beviser teoriens kovarians. Desuden skal vi senere bruge (3.66) til bestemmelse af spinnet af den kvantiserede teoris partikler.

Ovenstående behandling dækker ikke diskrete Lorentz-transformationer, af hvilke vi især skal interessere os for paritetstransformationen, afsn. 2.9:

$$P^\mu{}_\nu = g^{\mu\nu}$$

Betingelsen (3.63) lyder her (vi ser ved paritetstransformationer undtagelsesvise brud på kovariansreglen om at øvre og nedre indices skal svare til hinanden på begge sider af et lighedstegn)

$$S^{-1}(P)\gamma^\mu S(P) = \sum_{\nu=0}^{3} g^{\mu\nu}\gamma^\nu = \gamma_\mu \tag{3.70}$$

En løsning hertil er

$$S(P) = \gamma^0 \tag{3.71}$$

Ifølge $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ har vi nemlig

$$\gamma^0\gamma^0 + \gamma^0\gamma^0 = 2$$

hvoraf

$$(\gamma^0)^2 = I \quad \text{eller} \quad (\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$$

samt

$$\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0 \quad , \quad \text{eller} \quad \gamma^0\gamma^i = -\gamma^i\gamma^0$$

Heraf fås straks, at (3.71) er en løsning til (3.70). Vi skal senere anvende dette resultat til at vise, at fermioner og antifermioner har modsat indre paritet.

γ-matricerne er ikke (alle) hermiteske. Dette ses lettest af den eksplicite repræsentation (3.59). I stedet gælder

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \quad , \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$$

Sammenholdt med ombytningsrelationerne betyder det, at

$$\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu \tag{3.72}$$

Heraf følger også

$$\gamma^0{\sigma_{\mu\nu}}^\dagger\gamma^0 = \sigma_{\mu\nu} \quad \text{og} \quad \gamma^0 S^\dagger\gamma^0 = S^{-1} \tag{3.73}$$

Øvelse : Vis det !

Dette resultat giver os en meget nyttig teknik i hænde, idet vi ud fra en vilkårlig løsning $\psi(x)$ til Dirac-ligningen kan danne såkaldte *bilineære kovarianter*, der transformerer på simpel måde under Lorentz-transformationer. Først definerer vi den til spinoren ψ såkaldt *adjungerede spinor* $\overline{\psi}$:

$$\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \tag{3.74}$$

Bemærk, at ψ er en søjle, medens $\overline{\psi}$ er en række. I repræsentationen (3.59) gælder således, at hvis

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

så er

$$\overline{\psi} = (\psi_1^*, \quad \psi_2^*, \quad -\psi_3^*, \quad -\psi_4^*)$$

Vi påstår nu, at under Lorentz-transformationer transformerer

$$\left.\begin{array}{lr} S \equiv \overline{\psi}(x)\psi(x) & \text{som en skalar} \\ V^\mu \equiv \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) & \text{som en 4-vektor} \\ T^{\mu\nu} \equiv \overline{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x) & \text{som en tensor} \end{array}\right\} \tag{3.76}$$

Disse påstande bevises meget let ved først at udlede reglen for at Lorentz-transformere en adjungeret spinor:

$$\begin{array}{rcl} \psi(x) & \rightarrow & \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \Rightarrow \\ \psi^\dagger(x) & \rightarrow & \psi'^\dagger(x') = \psi^\dagger(x)S(\Lambda)^\dagger \Rightarrow \\ \overline{\psi}(x) & \rightarrow & \overline{\psi}'(x') = \psi^\dagger(x)S(\Lambda)^\dagger\gamma_0 \\ & = & \overline{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda) \end{array} \tag{3.77}$$

Herefter bevises f. eks. den mellemste påstand i (3.76) således:

$$\begin{aligned}\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) &\rightarrow \overline{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda)\psi(x) \\ &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\ \overline{\psi}(x)\gamma^{\nu}\psi(x) \quad (\text{se } (3.63))\end{aligned} \tag{3.78}$$

som påstået. Vi indfører nu γ_5-matricen

$$\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

i repræsentationen (3.59), for hvilken der gælder

$$\{\gamma^{\mu},\ \gamma^5\} = 0 \tag{3.80}$$

hvilket let vises af (3.79).

Der gælder så, at

$$\begin{aligned} P &\equiv \overline{\psi}(x)\ \gamma_5\psi(x) \quad \text{transformerer som en pseudoskalar} \\ A^{\mu} &\equiv \overline{\psi}(x)\ \gamma^{\mu}\gamma_5\ \psi(x) \quad \text{transformerer som en axial 4-vektor}\end{aligned} \tag{3.81}$$

Lad os nøjes med at vise, at $\overline{\psi}\gamma_5\psi$ er ulige under paritet, idet vi bruger, at $S = \gamma^0$ for paritets-transformationen:

$$\begin{aligned}\overline{\psi}(\vec{x},t)\gamma_5\ \psi(\vec{x},t) &\rightarrow \overline{\psi}(x)\gamma_0^{-1}\gamma_5\gamma_0\psi(x) \\ &= \overline{\psi}(x)\gamma_0\gamma_5\gamma_0\psi(x)\end{aligned} \tag{3.82}$$

Men $\gamma_0\gamma_5\gamma_0 = -\gamma_5$ ifølge (3.80), hvoraf påstanden følger.

3.6 Dirac-ligningens plan-bølge løsninger

For Klein-Gordon-ligningen fandt vi det fuldstændige sæt af plan-bølgeløsninger

$$e^{ikx} \quad , \quad k_{\mu}k^{\mu} = m^2 \quad , \quad k^0 \begin{array}{l} \geq +m \\ \leq -m \end{array}$$

eller mere bekvemt:

$$\{e^{ikx}, e^{-ikx}: \quad k_{\mu}k^{\mu} = m^2, \quad k^0 \geq +m\}$$

Da alle løsninger til Dirac-ligningen også tilfredsstiller Klein-Gordon-ligningen, forsøger vi at sætte

$$\psi(x) = w(p)\ e^{-ipx} \tag{3.83}$$

hvor $p_{\mu}p^{\mu} = m^2$, og hvor vi ikke vil blive overraskede (som Dirac) over at finde løsninger både med $p^0 > m$, $p^0 < -m$. Indsættes (3.83) i Dirac-ligningen, fås følgende ligning for $w(p)$ (som er en søjle)

$$p_{\mu}\gamma^{\mu}\ w - mw = 0$$

Vi indfører her en notation, vi skal anvende overalt i det følgende. En 4-vektor, A_{μ}, som er kontraheret med γ matricerne, betegnes med et "slash":

$$\not{A} \equiv A_{\mu}\gamma^{\mu} = A^{\mu}\gamma_{\mu}$$

I denne notation lyder Dirac-ligningen for $\psi(x)$ og for w :

$$(i\,\not\partial - m)\psi = 0 \qquad \text{og} \qquad (\not p - m)w = 0 \tag{3.84}$$

Da w er en søjle med 4 komponenter, venter vi at finde 4 uafhængige løsninger: 2 med $p^0 > m$ og 2 med $p^0 < -m$. Løsningerne med $p^0 > m$ betegnes $u_{\frac{1}{2}}(p)$ og $u_{-\frac{1}{2}}(p)$.

I repræsentationen (3.59) kan de angives som

$$u_{\pm\frac{1}{2}}(p) = \sqrt{p^0 + m}\begin{bmatrix} \chi_{\pm\frac{1}{2}} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p^0+m}\,\chi_{\pm\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

hvor

$$\chi_{\pm\frac{1}{2}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{for} \quad +\frac{1}{2} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{for} \quad -\frac{1}{2} \end{cases}$$

For at bevise, at (3.85) er en løsning, skriver vi Dirac-ligningen

$$p^0\gamma^0 u - \vec{p}\cdot\vec{\gamma}u = mu$$

i repræsentationen (3.59), som (idet (3.85) indsættes)

$$\begin{aligned} p_0\chi - \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})}{p_0+m}\,\chi &= m\chi \\ -p_0\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p_0+m}\,\chi + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\chi &= m\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p_0+m}\,\chi \end{aligned} \tag{3.86}$$

At disse ligninger er opfyldt følger trivielt ved brug af

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) = p_i p_j \sigma_i \sigma_j = p_i p_j(\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k) = \vec{p}^2$$

samt af

$$p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

Løsningen (3.85) er normeret, så

$$\overline{u}_s(\vec{p})u_{s'}(\vec{p}) = 2m\delta_{ss'}$$

hvilket også let eftervises i repræsentationen (3.59). Bemærk, at normeringsbetingelsen gør $\overline{u}u$ til en invariant. Herefter kan vi forme bilineære kovarianter af u'erne på analog måde til, hvad vi gjorde med ψ'erne (jfr. (3.76) og (3.81); detaljerne overlades til læseren, jfr. opgaverne).

Løsningerne for $p^0 < -m$ omformes, idet vi først sætter

$$q^\mu = -p^\mu \quad , \qquad q^0 > +m$$

Herefter bliver Dirac-ligningen for disse løsninger, der betegnes med $v(q)$

$$(\not q + m)v(q) = 0 \tag{3.87}$$

Som før vises, at som to lineært uafhængige løsninger kan vælges

$$v_{\pm\frac{1}{2}}(q) = \sqrt{q^0+m}\begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{q}}{q^0+m}\chi'_{\pm\frac{1}{2}} \\ \chi'_{\pm\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{hvor} \quad \begin{array}{rcl} \chi'_{+\frac{1}{2}} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \chi'_{-\frac{1}{2}} & = & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.88}$$

Det lidt ejendommelige valg for $\chi'_{\pm\frac{1}{2}}$ skal vi begrunde i afsnittet om anti-fermioners spin. "Anti"-spinorerne er normeret, så

$$\overline{v}_s(q)v_{s'}(q) = -2m\ \delta_{ss'}$$

Lad os opsummere de vigtigste resultater (af hvilke nogle få endnu ikke er omtalt - beviser overlades her til læseren):

$$\begin{array}{rcl} (i\,\not\partial - m)\psi = 0 & , & \overline{\psi}(i\,\overleftarrow{\not\partial} + m) = 0 \\ \overline{u}(\not p - m) = 0 = (\not p - m)u & , & \overline{v}(\not p + m) = 0 = (\not p + m)v \\ \overline{u}_s(p)u_{s'}(p) = +2m\delta_{ss'} & , & \overline{v}_s(p)v_{s'}(p) = -2m\delta_{ss'} \\ \overline{u}_s(p)v_{s'}(p) = 0 & , & \overline{v}_s(p)u_{s'}(p) = 0 \\ u_s^\dagger(p)u_{s'}(p) = +2p^0\delta_{ss'} & , & v_s^\dagger(p)v'_s(p) = +2p^0\delta_{ss'} \\ u_s^\dagger(\vec{p})v_{s'}(-\vec{p}) = \ 0 & & = v_s^\dagger(\vec{p})u_{s'}(-\vec{p}) \end{array} \tag{3.89}$$

I disse udtryk gælder altid $p^0 \geq +m$.

3.7 Det kvantiserede Dirac-felt

I dette afsnit skal vi nå frem til en konsistent relativistisk og kvanteteoretisk behandling af spin-$\frac{1}{2}$ fermioner. Vores fremgangsmåde bliver

1. at nedskrive en Lagrange-funktion, som har Dirac-ligningen som bevægelsesligning,
2. at udvikle feltet på sættet af planbølgeløsninger som fundet,
3. at postulere ombytningsrelationer for skabelses- og annihilationsoperatorer, samt
4. at eftervise, at den resulterende teori giver os det ønskede resultat.

Det viser sig umuligt at gennemføre den kanoniske kvantisering, som vi brugte ved spin-0 feltet. Det skal vi ikke være kede af. For spin-0 feltet fandt vi nemlig, at teoriens partikler adlød Bose-statistik, medens fermioner experimentelt adlyder Pauli-princippet. Det er en af feltteoriens store triumfer, at det *ikke* er muligt at kvantisere spin-$\frac{1}{2}$ feltet, så partiklerne adlyder Bose-statistik; kun ved at postulere *anti-kommutations*-relationer fås en såkaldt kausal teori, dvs én, hvor rum-tids-afhængige observable adskilt ved en *rumlig* afstand, er uafhængige af hinanden (kommuterer). Et sådant kausalitetskrav følger af, at ingen information kan forbinde de to observable, da intet signal kan løbe hurtigere end lyset. Denne fundamentale forbindelse mellem spin og statistik kan vi desværre ikke komme nærmere ind på i dette kursus.

Vi betegner nu med $\psi(x)$ en 4-komponent feltoperator, hvor operatorerne står opført i en søjle. $\overline{\psi}(x)$ er den tilsvarende række af adjungerede operatorer

$$\overline{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$$

Lad os betragte Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)(i\not{\partial} - m)\psi(x) \tag{3.90}$$

hvor vi først behandler $\overline{\psi}$ og ψ som (8) uafhængige variable. Vi har så

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_\alpha)} &= i\,\overline{\psi}_\beta\,\gamma^\mu_{\beta\alpha} \quad \text{eller kort} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\overline{\psi}\gamma^\mu \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= -m\overline{\psi} \end{aligned} \tag{3.91}$$

Heraf fås Euler-Lagrange-ligningen

$$i\partial_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu = -m\overline{\psi}$$

eller

$$\overline{\psi}(i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0$$

der er Dirac-ligningen for $\overline{\psi}$. Videre finder vi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} = (i\not{\partial} - m)\psi$$

hvoraf $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$, der er Dirac-ligningen for ψ. Herved har vi vist, at $\mathcal{L}$ giver os de ønskede bevægelsesligninger.

Imidlertid er de kanonisk konjugerede variable "mystiske":

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\overline{\psi}\gamma^0 \quad , \quad \text{men} \quad \overline{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\overline{\psi}}} \equiv 0 \tag{3.92}$$

Den sidste ligning viser, at $\overline{\psi}$ ikke er nogen selvstændig dynamisk variabel. Det kan altså ikke lade sig gøre at behandle systemet som kanonisk, og derfor kan vi heller ikke anvende den kanoniske kvantisering.

Imidlertid er der intet til hinder for at udvikle feltet på det fuldstændige sæt af planbølgetilstande, vi har fundet:

$$\psi(x) = \sum_{\vec{p}} \sum_{s} \left[b(\vec{p}, s) u_s(\vec{p})\, e^{-ipx} + d^\dagger(\vec{p}, s) v_s(\vec{p})\, e^{+ipx} \right] \tag{3.93}$$

hvor

$$p^0 \equiv +\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$$

Som lovet får vi en konsistent teori ved at postulere *anti*-kommutations-relationer for skabelses- og annihilationsoperatorerne b og d :

$$\begin{aligned} \left\{ b(p,s), b^\dagger(p',s') \right\} &= \delta_{ss'}\delta_{\vec{p}\vec{p}\,'} \\ \left\{ d(p,s), d^\dagger(p',s') \right\} &= \delta_{ss'}\delta_{\vec{p}\vec{p}\,'} \\ \{ b(p,s), d(p',s') \} &= \left\{ b(p,s), d^\dagger(p',s') \right\} = \left\{ b^\dagger(p,s), d(p',s') \right\} \\ &= \left\{ b^\dagger(p,s), d^\dagger(p',s') \right\} = 0 \quad , \\ \{ b(p,s), b(p',s') \} &= 0 \quad \text{etc.} \end{aligned} \tag{3.94}$$

hvor $\{a,b\} \equiv ab + ba$, $s, s' = \pm\frac{1}{2}$ og

$$\sum_{\vec{p}} \equiv \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} \quad , \quad \delta_{\vec{p}\vec{p}\,'} \equiv 2p^0(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,')$$

Som for spin-0 tilfældet forsøger vi nu at definere antalsoperatorer, men denne gang *to* slags:

$$\begin{aligned} N(p,s) &= b^\dagger(p,s)b(p,s) \\ \overline{N}(p,s) &= d^\dagger(p,s)d(p,s) \end{aligned} \tag{3.95}$$

som vil vise sig at være antalsoperatorer for henholdsvis fermioner (N) og antifermioner ($\overline{N}$). De tilfredsstiller *kommutationsrelationerne* (i modsætning til *anti*-kommutationsrelationer)

$$[N(p,s), b(p,s)] = b^\dagger bb - bb^\dagger b = 0 - bb^\dagger b = +bbb^\dagger - b = -b(p,s) \tag{3.96}$$

hvor vi har brugt $\{b, b^\dagger\} = 1$ og $\{b,b\} = 2bb = 0$. Tilsvarende gælder for generelle værdier af p og s

$$\begin{aligned} [N(p,s), b(p',s')] &= -\delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{ss'}b(p,s) \\ \left[\overline{N}(p,s), d(p',s')\right] &= -\delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{ss'}d(p,s) \\ \left[N(p,s), b^\dagger(p',s')\right] &= +\delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{ss'}b^\dagger(p,s) \\ \left[\overline{N}(p,s), d^\dagger(p',s')\right] &= +\delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{ss'}d^\dagger(p,s) \end{aligned} \tag{3.97}$$

mens

$$[N(p,s), d(p',s')] = 0 \quad \text{etc.}$$

Som i spin-0 tilfældet bevises, at egenværdierne af N og $\overline{N}$ er positive hele tal. Imidlertid gælder nu, at *egenværdierne kun kan antage værdierne* 0 *og* 1*!* dvs der kan højst være én fermion i hver kvantetilstand (Pauli-princippet).

For at se det betragter vi vacuumtilstanden $|0\rangle$ og forsøger at konstruere kvantetilstande med $1, 2$, etc. excitationer. For en enkeltpartikeltilstand får vi

$$b^\dagger(\vec{p},s)|0\rangle = |p,s\rangle$$

hvor

$$N(p,s)|p,s\rangle = N(p,s)b^\dagger(p,s)|0\rangle = +b^\dagger N(p,s)|0\rangle + b^\dagger(p,s)|0\rangle = 0 + |p,s\rangle$$

dvs $N(p,s)$ har egenværdien 1. Forsøger vi at konstruere en 2-partikeltilstand får vi

$$b^\dagger(p,s)b^\dagger(p,s)|0\rangle = -b^\dagger(p,s)b^\dagger(p,s)|0\rangle$$

fordi $\{b^\dagger(p,s), b^\dagger(p,s)\} = 0$, men dette viser, at 2-partikelstanden forsvinder. Tilsvarende for alle højere tilstande.

Derimod kan vi udmærket have en 2-partikeltilstand, hvor partiklerne har forskellige værdier af p og/eller s, men i så fald har vi

$$\begin{aligned} |p,s;\ p',s'\rangle &= b^\dagger(p,s)b^\dagger(p',s')|0\rangle \\ &= -b^\dagger(p',s')b^\dagger(p,s)|0\rangle = -|p',s';\ p,s\rangle \end{aligned} \tag{3.98}$$

som udtrykker Fermi-statistikken. For fermioner må vi altså nøje holde rede på partikelrækkefølgen i vores definition af tilstande.

Vi konstruerer herefter 4-impulsoperatoren som i spin-0 tilfældet ved at finde generatoren for rum-tids-translationer (smlgn (3.36)):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = i[P^\mu, \psi] \tag{3.99}$$

(bemærk, at vi her igen virkelig bruger en kommutator, *ikke* en antikommutator). Venstre side af lighedstegnet findes af (3.93)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = \sum_{\vec{p}} \sum_s \left[b(p,s) u_s(p)\, e^{-ipx}(-ip^\mu) + d^\dagger(p,s) v_s(p)\, e^{ipx}(ip^\mu) \right] \tag{3.100}$$

Operatoren P^μ, som løser (3.99), er[6]

$$P^\mu = \sum_{\vec{p}} \sum_s \left[+N(p,s)p^\mu + \overline{N}(p,s)p^\mu \right] \tag{3.101}$$

I beviset får vi brug for (3.97). Udtrykket for P^μ viser, at teoriens tilstande indeholder to slags kvanter. Den ene slags skabes og annihileres af $b^\dagger$ og b; vi kalder dem fermioner. Den anden slags skabes og annihileres af $d^\dagger$ og d; vi kalder dem antifermioner. Hver for sig adlyder de Fermi-statistik, - de har samme masse ($p_\mu p^\mu = m^2$) og altid positiv energi ($p^0 > m$). Feltet $\psi(x)$ skaber antifermioner og annihilerer fermioner, medens $\psi^\dagger(x)$ eller $\overline{\psi}(x)$ skaber fermioner og annihilerer antifermioner.

3.8 Spinnet af en fermion

For at finde spinnet af feltkvanterne skal vi gå til deres hvilesystem og undersøge virkningen af generatorerne for rotationer her. Rotationsgeneratorerne $\vec{J}$ er "blot" de rumlige komponenter af Lorentz-generatorerne. Under en Lorentz-transformation transformerer feltet

$$U(\Lambda, 0)\psi(x)U^\dagger(\Lambda, 0) = S^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x) \tag{3.102}$$

(jfr. (2.9)), hvor vi for en infinitesimal transformation har

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu &= \delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu \\ U(\Lambda) &= I + \frac{i}{2} M_{\mu\nu}\delta\omega^{\mu\nu} \\ S(\Lambda) &= I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\delta\omega^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.103}$$

(jfr. (3.66)). Lad os nu studere en infinitesimal rotation af størrelsen $\delta\varphi$ om z-aksen:

$$t' = t \quad , \quad z' = z \quad , \quad x' = x + y\delta\varphi \quad , \quad y' = y - x\delta\varphi$$

[6] på nær et additivt bidrag, som kommuterer med feltet og som i denne sammenhæng er uinteressant, jfr. dog tilsvarende bem. i afsn. 3.4

dvs

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta\varphi & 0 \\ 0 & -\delta\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{aligned} \delta\omega^1{}_2 &= -\delta\omega^2{}_1 = \delta\varphi \\ \delta\omega^{12} = \delta\omega_{12} &= -\delta\omega^{21} = -\delta\omega_{21} = -\delta\varphi \end{aligned} \tag{3.104}$$

Ifølge (2.37) fås så

$$\begin{aligned} U(\Lambda) &= I + iM_{21}\delta\varphi = I + iJ_3\delta\varphi \\ S^{-1}(\Lambda) &= I + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\delta\omega^{\mu\nu} = I + \frac{i}{2}\sigma_{21}\delta\varphi \end{aligned} \tag{3.105}$$

Nu er (jfr. (3.65) og (3.59))

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \sigma^{ij} &= \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j] \\ &= \frac{i}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{i}{2}\left[\begin{pmatrix} -\sigma_i\sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_i\sigma_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma_j\sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_j\sigma_i \end{pmatrix}\right] \\ &= -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \\ 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} = +\epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.106}$$

altså specielt

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= -\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \\ S^{-1} &= I - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\delta\varphi \end{aligned} \tag{3.107}$$

Af (3.102) får vi

$$\psi(x) + i\delta\varphi\,[J_3, \psi(x)] = (I - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\delta\varphi)\psi(\Lambda x)$$

Vi gennemfører nu en analyse helt analog til den for det skalære felt efter (3.51). Vi udvikler begge sider af lighedstegnet på plane bølger, og på højre side erstatter vi $\vec{p}$ med $R\vec{p}$ og ser på $\vec{p} = 0$ bidragene:

$$\begin{aligned} \left[J_3, b(\vec{0}, s)\right] u(\vec{0}, s) &= -\frac{1}{2}b(\vec{0}, s)\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} u(\vec{0}, s) \\ \left[J_3, d^\dagger(\vec{0}, s)\right] v(\vec{0}, s) &= -\frac{1}{2}d^\dagger(\vec{0}, s)\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} v(\vec{0}, s) \end{aligned} \tag{3.108}$$

Indføres videre de explicite løsninger (3.85) og (3.88) har vi

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} u(\vec{0}, +\frac{1}{2}) &= +u(\vec{0}, +\frac{1}{2}) \\
\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} u(\vec{0}, -\frac{1}{2}) &= -u(\vec{0}, -\frac{1}{2}) \\
\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} v(\vec{0}, \pm\frac{1}{2}) &= \mp v(\vec{0}, \pm\frac{1}{2})
\end{aligned} \tag{3.109}$$

hvoraf

$$[J_3, b(\vec{0}, \pm\frac{1}{2})] = \mp\frac{1}{2}b(\vec{0}, \pm\frac{1}{2}) \ ; \ [J_3, d^\dagger(\vec{0}, \pm\frac{1}{2})] = \pm\frac{1}{2}d^\dagger(\vec{0}, \pm\frac{1}{2}) \tag{3.110}$$

Tages de hermitesk konjugerede af disse ligninger fås

$$[J_3, b^\dagger(\vec{0}, \pm\frac{1}{2})] = \pm\frac{1}{2}b^\dagger(\vec{0}, \pm\frac{1}{2}) \ ; \ [J_3, d(\vec{0}, \pm\frac{1}{2})] = \mp\frac{1}{2}d(\vec{0}, \pm\frac{1}{2}) \tag{3.111}$$

Heraf følger straks, at operatorerne $b^\dagger(\vec{0}, \pm\frac{1}{2})$ skaber kvanter i hvile med spinkomponent $\pm\frac{1}{2}$ langs z-aksen:

$$J_3|\vec{0}, +\frac{1}{2}\rangle = J_3 b^\dagger(\vec{0}, +\frac{1}{2})|0\rangle = b^\dagger(\vec{0}, \frac{1}{2})J_3|0\rangle + \frac{1}{2}b^\dagger(\vec{0}, +\frac{1}{2})|0\rangle = 0 + \frac{1}{2}|\vec{0}, +\frac{1}{2}\rangle \tag{3.112}$$

Tilsvarende skaber $d^\dagger(\vec{0}, s)$ kvanter med $J_3 = s$, medens $b(\vec{0}, s)$ og $d(\vec{0}, s)$ annihilerer sådanne.

Hermed har vi dels vist, at både b-kvanterne og d-kvanterne (henholdsvis fermionerne og antifermionerne) har spin-$\frac{1}{2}$, samt at vores notation for spinorerne $u(\vec{p}, \pm\frac{1}{2})$ og $v(\vec{p}, \pm\frac{1}{2})$ var velvalgt.

3.9 Ladning

En tilfredsstillende behandling af den elektriske ladning kræver en behandling af formen for fermionernes vekselvirkning med elektromagnetiske felter. Vi skal i et senere kapitel give en uddybende behandling heraf. Her benytter vi et intuitivt argument.

I den klassiske elektrodynamik ved vi, at vekselvirkningsbidraget til Lagrangetætheden kan skrives

$$\mathcal{L}_I = -j_\mu(x)A^\mu(x) \tag{3.113}$$

hvor A_μ er det elektromagnetiske 4-potential, og $j^\mu(x)$ er den elektriske 4-strømtæthed. Denne sidste er bevaret:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0$$

og dens 0-komponent er ladningstætheden, således at

$$Q = \int d^3x \ j^0(\vec{x}, t)$$

er den totale tidsuafhængige ladning i systemet.

Som vi senere skal se gælder formen (3.113) også i kvantefeltteorien med

$$j^\mu(x) = e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{3.114}$$

hvor e er fermionernes ladning. Udtrykket (3.114) er ikke overraskende: Vi ved, det transformerer som en 4-vektor, og af Dirac-ligningen har vi

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^\mu(x) &= e\partial_\mu\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) + e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)\\ &= e(im\ \overline{\psi}(x)\psi(x) - im\ \overline{\psi}(x)\psi(x)) = 0 \quad (\text{jfr. } (3.89)).\end{aligned} \tag{3.115}$$

Lad os udregne ladningsoperatoren. Da den er tidsuafhængig, kan vi vælge at sætte $t=0$:

$$\begin{aligned}Q &= \int d^3x\ j^0(\vec{x},\ t=0) = e\int d^3x \sum_{\vec{p},s}\sum_{\vec{p}\,',s'}\Big\{\Big(\overline{u}_s(\vec{p})b^\dagger(\vec{p},s)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \overline{v}_s(\vec{p})d(\vec{p},s)\ e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}}\Big)\\ &\quad \gamma^0\Big(u_{s'}(\vec{p}\,')b(\vec{p}\,',s')e^{+i\vec{p}\,'\cdot\vec{x}} + v_{s'}(\vec{p}\,')d^\dagger(\vec{p}\,',s')e^{-i\vec{p}\,'\cdot\vec{x}}\Big)\Big\}\\ &= e\int d^3x \sum_{\vec{p},s}\sum_{\vec{p}\,',s'}\\ &\quad \Big\{\ u_s^\dagger(\vec{p})u_{s'}(\vec{p}\,')b^\dagger(\vec{p},s)b(\vec{p}\,',s')e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}\,'-\vec{p})} + u_s^\dagger(\vec{p})v_{s'}(\vec{p}\,')b^\dagger(\vec{p},s)d^\dagger(\vec{p}\,',s')e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}+\vec{p}\,')}\\ &\quad + v_s^\dagger(\vec{p})u_{s'}(\vec{p}\,')d(\vec{p},s)b(\vec{p}\,',s')e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}+\vec{p}\,')} + v_s^\dagger(\vec{p})v_{s'}(\vec{p}\,')d(\vec{p},s)d^\dagger(\vec{p}\,',s')e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}\,')}\Big\}\\ &= e\sum_{\vec{p},s,s'}\frac{1}{2p^0}\\ &\quad \Big\{\ u_s^\dagger(\vec{p})u_{s'}(\vec{p})b^\dagger(\vec{p},s)b(\vec{p},s') + u_s^\dagger(\vec{p})v_{s'}(-\vec{p})b^\dagger(\vec{p},s)d^\dagger(-\vec{p},s')\\ &\quad + v_s^\dagger(\vec{p})u_{s'}(-\vec{p})d(\vec{p},s)b(-\vec{p},s') + v_s^\dagger(\vec{p})v_{s'}(\vec{p})d(\vec{p},s)d^\dagger(\vec{p},s')\Big\}\end{aligned} \tag{3.116}$$

hvor vi har brugt $(2\pi)^3\ \delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,') = \frac{1}{2p^0}\delta_{\vec{p}\vec{p}\,'}$ etc. Vi bruger nu orthonormeringsbetingelserne (3.89) og får

$$\begin{aligned}Q &= e\sum_{\vec{p},s}\{b^\dagger(\vec{p},s)b(\vec{p},s) + d(\vec{p},s)d^\dagger(\vec{p},s)\}\\ &= e\sum_{\vec{p},s}\{N(\vec{p},s) - \overline{N}(\vec{p},s) + 1\}\end{aligned} \tag{3.117}$$

idet $\{d(\vec{p},s), d^\dagger(\vec{p},s)\} = 1$. Det sidste 1-tal i (3.117) giver et uendeligt, men tilstandsuafhængigt bidrag til ladningen. Vi kan smide det væk ved at vedtage at omdefinere ladningen relativt til dens værdi i vacuum. (3.117) viser så, at fermioner har ladning e, medens antifermioner har den modsatte ladning $-e$. Bemærk, at argumentet kun benyttede formen for den bevarede 4-strømtæthed. Det gælder derfor generelt, at fermioner og antifermioner har modsatte værdier for alle additivt bevarede kvantetal.

3.10 Ladningskonjugering (Charge conjugation)

For klassifikationen af bundne tilstande af kvarker (hadroner) er en tilstands opførsel under ombytning af alle partikler med deres antipartikel vigtig. Vi definerer operatoren $\mathcal{C}$ ved, at den lader bevægelsestilstanden for alle partikler uændret; kun erstattes fermioner af antifermioner og omvendt. Specielt fås for en enkeltpartikeltilstand

$$\mathcal{C}|F;\vec{p},s\rangle = |\overline{F};\vec{p},s\rangle \tag{3.118}$$

hvor F og $\overline{F}$ betegner henholdsvis fermion og antifermion.

Det til $\psi(x)$ ladningskonjugerede felt $\psi_c(x)$ er givet ved

$$\psi_c(x) \equiv \mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} \tag{3.119}$$

Fra (3.118) kan vi slutte, at der må gælde

$$\begin{aligned} \mathcal{C}b(\vec{p},s)\mathcal{C}^{-1} &= d(\vec{p},s) \\ \mathcal{C}b^\dagger(\vec{p},s)\mathcal{C}^{-1} &= d^\dagger(\vec{p},s) \end{aligned} \tag{3.120}$$

Vi har så, da $\psi(x) = \sum_{\vec{p},s}[b(\vec{p},s)e^{-ipx}u_s(\vec{p}) + d^\dagger(\vec{p},s)e^{+ipx}v_s(\vec{p})]$

$$\psi_c(x) = \sum_{\vec{p},s}[d(\vec{p},s)e^{-ipx}u(\vec{p},s) + b^\dagger(\vec{p},s)e^{ipx}v_s(\vec{p})] \tag{3.121}$$

Dette udtryk kan vi sammenligne med det adjungerede felt

$$\overline{\psi}(x) = \sum_{\vec{p},s}\left[\overline{u}_s(\vec{p})b^\dagger(\vec{p},s)e^{ipx} + \overline{v}_s(\vec{p})d(\vec{p},s)e^{-ipx}\right] \tag{3.122}$$

der viser, at der må være en meget nøje sammenhæng mellem ψ_c og $\overline{\psi}$, faktisk at de må være lineært forbundet:[7]

$$(\psi_c(x))_\alpha = \mathcal{C}\psi_\alpha(x)\mathcal{C}^{-1} = C_{\alpha\beta}(\overline{\psi}(x))_\beta$$

eller

$$\mathcal{C}\psi\mathcal{C}^{-1} = C\overline{\psi}^T \tag{3.123}$$

idet ψ og ψ_c er søjler, $\overline{\psi}$ en række og $\overline{\psi}^T$ en søjle, medens C er en 4×4 matriks og $\mathcal{C}$ en operator, som kun virker på b'erne og d'erne, men ikke på de almindelige (komplekse) tal. Vi kan finde matricen C ud fra kravet om, at ψ_c skal adlyde Dirac-ligningen:

$$(i\not{\partial} - m)\psi_c = 0$$

Indføres (3.123) fås

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)C\overline{\psi}^T = 0$$

og tages den matrikstransponerede af denne ligning fås

$$\partial^\mu\overline{\psi}C^T i\gamma_\mu^T - m\overline{\psi}C^T = 0$$

og multipliceres fra højre med C fås

$$i\partial^\mu\overline{\psi}C^T\gamma_\mu^T C - m\overline{\psi}C^T C = 0$$

Sammenlignes denne ligning med Dirac-ligningen for $\overline{\psi}$:

$$i\partial^\mu\overline{\psi}\gamma_\mu + m\overline{\psi} = 0$$

fås

$$C^T C = I \quad , \quad C^T\gamma_\mu^T C = -\gamma_\mu$$

[7]De har nemlig operatordelen af deres Fourier-komponenter fælles (jfr. også (3.126)).

eller

$$-C = C^{-1} = C^T \quad , \quad C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T \tag{3.124}$$

Disse ligninger fastlægger den såkaldte ladningskonjugerings*matriks* C. I repræsentationen (3.59) fås

$$C = i\gamma^2\gamma^0 \tag{3.125}$$

Øvelse: Eftervis dette.

Lad os sluttelig udregne $C\overline{\psi}^T$ fra (3.122) og sammenligne med (3.121):

$$\psi_c = C\overline{\psi}^T = \sum_{\vec{p},s}\left[C\overline{u}_s^T(\vec{p})b^\dagger(\vec{p},s)e^{ipx} + C\overline{v}_s^T(\vec{p})d(\vec{p},s)e^{-ipx}\right]$$

Sammenligning med (3.121) giver

$$v_s(\vec{p}) = C\overline{u}_s^T(\vec{p}) \quad ; \quad u_s(\vec{p}) = C\overline{v}_s^T(\vec{p}) \tag{3.126}$$

Det overlades til læseren at eftervise, at disse identiteter er opfyldt for vore explicite løsninger (3.85) og (3.88). Det er først nu, vi fuldt kan begrunde de "mystiske" fortegnsvalg på udtrykkene for v i (3.88).

3.11 Fermioners og antifermioners paritet

Paritetstransformationen er blot en lidt usædvanlig Lorentz-transformation, så iflg. (3.61) gælder

$$\mathcal{P}^{-1}\psi(Px)\mathcal{P} = S(P)\psi(x)$$

eller, da $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1} = S(P)\psi(Px)$$

hvor $P^\mu{}_\nu = g^{\mu\nu}$, og hvor iflg. (3.71) $S(P) = \gamma^0$. Vi ved også, at virkningen af $\mathcal{P}$ på en tilstand med impuls $\vec{p}$ og spin s er en tilstand med impuls $-\vec{p}$ og spin $+s$ (jfr. afsn. 2.9). Derimod ændrer $\mathcal{P}$ ikke på, om partiklerne er fermioner eller antifermioner. Af ovenstående finder vi da også

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1} &= \sum_{\vec{p},s}\left[\mathcal{P}b(\vec{p},s)\mathcal{P}^{-1}u_s(\vec{p})e^{-ipx} + \mathcal{P}d^\dagger(\vec{p},s)\mathcal{P}^{-1}v_s(\vec{p})e^{ipx}\right] \\
&= S(P)\psi(-\vec{x},t) = \gamma^0\psi(-\vec{x},t) \\
&= \sum_{\vec{p},s}\left[\gamma^0 u(+\vec{p},s)e^{-ip^0t-i\vec{p}\cdot\vec{x}}b(\vec{p},s) + \gamma^0 v_s(\vec{p})e^{ip^0+i\vec{p}\cdot\vec{x}}d^\dagger(\vec{p},s)\right] \\
&\qquad\qquad\text{(erstat } \vec{p} \text{ med } -\vec{p} \text{ i sum)} \\
&= \sum_{\vec{p},s}\left[\gamma^0 u(-\vec{p},s)e^{-ipx}b(-\vec{p},s) + \gamma^0 v(-\vec{p},s)e^{ipx}d^\dagger(-\vec{p},s)\right]
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Heraf fås så

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}b(\vec{p},s)\mathcal{P}^{-1}u(\vec{p},s) &= b(-\vec{p},s)\gamma^0 u(-\vec{p},s) \\
\mathcal{P}d^\dagger(\vec{p},s)\mathcal{P}^{-1}v(\vec{p},s) &= d^\dagger(-\vec{p},s)\gamma^0 v(-\vec{p},s)
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Fra vores explicite løsninger (3.85) og (3.88) i repræsentationen (3.59) ser vi, at

$$\gamma^0 u(-\vec{p}, s) = +u(\vec{p}, s) \quad \text{og} \quad \gamma^0 v(-\vec{p}, s) = -v(\vec{p}, s)$$

hvoraf

$$\mathcal{P} b(\vec{p}, s)\mathcal{P}^{-1} = +b(-\vec{p}, s) \quad ; \quad \mathcal{P} d^\dagger(\vec{p}, s)\mathcal{P}^{-1} = -d^\dagger(-\vec{p}, s) \tag{3.129}$$

Heraf fås straks for fermiontilstande (F) og antifermiontilstande $(\overline{F})$: $(\mathcal{P}|0\rangle \equiv +|0\rangle)$

$$\mathcal{P}|F; \vec{p}, s\rangle = +|F; -\vec{p}, s\rangle \quad ; \quad \mathcal{P}|\overline{F}; \vec{p}, s\rangle = -|\overline{F}; -\vec{p}, s\rangle \tag{3.130}$$

Vi bemærker her, at der i vores løsning $S(P) = \gamma^0$ lå et *fasevalg*. Således ville $S(P) = -\gamma^0$ være lige så brugbar. Med dette valg ville det være fermiontilstandene, der skiftede fortegn under $\mathcal{P}$, medens antifermiontilstandene ikke gjorde det. Det afgørende resultat i (3.130) er, at *fermioner og antifermioner har modsat indre paritet.* Det er sædvane at tildele de negativt ladede leptoner (e^-, μ^-, τ^-) æren af at være fermioner med positiv paritet. Tilsvarende kaldes protonens bestanddele kvarker med positiv paritet, medens antiprotonens så må kaldes antikvarker med negativ paritet.

Kapitel 4

Kvarkmodellen

4.1 Indledning

Kvarkmodellens historie går tilbage til begyndelsen af 60'erne, hvor Gell-Mann og Zweig uafhængigt fremsatte den hypotese, at det forvirrende billede af et stort antal hadroner, som da var kendt, skulle forstås ved at disse hadroner simpelthen var forskellige bundne tilstande af et lille antal (dengang 3) byggesten kaldet *kvarker* (engelsk: quarks [1]). Kvarkerne måtte være spin-$\frac{1}{2}$ partikler, og den simpleste beskrivelse fremkom ved at tildele dem ejendommelige elektriske ladninger: 2/3 og −1/3 af protonladningen.

Denne model havde fra starten betydelig succes i henseende til at give en meget simpel klassificering af hadronerne. Det er dette aspekt af modellen, vi især skal beskæftige os med i dette kapitel. Imidlertid vandt kvarkhypotesen ikke straks almindelig tilslutning. Dette skyldtes en lang række begrebsmæssige vanskeligheder ved modellen, som kan føres tilbage til en manglende forståelse af kræfterne, som virker mellem kvarkerne. Som vi skal se i kapitel 6, findes der idag en yderst smuk teori for disse vekselvirkninger: Kvantechromodynamikken (QCD) (engelsk: quantum chromodynamics i analogi til QED: quantum electrodynamics).

Fremkomsten af QCD er én af mange grunde til, at kvarkmodellen efterhånden har vundet almindelig tilslutning. Desværre er *alle* grundene mere eller mindre *indirekte*. Fra starten syntes den mest naturlige måde at efterprøve teorien på at ligge i forsøg på at "spalte" hadronerne i deres kvarkbestanddele og så eftervise de postulerede kvarkegenskaber for bestanddelene. Alle hidtidige forsøg i denne retning er slået fejl, og de nyere teoretiske forestillinger om interkvarkkræfterne baseres på antagelsen om permanent *kvark confinement:* En hypotese, hvorefter kvarker kun kan eksistere som simple, partikelagtige feltexcitationer inden i hadronerne, men aldrig isoleret.

En tidlig indvending mod kvarkmodellen bestod i at fremhæve, at hvis en tilførsel af energi på mange GeV var utilstrækkelig til at "slide" kvarkerne fra hinanden, så måtte bindingsenergien selv være mange GeV, hvilket syntes mystisk, da hadronerne typisk har masser $\sim 1GeV$. I en sådan situation skulle man forvente, at kvarkerne havde meget høje kinetiske energier inden i hadronerne for at kinetisk energi minus bindingsenergi skulle blive lig med massen af hadronen. Sådanne systemer syntes på forhånd håbløst komplicerede, og der blev rejst alvorlig tvivl om det fornuftige i overhovedet at tale om et bestemt *antal* kvarker i hadronerne: Med de store energiforskelle, som syntes involveret, måtte pardannelse af kvark-antikvarkpar nemt kunne foregå.

I 1969 startedes ved Stanford Linear Accelerator Centre (SLAC) i Californien en helt ny type eksperimenter. Med den lineære accelerator var man i stand til at accelerere elektroner til energier på $10 - 20GeV$ og derefter studere såkaldte dybt uelastiske kollisioner mellem elektronerne og nukleoner. Ideen bag eksperimentet (som vi kommer tilbage til i kap. 10) var bla at studere detaljerne af protonens ladningsfordeling. Hertil kræves iflg. usikkerhedsrelationerne impulsoverførsler Δp, som tilfredsstiller

$$\Delta p \gg \frac{1}{R_p}$$

hvor $R_p \simeq 1fm \simeq 5GeV^{-1}$ er udstrækningen af en proton. Bemærk her den store principielle lighed mellem dette eksperiment og Rutherfords berømte eksperiment fra 1910,

[1] Gell-Mann tog ordet fra et gådefuldt sted i James Joyce's *Finnegans Wake:*"... Three quarks for Muster Mark..."

der førte til opdagelsen af, at den positive ladning i et atom *ikke* er jævnt fordelt over atomet, men samlet i en næsten punktformet kerne.

Resultatet af SLAC eksperimentet var forbløffende. Det viste sig, dels at protonens ladning var samlet i "punktformede dele" (kaldet partoner, men nu almindeligt identificeret med kvarkerne), dels at eksperimenterne kunne fortolkes vha en næsten latterligt simpel model for protoner: Det så ud som om kvarkerne bevægede sig frit omkring i protonen *uden bindingsenergi!* Det er en af QCD-teoriens største fortjenester at have tilvejebragt et teoretisk grundlag for en forståelse både af denne såkaldte "asymptotiske frihed" og - i hvert fald i princippet - af kvarkconfinement-fænomenet (omend dette sidste endnu langtfra er afklaret), - men herom senere.

En tredje vanskelighed ved kvarkmodellen lå i at hadronklassificeringen syntes at kræve, at kvarkerne - skønt de måtte være spin-$\frac{1}{2}$ partikler - måtte adlyde Bose-Einstein statistik. Problemet blev løst ved at postulere, at hver kvark kan optræde i 3 varianter kaldet rød, blå og grøn, som bortset herfra er identiske. Denne løsning forekom mange temmelig søgt, men som vi skal se i kap. 7, har den direkte eksperimentelle konsekvenser, der er godtgjort, og den giver via gaugeprincippet anledning til en entydig fastlæggelse af hele QCD-teorien. Denne har siden fejret virkelige successer, som vi senere skal studere.

Som en sidste af de oprindelige vanskeligheder, vil vi nævne kvarkmodellens rolle i svage vekselvirkninger, kap. 8. I løbet af 60'erne blev der udviklet en forenet gaugeteori for både svage og elektromagnetiske vekselvirkninger. Denne smukke teori (som Glashow, Salam og Weinberg fik Nobelprisen for i 1979) forudsagde bla en uacceptabelt stor henfaldssandsynlighed for en proces som

$$K^0 \to \mu^+\mu^-$$

Glashow, Iliopoulos og Maiani (GIM-mekanismen) viste i 1970, at vanskeligheden kunne undgås ved at postulere eksistensen af en fjerde kvark, kaldet charmkvarken, og som måtte give anledning til hadroner med masser ca 1-2 GeV højere end de hidtil kendte. Denne forudsigelse blev af de fleste betragtet som en alvorlig vanskelighed. I november 1974 opdagedes imidlertid af to uafhængige amerikanske grupper den såkaldte J/ψ vektorpartikel, som snart viste sig at kunne forstås som opbygget af den fjerde kvark, c. Ved at studere dens familiemedlemmer, dels $c\bar{c}$-mesoner (charmonium-partikler), dels og navnlig såkaldte D-partikler bestående af én c-kvark og én af de gammelkendte, har det været muligt i detalje at eftervise GIM-teoriens forudsigelser om c-kvarken.

Siden 1974 har det været småt med skepsis over for kvarkmodellen. I 1976 fremkom en ny type eksperimentel effekt, jetfænomet. Dette giver, som vi skal se, den hidtil nok mest direkte evidens for kvarkmodellen - og for QCD teorien. I visse typer højenergetiske processer er den dominerende effekt den, at én eller nogle få kvarker får meget høje impulser og derved forsøger at løsrive sig fra deres hadronfængsel. Imidlertid bliver resultatet blot, at nye kvark-antikvarkpar dannes i interkvarkfeltet (gluonfeltet). Eksperimentelt ser man derfor ikke den enkelte kvark, men et større eller mindre antal hadroner (først og fremmest π-mesoner), som imidlertid alle har næsten samme impulsretning som den oprindelige kvark. Det er en sådan kollimeret byge af hadroner, der kaldes en jet. Ved de højeste energier er jetfænomenet særdeles overbevisende, og der har ikke vist sig alvorlige konkurrenter til kvarkteorien hvad angår jetfænomenets fortolkning.

4.2 De kendte kvarker

De kvarker, som vi i dag (jan. 1992) har kendskab til, står opført med deres navne og væsentligste egenskaber i *Tabel 4.1*.

Table 4.1: Kendte kvarker

kvark	Q	masse (MeV)	hadron-energi(MeV)	opdaget
u	2/3	5	$\frac{1}{2}m_\rho = 384$	(1910)
d	$-1/3$	9	$\frac{1}{2}m_\rho = 384$	(1932)
s	$-1/3$	160	$\frac{1}{2}m_\phi = 510$	(1950)
c	2/3	1350	$\frac{1}{2}m_{J/\psi} = 1549$	1974
b	$-1/3$	4650	$\frac{1}{2}m_\Upsilon = 4730$	1976
t	2/3	$\sim$ 130 GeV?	ingen hadroner	$\sim$ 1995 ??

Lad os starte med at gennemgå de enkelte kolonner.

Kvarkernes navne kaldes også ofte deres *flavours* (engelsk: smag eller aroma) til forskel fra deres *colour* (farve). Alle kvarker er SU_3 colour tripletter, men herom senere. Bogstaverne står for flg historisk begrundede "morsomheder":

u : up d : down
c : charm s : strange
t: top b : bottom

Den elektriske ladning Q er den eneste helt væsentlige kolonne i Tabel 4.1 udover navnekolonnen. Kun værdierne $+2/3$ og $-1/3$ forekommer. Lad os allerede her nedskrive en formentlig yderst fundamental antydning af et slægtskab mellem kvarker og leptoner:

$$\begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \nu_e \\ e^- \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} t(?) \\ b \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Vi taler om 1., 2. og 3. generation.

Ligesom leptonerne forekommer i dubletter, hver indeholdende én (negativt) ladet partner (e^-, μ^-, τ^-) og én neutral neutrino $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$, således synes også kvarkerne at optræde i dubletter. Springet i ladning fra det øverste til det nederste medlem er -1 både for kvarker og leptoner: Alle de øverste kvarker har ladning $+2/3$, de nederste $-1/3$. Alle de øverste leptoner har ladning 0, de nederste ladning -1. Bortset fra, at den øverste kvark i 3. dublet (endnu) ikke er fundet, og fra at eksistensen af ν_τ kun er indirekte bekræftet, så er det slående at *antallet* af kvarker og leptoner stemmer overens. Endvidere gælder, at "alt" kendt stof i universet kan forstås som opbygget af de fire fermioner i første generation: u, d, ν_e og e^-. Nylige studier over Z^0-partiklens henfald (se senere kapitler) har vist, at der ikke kan være mere end de nu kendte tre generationer, i hvert fald ikke nogen med en (næsten) masseløs neutrino. Men hvorfor det i øvrigt er sådan, forstår vi ikke. I det hele taget repræsenterer (4.1) mange spørgsmålstegn, som vil være blandt de vigtigste udfordringer til elementarpartikelfysikken fremover.

Tredje kolonne i *Tabel 1* er et forsøg på at tilskrive kvarkerne en masse. For u og d kvarkens vedkommende repræsenterer de viste værdier et modelafhængigt resultat: man kan ikke uden videre måle deres masser.

Fjerde kolonne er derimod direkte et udtryk for hvor meget hver kvark bidrager til *hadronernes* masser. Billedet bliver så , at ultra-relativistiske u- og d kvarker er stående bølger inden i hadronerne. Den typiske hadronstørrelse på henved 1 fm (10^{-15}m) vil da også ifølge ubestemthedsrelationerne forlange impulser og energier nogenlunde svarende hertil. De "tunge" kvarker, c, b er derimod urelativistiske inden i hadroner, og deres energibidrag er kun lidt større end deres egne masser. s-kvarken indtager en mellemstilling. t-kvarken vides nu at være så tung, at den må anses for at være så ustabil, at den henfalder før den får tid til at indgå i nogen hadron(!)

Alle mesoner er bygget af en kvark og en antikvark og alle baryoner er bygget af tre kvarker. Svarende hertil tildeler vi kvarker et "baryontal" på 1/3. Endvidere skal vi senere tildele u og d kvarkerne et "isospin" kvantetal, der gør dem til "iso-dubletter" og alle andre kvarker til "isosingletter". s-kvarken siges (af historiske grunde) ofte at have "strangeness" $= -1$, og c-kvarken at have "charm" $= +1$. Tilsvarende kunne vi tildele b-kvarken "bottomness" $= -1$ etc., men alt dette er nu til dels forladt til fordel for slet og ret at tale om kvarkerne.

I teorien for de svage vekselvirkninger vil samtlige kvarker blive opfattet som hørende til "svage iso-dubletter". Men dette "svage isospin" må ikke forveksles med det "stærke isospin", som vi taler om senere i dette kapitel.

Den "stærke" isospinsymmetri er en konsekvens af QCD, *hvis* u- og $d-$kvarkerne har masser, som er væsentligt mindre end den karakteristiske skala for stærke vekselvirkninger, nu ofte omtalt som "QCD-skalaen", $\Lambda_{QCD} \sim 100-500$ MeV. Tabellen viser, at dette synes at være tilfældet. Hvorfor ved vi ikke. I afsn. 4.4. skal vi komme tilbage til isospin i større detalje.

Den mest karakteristiske egenskab ved kvarkerne er deres evne til at bevare deres identitet. Hverken stærke, elektromagnetiske eller gravitationelle kræfter kan forvandle en kvark af én flavour til en kvark af en anden flavour. Det kan kun de svage vekselvirkninger.

4.3 Mesontilstande

Vi betragter den oversimplificerede *model* for en meson, (fig. (4.1)).

Den fysiske meson antages at opfylde et område Ω i rummet. Inden for dette område kan kvarker og anti-kvarker eksistere *frit*. Uden for området kan kvarkerne ikke eksistere. Såfremt området ikke er for lille, ved vi, at vi approksimativt kan realisere en sådan situation ved at betragte superpositioner af tilstande af kvarker med passende impulser. Alle vores overvejelser gælder kun i mesonens hvilesystem. Et fuldstændigt sæt af tilstande er

$$\Big\{|\{n_i\},\{\overline{n}_j\},\{\vec{p}_i\},\{\vec{\overline{p}}_j\}\rangle\Big\} \tag{4.2}$$

hvor n_i er antallet af kvarker med flavour: i, $\overline{n}_j$-antallet af antikvarker med (anti-)flavour: j. Sættene $\{\vec{p}\}$ og $\{\vec{\overline{p}}_j\}$ betegner tilsvarende impulserne af de forskellige kvarker og antikvarker.

Den simpleste udgave af kvarkmodellen for mesoner fås nu ved at antage, *at vi kun behøver at anvende tilstande med én kvark og én antikvark.*

I en lidt mere realistisk model ville man desuden tillade forekomsten af et vilkårligt antal kvark-antikvark*par* af forskellige flavours. Altså ville vi betragte sættet af tilstande

$$|q_1, \overline{q}_2, \vec{p}\rangle \quad \text{og} \quad |q_1, \overline{q}_2, \vec{p}\ ;\ \{\nu_i\}\ ,\ \{\vec{p}_i\}\rangle$$

hvor kvarken q_1 og antikvarken $\overline{q}_2$ benævnes *valenskvarkerne* med impuls $\vec{p}$ for q_1 og $-\vec{p}$ for $\overline{q}_2$. Tilsvarende er ν_i antallet af kvark-antikvark*par* af flavour i og med impuls $\vec{p}_i$ for q_i og $-\vec{p}_i$ for $\overline{q}_i$. Sådanne ekstra kvark-antikvarkpar benævnes på engelsk "sea quarks". I nærværende kapitel vil vi indskrænke os til at betragte valens-kvarktilstandene.

Lad os nu betragte en generel mesontilstand bestående af kvark q_1 og antikvark $\overline{q}_2$:

$$|(1\overline{2})\{\alpha\}\rangle \equiv \sum_{\vec{p},m_1,m_2} \alpha(\vec{p}, m_1, m_2)|q_1, \overline{q}_2, \vec{p}, m_1, m_2\rangle \tag{4.3}$$

hvor tilstandene på højre side er karakteriseret ved, at q_1 har impuls $\vec{p}$ og spinprojektion m_1 langs z-aksen i sit hvilesystem: $S_3(1) = m_1 = \pm\frac{1}{2}$. Tilsvarende har $\overline{q}_2$ impuls $-\vec{p}$ og $S_3(2) = m_2$.

Vi skal nu koncentrere opmærksomheden om de lavest mulige bundne tilstande, altså dem med mindst mulig masse. Dette fører os til at antage, at $\alpha(\vec{p}, m_1, m_2)$ *er uafhængig af* $\vec{p}$*'s* retning, $\hat{p}$. For at forstå denne antagelse kan vi tænke på et klassisk mekanisk bundet system af klassiske kvarker. Disse kan befinde sig i forskellige vibrations- og rotationstilstande. Hvis inertimomentet er I og impulsmomentet L, vil rotationsenergien være

$$E_{rot} = \frac{L^2}{2I} \quad , \quad I > 0$$

Denne er minimal for $L=0$. Kvantemekanisk gælder det også, at alle "fornuftige" urelativistiske potentialer har deres laveste bundne tilstand for $L=0$, hvor L = baneangulære moment. For et system bestående af to spinløse partikler er $L=0$ tilstanden, så rotationssymmetrisk: Hvis

$$\vec{L}|\ \rangle = 0 \quad \text{så er} \quad e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{L}}|\ \rangle = |\ \rangle$$

hvor $e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{L}}$ er en vilkårlig drejningsoperator. Hermed har vi begrundet vores valg af S-*tilstande* (dvs $L=0$):

$$|(1\overline{2})\{\alpha\}\rangle = \sum_{p,m_1,m_2} \alpha(p, m_1, m_2) \sum_{\hat{p}} |q_1, \overline{q}_2, \vec{p}, m_1, m_2\rangle \tag{4.4}$$

hvor $p = |\vec{p}|$, dvs $\vec{p} = p\cdot\hat{p}$, $\hat{p}$ er en enhedsvektor.

Vi ønsker nu videre at klassificere mesontilstandene efter deres totale impulsmoment J. Hertil skal vi studere transformationsegenskaberne af (4.4) under rotationer. Lad os indføre betegnelsen

$$|q_1, \overline{q}_2\ ; p, m_1, m_2\rangle = \sum_{\hat{p}} |q_1, \overline{q}_2, \vec{p}, m_1, m_2\rangle \tag{4.5}$$

Lad os først se på, hvordan en enkeltpartikeltilstand $|q_1, \vec{p}, m_1\rangle$ transformerer under rotation. Nu er

$$|q_1, \vec{p}, m_1\rangle = e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{K}}|q_1, \vec{0}, m_1\rangle$$

hvor $\vec{K}$ er en boost operator og $\vec{\xi}$ et passende sæt af tre tal, der svarer til Lorentz-transformationen $\vec{0} \rightarrow \vec{p}$. Det afgørende er, at under rotationer transformerer $\vec{K}$ som en vektor. Hvis derfor $\mathcal{R}$ er en rotationsoperator gælder

$$\mathcal{R}|q_1, \vec{p}, m_1\rangle = e^{i\vec{\xi}\cdot(\mathcal{R}\vec{K}\mathcal{R}^{-1})}\mathcal{R}|q_1, \vec{0}, m_1\rangle$$

(bevis: rækkeudvikling af exponentialfunktionen!) Ovenstående gælder for en en-partikeltilstand, men for to-partikeltilstanden i mesonen kan vi behandle hver partikel på tilsvarende måde. Tilstanden har impuls $\vec{p}\,' = R\vec{p}$, hvor $|\vec{p}\,'| = |\vec{p}|$. Men da *alle* værdier af $\hat{p}$ forekommer i (4.5) med samme vægt, betyder det, at resultatet af at virke med $\mathcal{R}$ på en tilstand med (m_1, m_2) er nøjagtigt den samme linearkombination af tilstande (m_1', m_2'), som hvis impulsen havde været nul. Følgelig kan vi glemme, at kvarkerne har nogen som helst relativ bevægelse, når vi skal udregne J. Tilstanden (4.5) opfører sig under rotationer blot som en tilstand af q_1 og $\overline{q}_2$ i hvile med $S_3(1) = m_1$ og $S_3(2) = m_2$.

Herefter er det for det første klart, at vi får de to muligheder: $J = 0$ og $J = 1$, og for det andet finder vi ved på sædvanlig måde at sammensætte angulære momenter vha Clebsch-Gordan-koefficienter:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{J=0}: \\
|q_1, \overline{q}_2; 0\rangle &= \sum_p \alpha_0(p)\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|q_1, \overline{q}_2, p; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |q_1, \overline{q}_2, p; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle\right] \qquad (4.6)\\
&\mathbf{J=1}: \\
|q_1, \overline{q}_2; M=1\rangle &= \sum_p \alpha_1(p)|q_1, \overline{q}_2, p; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\
|q_1, \overline{q}_2; M=0\rangle &= \sum_p \alpha_1(p)\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|q_1, \overline{q}_2, p; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |q_1, \overline{q}_2, p; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle\right] \\
|q_1, \overline{q}_2; M=-1\rangle &= \sum_p \alpha_1(p)|q_1, \overline{q}_2, p; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Disse tilstande er alle egentilstande af paritetsoperatoren med egenværdien −1. Dette følger af, at

$$\mathcal{P}|q_1, \overline{q}_2; \vec{p}, m_1, m_2\rangle = -|q_1, \overline{q}_2; -\vec{p}, m_1, m_2\rangle \qquad (4.8)$$

da spinnene er uændrede under paritet (axialvektorer), og da fermioner og antifermioner har modsat indre paritet. Egenværdien af $\vec{p}$ skifter fortegn under $\mathcal{P}$, men da mesontilstanden indeholder en sum over alle retninger af $\hat{p}$, fås det påståede.

Hvis kvarkerne q_1 og $\overline{q}_2$ har forskellig flavour, vil mesontilstanden ikke være en egentilstand af ladningskonjugering. Hvis derimod q_1 og $\overline{q}_2$ er hinandens antipartikel, taler vi om en *kvarkoniumtilstand* (i analogi med positronium). I så fald findes for virkningen af $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}|q(\vec{p}, m_1), \overline{q}(-\vec{p}, m_2)\rangle &= |\overline{q}(\vec{p}, m_1), q(-\vec{p}, m_2)\rangle \\
&= -|q(-\vec{p}, m_2), \overline{q}(\vec{p}, m_1)\rangle \quad \text{(Fermi-statistik)} \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

hvoraf

$$\mathcal{C}\sum_{\hat{p}} |q, \overline{q}, \vec{p}; m_1, m_2\rangle = -\sum_{\hat{p}} |q, \overline{q}, \vec{p}; m_2, m_1\rangle \qquad (4.10)$$

Ved at sammenligne med (4.6) og (4.7) ses, at:

$$\begin{array}{llll} \text{Kvarkoniumtilstande med} & J^P = 0^- & \text{har} & C = +1 \\ \text{Kvarkoniumtilstande med} & J^P = 1^- & \text{har} & C = -1 \end{array} \tag{4.11}$$

Dette altså kun for S-tilstande (dvs $L = 0$ tilstande). For fuldstændighedens skyld nævner vi resultaterne for en $(q_1, \overline{q}_2)$-tilstand med baneangulært moment L og totalt spin S (ikke at forveksle med S-tilstande):

$$\mathcal{P}|q_1, \overline{q}_2; L, S(JM)\rangle = (-)^{L+1}|q_1, \overline{q}_2; L, S(JM)\rangle \tag{4.12}$$

$$\mathcal{C}|q\overline{q}; L, S(JM)\rangle = (-)^{L+S}|q, \overline{q}; L, S(JM)\rangle \tag{4.13}$$

Bevis: Øvelse!

Lad os nu sammenligne med de eksperimentelt etablerede letteste mesoner.

Tabel 2 og 3 viser kvarkopbygningen for de formodede $L = 0$ mesoner. Partiklerne med $J^P = 0^-$ kaldes de pseudoskalære mesoner, medens dem med $J^P = 1^-$ kaldes vektormesonerne.

Table 4.2: Pseudoskalære $J^P = 0^-$ mesoner, masseværdier i MeV i parentes.

	u	d	s	c	b
$\overline{u}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^0(135) + \eta(549))$	$\pi^-(140)$	$K^-(494)$	$D^0(1865)$	$B^-(5278)$
$\overline{d}$	$\pi^+(140)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^0(135) - \eta(549))$	$\overline{K}^0(498)$	$D^+(1869)$	$\overline{B}^0(5279)$
$\overline{s}$	$K^+(494)$	$K^0(498)$	$\eta'(958)$	$D_s^+(1969)$	?
$\overline{c}$	$\overline{D}^0(1865)$	$D^-(1869)$	$D_s^-(1969)$	$\eta_c(2980)$	?
$\overline{b}$	$B^+(5278)$	$B^0(5279)$	?	?	?

Table 4.3: Vektormesoner $J^P = 1^-$, masseværdier i MeV i parentes.

	u	d	s	c	b
$\overline{u}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^0(768) + \omega(783))$	$\rho^-(768)$	$K^{*-}(892)$	$D^{*0}(2010)$	?
$\overline{d}$	$\rho^+(768)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^0(768) - \omega(783))$	$\overline{K}^{*0}(896)$	$D^{*+}(2010)$	?
$\overline{s}$	$K^{*+}(892)$	$K^{*0}(896)$	$\varphi(1019)$	$D_s^{*+}(2110)$	?
$\overline{c}$	$\overline{D}^{*0}(2010)$	$D^{*-}(2010)$	$D_s^{*-}(2110)$	$J/\psi(3097)$	?
$\overline{b}$	?	?	?	?	$\Upsilon(9460)$

Lad os først knytte en række simple bemærkninger hertil. De mange spørgsmål vedrørende mesoner med b-kvarker er blot et udtryk for, at disse partikler er vanskelige at producere og identificere i de eksperimenter, der til dato har kunnet udføres. Denne situation kan formodes at blive ændret i de kommende år.

Kvarksammensætningen af π^0, η, η' hhv ρ^0, ω, φ kan også udtrykkes således:

$$|\pi^0\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(|u\overline{u}\rangle - |d\overline{d}\rangle) \quad , \quad |\eta\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(|u\overline{u}\rangle + |d\overline{d}\rangle) \quad |\eta'\rangle = |s\overline{s}'\rangle \tag{4.14}$$

$$|\rho^0\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(|u\overline{u}\rangle - |d\overline{d}\rangle \quad , \quad |\omega\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(|u\overline{u}\rangle + |d\overline{d}\rangle) \quad |\varphi\rangle = |s\overline{s}\rangle \tag{4.15}$$

Medens forholdene her for $\pi^0, \rho^0, \omega, \varphi$ er velunderbyggede, er sammensætningen af η og η' nok snarere visse linearkombinationer af de viste.

Grunden til, at de fysiske mesoner *ikke* optræder som $|u\overline{u}\rangle$ og $|d\overline{d}\rangle$ sammensætninger, men snarere som symmetriske og antisymmetriske linearkombinationer heraf, skal vi komme tilbage til i næste afsnit om isospin.

Bemærk det historisk uheldige valg af navne: K-mesonerne, K^+ og K^0, indeholder en *anti*-s-kvark, medens *anti*-K-mesonerne K^- og $\overline{K}^0$ indeholder en s-kvark. Tilsvarende betegnes mesoner med en b-kvark som *anti*-B-mesoner, medens dem med en $\overline{b}-$ kvark betenges $B-$mesoner. Ved charmkvarken er valgt en rimeligere notation: D-mesonerne D^+ og D^0 indeholder en c-kvark, medens *anti*-D-mesonerne D^- og $\overline{D}^0$ indeholder en anti-c-kvark.

Det anbefales læseren at studere PDG-tabellerne over partiklernes egenskaber. Specielt bør hun/han filosofere over masseværdierne og sammmenligne med masserne i Tabel 4.1.

Det er en betydelig succes for kvarkmodellen, at alle observerede 0^- og 1^- tilstande har en naturlig plads i systemet, samt at der ikke er nogen "pinlige" huller. Specielt fremhæves, at der aldrig er observeret dobbeltladede mesoner.

4.4 Isospin

I kvarkmodellen kan hypotesen om isospininvarians formuleres på den måde, at de stærke vekselvirkninger ikke "kan se forskel" på en u-kvark og en d-kvark. En første konsekvens heraf er, at hvis vi i en hadron erstatter en u-kvark med en d-kvark eller omvendt, så får vi en ny fysisk hadron med samme masse og samme stærke vekselvirkninger.

Det er da også slående, at masseforskellen mellem hadroner, der kun adskiller sig ved u- eller d-kvarkforskelle, har meget nært sammenfaldende masser:

$$\begin{aligned}
m(p) = 938.2723 \pm 0.0003 \ \text{MeV} \quad &, \quad m(n) = 939.5656 \pm 0.0003 \ \text{MeV} \\
m(\pi^\pm) = 139.5675 \pm 0.0004 \ \text{MeV} \quad &, \quad m(\pi^0) = 134.9739 \pm 0.0006 \ \text{MeV} \\
m(K^\pm) = 493.646 \pm 0.009 \ \text{MeV} \quad &, \quad m(K^0) = 497.67 \pm 0.03 \ \text{MeV} \\
m(D^\pm) = 1869.3 \pm 0.4 \ \text{MeV} \quad &, \quad m(D^0) = 1864.5 \pm 0.5 \ \text{MeV} \\
m(B^\pm) = 5277.6 \pm 1.4 \ \text{MeV} \quad &, \quad m(B^0) = 5279.4 \pm 1.5 \ \text{MeV}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Isospinbrydningen ses at være højst nogle få procent. En tilsvarende høj nøjagtighed er fundet i talrige undersøgelser af konsekvenser af isospininvarians for overgangs*amplituder*. Den omstændighed, at isospinbrydningen var så lille som nogle få procent, førte tidligt til en formodning om, at isospininvarians var en eksakt, fundamental egenskab ved de stærke vekselvirkninger, medens brydningen udelukkende skyldtes de elektromagnetiske kræfter. Dette stemmer løseligt med, at den elektromagnetiske finstrukturkonstant $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ (om enheder, se kap. 5) er ca. $1/137 \simeq 1\%$, medens de stærke vekselvirkninger målt i samme enheder har en karakteristisk styrke af $\mathcal{O}(1)$.

En alvorlig vanskelighed ved denne fortolkning melder sig straks ved at kaste et blik på *fortegnet* af masseforskellene indenfor samme isospinmultiplet. Vi ville vente, at ladede partikler måtte besidde et ekstra positivt elektrostatisk bidrag til deres energi (masse) i forhold til neutrale partikler. Det omvendte er imidlertid ofte tilfældet.

Den almindelige antagelse idag er, at isospinbruddet også skyldes en forskel i *massen* af u-kvarker og d-kvarker, idet d-kvarken synes tungere, jfr. Tabel 4.1. Dette giver en rimelig "forklaring" på mange masseforskelle indenfor isospinmultipletter. I afsnittet om kvantechromodynamik skal vi yderligere belyse isospinsymmetriens mulige oprindelse.

Her skal vi nu opstille det formelle værktøj til behandling af isospininvarians, idet vi overalt tager vores udgangspunkt i kvarkmodellen. Vi antager altså i den resterende del af dette afsnit, at isospin er eksakt bevaret.

Lad $|u\rangle$ og $|d\rangle$ være tilstande af hhv en u- og d-kvark i samme impuls og spintilstand. Så er påstanden, at de stærke vekselvirkninger ikke kan se forskel hverken på disse to tilstande eller en vilkårlig normeret linearkombination

$$|a\rangle \equiv a_u|u\rangle + a_d|d\rangle \tag{4.17}$$

hvor

$$|a_u|^2 + |a_d|^2 = 1$$

Vi kan repræsentere den generelle isospin-roterede tilstand $|a\rangle$ ved søjlen

$$|a\rangle \; : \; \begin{pmatrix} a_u \\ a_d \end{pmatrix} .$$

Så er $|u\rangle$ repræsenteret ved $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $|d\rangle$ ved $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den mest generelle måde at transformere mellem linearkombinationerne (4.17) på er vha 2×2-matricerne:

$$\begin{pmatrix} a_u \\ a_d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a'_u \\ a'_d \end{pmatrix} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} a_u \\ a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_u \\ a_d \end{pmatrix}$$

Normeringsbetingelsen $a'_u a'^*_u + a'_d a'^*_d = a_u a^*_u + a_d a^*_d = 1$ betyder, at $\mathbf{U}$ må være unitær: Idet vi skriver

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} a_u \\ a_d \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{q}^\dagger = (a^*_u \; a^*_d) \quad \text{etc}$$

har vi

$$a'^*_u a'_u + a'^*_d a'_d = \mathbf{q}'^\dagger \mathbf{q}' = \mathbf{q}^\dagger \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} \mathbf{q} = \mathbf{q}^\dagger \mathbf{q} \quad , \quad \text{for alle } \mathbf{q}$$

hvis og kun hvis $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{1}$, altså at $\mathbf{U}$ er unitær. For determinanten af en unitær matrix gælder

$$\det \mathbf{U} = e^{i\varphi}$$

Fasen φ har vi ingen interesse i her og nu. Vi indskrænker os derfor til transformationer for hvilke

$$\det \mathbf{U} = 1$$

Gruppen af unitære 2×2-matricer med determinant $= 1$ kaldes gruppen af Specielle. Unitære 2×2-matricer, eller $SU(2)$. Det er velkendt fra teorien om angulære momenter, hvorledes disse matricer kan angives på formen

$$\mathbf{U} = e^{i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \tag{4.18}$$

hvor

$$\vec{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

er Pauli-matricerne, medens $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ er et sæt af tre reelle tal. Pauli-matricerne tilfredsstiller ombygningsrelationerne

$$\left[\frac{\sigma_i}{2} , \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\ \epsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2} \tag{4.19}$$

som er de karakteristiske ombytningsrelationer for angulært moment (heraf betegnelsen iso*spin*).

Der er uendeligt mange sæt af tre matricer $\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$, som tilfredsstiller ombytningsrelationerne

$$[I_i, I_j] = i\ \epsilon_{ijk} I_k \tag{4.20}$$

Ethvert sådant sæt kaldes en *repræsentation af* $SU(2)$*-algebraens generatorer*, og mængden af linearkombinationer af generatorerne $\{\vec{\theta}\cdot\vec{I} | \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \grave{R}\}$ betegnes en *repræsentation af* $SU(2)$*-algebraen.* Tilsvarende kaldes matricerne

$$\{e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{I}}\}$$

en *repræsentation af* $SU(2)$*-gruppen.*

Sættet af linearkombinationer af u- og d-kvarker $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} a_u \\ a_d \end{pmatrix}$ siges at *bære* den 2-dimensionale eller *fundamentale repræsentation*, og u- og d-kvarkerne siges at danne en $SU(2)$-dublet; de siges at have isospin $\frac{1}{2}$.

Den trivielle repræsentation er 1×1-matricen $\{0\}$ for algebraen:

$$\vec{I} \equiv (I_1, I_2, I_3) \to (0,0,0) \quad \text{og} \quad e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{I}} \to 1$$

Tilstande, som bærer denne, siges at have isospin 0.

Forholdene er helt analoge til forholdene ved sædvanligt spin.

Foruden matrix-*repræsentationer* af isospingeneratorerne og af isospintransformationerne er det bekvemt at indføre en betegnelse for de abstrakte operatorer. Vi betegner således isospinoperatorerne med

$$\vec{\mathcal{I}} \equiv (\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3)$$

og en bestemt matrixrepræsentation af $\vec{\mathcal{I}}$ med

$$\vec{I} \equiv (I_1, I_2, I_3)$$

hvor altså I_1, I_2 og I_3 er sædvanlige matricer, hvis dimension afhænger af, hvad det er for tilstande vi skal transformere. Under en isospintransformation beskrevet ved den abstrakte transformation

$$\mathcal{U} = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\mathcal{I}}}$$

hvor $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ er sædvanlige reelle tal, transformerer en up/down-kvarkdublet således

$$\begin{pmatrix} a_u \\ a_d \end{pmatrix} \equiv \mathbf{q} \to \mathbf{q}' \equiv \mathcal{U}\mathbf{q}\mathcal{U}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{q} \tag{4.21}$$

hvor $\mathbf{U}$ er 2×2-matrixrepræsentationen af operatoren $\mathcal{U}$:

$$\mathbf{U} = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{I}} \quad \text{og} \quad \vec{I} = \left(\frac{\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_2}{2}, \frac{\sigma_3}{2}\right)$$

Lad os nu se, hvad transformationsloven (4.21) betyder for skabelses- og annihilationsoperatorerne. Den generelle tilstand

$$|a\rangle = a_u|u\rangle + a_d|d\rangle$$

transformerer jo i

$$|a'\rangle = a'_u|u\rangle + a'_d|d\rangle \quad \text{hvor} \quad \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} a'_u \\ a'_d \end{pmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{q}$$

Lad os indføre betegnelsen

$$|a\rangle = (a_u \cdot u^\dagger + a_d \cdot d^\dagger)|0\rangle = (u^\dagger d^\dagger)\begin{pmatrix} a_u \\ a_d \end{pmatrix}|0\rangle$$

hvor $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ er søjlen af annihilationsoperatorer og $(u^\dagger d^\dagger)$ den hermitesk konjugerede række. Vi kan endvidere kalde

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \equiv \chi \quad \text{og} \quad (u^\dagger d^\dagger) = \chi^\dagger$$

Så har vi $|a\rangle = \chi^\dagger\mathbf{q}|0\rangle \to |a'\rangle = \chi^\dagger\mathbf{q}'|0\rangle$ eller

$$\chi^\dagger\mathbf{q} \to \chi^\dagger\mathbf{q}' = \chi^\dagger\mathbf{U}\mathbf{q}$$

Da dette skal gælde for en vilkårlig søjle $\mathbf{q}$, har vi

$$\chi^\dagger \to \chi^\dagger\mathbf{U} \tag{4.22}$$

Dette resultat kan vi bruge til at finde, hvorledes *anti-kvarktilstandene* transformerer under isospintransformationer. Vi har jo nemlig fx for d-kvarkfeltet

$$\psi_d(x) = \sum_{\vec{p},s}\left\{d(p,s)u(p,s)e^{-ipx} + \overline{d}^\dagger(p,s)v(p,s)e^{ipx}\right\}$$

Her er vi løbet ind i en temmelig uundgåelig notationsforvirring. Symbolet $u(p,s)$, f. eks., betyder her spinoren med fire komponenter - ikke annihilationsoperatoren for en u-kvark, etc. etc. Det burde altid fremgå af sammenhængen, hvad meningen er.

Det er nu klart, at vi må forlange, at skabelses- og annihilationsleddet i ψ_d transformerer på samme måde - ellers får ψ_d selv ingen fornuftig transformationsegenskab. Vi forestiller os altså, at dubletten af kvark-*felter*

$$\begin{pmatrix} \psi_u(x) \\ \psi_d(x) \end{pmatrix}$$

transformerer som en god isospin-dublet. Dette vil i vid udstrækning blive begrundet senere af QCD-teorien. Men dette betyder, at hvis vi indfører betegnelsen

$$\tilde{\overline{\chi}} \equiv \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{d} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \tilde{\overline{\chi}}^\dagger \equiv (\overline{u}^\dagger \overline{d}^\dagger)$$

så må vi iflg. (4.22) forlange, at

$$\begin{pmatrix} \overline{u}^\dagger \\ \overline{d}^\dagger \end{pmatrix} \to \mathbf{U}^\dagger \begin{pmatrix} \overline{u}^\dagger \\ \overline{d}^\dagger \end{pmatrix}$$

eller

$$\tilde{\overline{\chi}}^\dagger \to \tilde{\overline{\chi}}^\dagger (\mathbf{U}^\dagger)^T = \tilde{\overline{\chi}}^\dagger \mathbf{U}^* \tag{4.23}$$

Vi ser det uundgåelige, at medens skabelsesoperatorerne for kvarktilstande transformerer med matricen $\mathbf{U}$ i (4.22), så transformerer antikvark skabelsesoperatorerne med matricen $\mathbf{U}^*$.

For den generelle antikvark *tilstand*

$$|\overline{a}\rangle = a_{\overline{u}}|\overline{u}\rangle + a_{\overline{d}}|\overline{d}\rangle = (a_{\overline{u}}\overline{u}^\dagger + a_{\overline{d}}\overline{d}^\dagger)|0\rangle = \tilde{\overline{\chi}}^\dagger \tilde{\overline{\mathbf{q}}}|0\rangle$$

hvor

$$\tilde{\overline{\mathbf{q}}} \equiv \begin{pmatrix} a_{\overline{u}} \\ a_{\overline{d}} \end{pmatrix}$$

gælder $\tilde{\overline{\chi}}^\dagger \tilde{\overline{\mathbf{q}}} \to \tilde{\overline{\chi}}^\dagger \mathbf{U}^* \tilde{\overline{\mathbf{q}}}$, som også kan formuleres som følgende transformationslov for koefficientsøjlen $\tilde{\overline{\mathbf{q}}}$:

$$\tilde{\overline{\mathbf{q}}} \to \mathbf{U}^* \tilde{\overline{\mathbf{q}}} \tag{4.24}$$

Dette er altsammen særdeles upraktisk. Vi ønsker at kunne bruge samme tabeller over Clebsch-Gordan koefficienter for antikvarker, som vi bruger for kvarker.

En del af forklaringen på forvirringen kommer af, at vi selvfølgelig har vendt op og ned på søjlerne:

$$\tilde{\overline{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} a_{\overline{u}} \\ a_{\overline{d}} \end{pmatrix}$$

Det er jo nemlig $|\overline{d}\rangle$ og ikke $|\overline{u}\rangle$, der har $I_3 = +\frac{1}{2}$. Men som vi nu skal se, er det ikke nok at vende søjlen omvendt. Vi søger en søjle, som vi vil kalde $\overline{\mathbf{q}}$ og som transformerer som

$$\overline{\mathbf{q}} \to \mathbf{U}\overline{\mathbf{q}} \tag{4.25}$$

Nu gælder jo

$$\mathbf{U} = e^{i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \quad \text{og} \quad \mathbf{U}^* = e^{-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}^*}{2}}$$

Men $\sigma_1 = \sigma_1^*$, $\sigma_2 = -\sigma_2^*$, $\sigma_3 = \sigma_3^*$. Heraf - og af ombytningsrelationerne for Pauli-matricerne - fås

$$\sigma_i^* = -\sigma_2\sigma_i\sigma_2 = (+i\sigma_2)\sigma_i(i\sigma_2) \quad \text{og} \quad \mathbf{U}^* = (-i\sigma_2)\mathbf{U}(i\sigma_2)$$

(**Øvelse!**)

Vi får så af (4.24):

$$\tilde{\overline{\mathbf{q}}} \rightarrow (-i\sigma_2)\mathbf{U}(i\sigma_2)\tilde{\overline{\mathbf{q}}} \quad \text{eller} \quad i\sigma_2\tilde{\overline{\mathbf{q}}} \rightarrow \mathbf{U}i\sigma_2\tilde{\overline{\mathbf{q}}}$$

der viser, at den søgte søjle med de "gode" transformationsegenskaber er

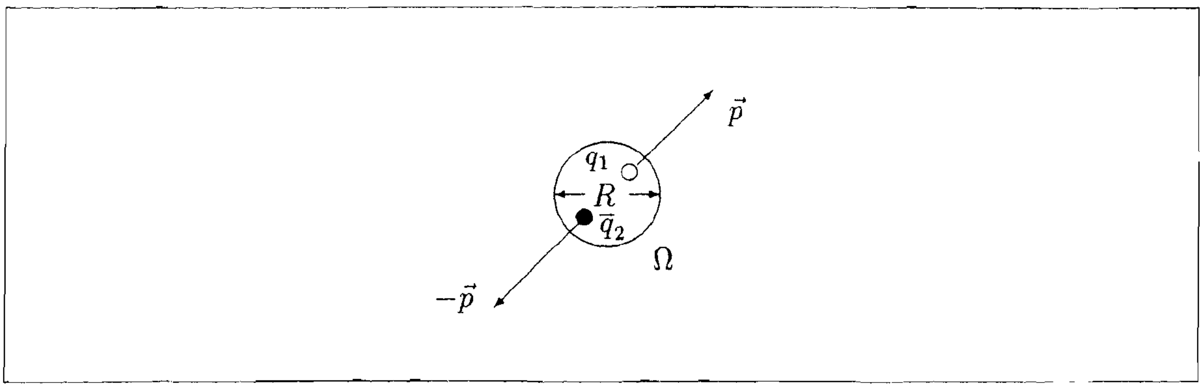
$$\overline{\mathbf{q}} \equiv i\sigma_2\tilde{\overline{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\overline{u}} \\ a_{\overline{d}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\overline{d}} \\ -a_{\overline{u}} \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Det er for at opnå dette resultat med minustegnet på $a_{\overline{u}}$, at vi har gjort os så stor en ulejlighed med disse transformationsregler.

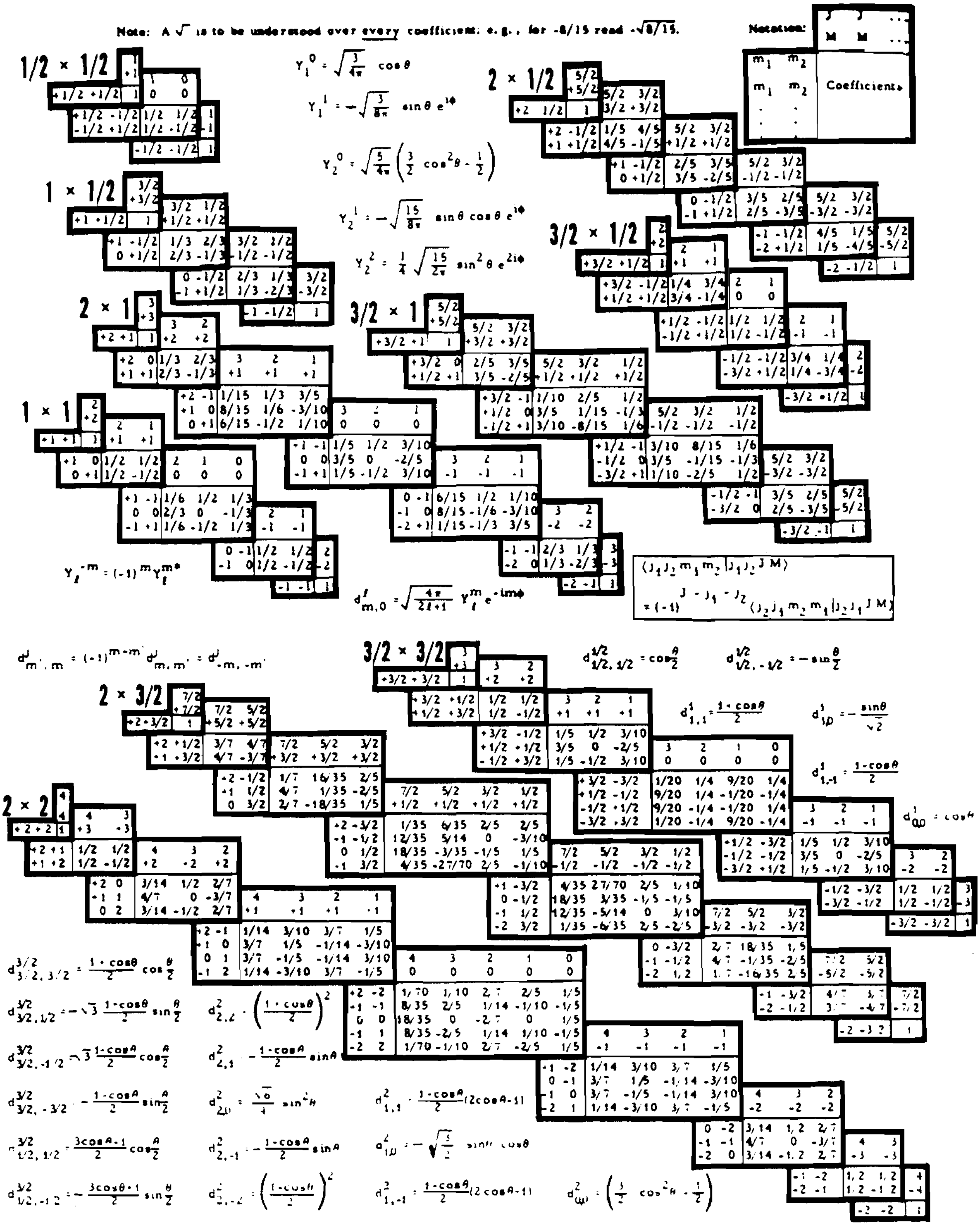
Konklusionen er, at når vi skal opbygge elementarpartikler med bestemte isospin, skal vi bruge kvarkdubletterne

$$\begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} |\overline{d}\rangle \\ -|\overline{u}\rangle \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

som begge har $I = \frac{1}{2}$ og $I_3 = \pm\frac{1}{2}$.



Figur 4.1: "Sæk"-modellens (eng.: bag model) billede af en meson med en kvark og en anti-kvark inden i.



Figur 4.2: Tabeller for Clebsch-Gordan-koefficienter og kuglefunktioner. Kilde: PDG-tabellerne, her: Phys. Lett. **239 B** (1990) 1

4.5 Mesonernes isospinstruktur

Lad os først betragte mesoner, som udelukkende består af u- og d-kvarker (og antikvarker). Det drejer sig fx om de pseudoskalære singlet-S-tilstande

$$\pi^\pm, \pi^0 \quad (I=1) \qquad \text{og} \qquad \eta \quad (I=0)$$

samt om vektormesonerne eller triplet-S-tilstandene

$$\rho^\pm, \rho^0 \quad (I=1) \qquad \text{og} \qquad \omega \quad (I=0)$$

Isospinforholdene for disse er helt analoge. Lad os først bruge en notation, som svarer til vektormesonerne. Vi *underforstår* overalt sådanne spin- og impulstilstandssuperpositioner, som allerede er behandlet i kap. 4.3.

Ved at bruge de to isospindubletter

$$\begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} |\overline{d}\rangle \\ -|\overline{u}\rangle \end{pmatrix}$$

og en tabel over Clebsch-Gordan-koefficienter får vi så, idet vi vedtager, at $|\rho^+\rangle, |\rho^-\rangle, |\rho^0\rangle, |\omega\rangle$ skal have sådanne relative fortegn, at de transformerer som rene isospinmultipletter:

$$|\rho^+\rangle = |I=1, I_3=1\rangle = |u\rangle \otimes |\overline{d}\rangle \equiv |u\overline{d}\rangle \tag{4.28}$$

$$|\rho^0\rangle = |I=1, I_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|u\rangle \otimes (-|\overline{u}\rangle) + |d\rangle \otimes |\overline{d}\rangle\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|d\overline{d}\rangle - |u\overline{u}\rangle) \tag{4.29}$$

$$|\rho^-\rangle = |d\rangle \otimes (-|\overline{u}\rangle) = -|d\overline{u}\rangle \tag{4.30}$$

$$|\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|u\rangle \otimes (-|\overline{u}\rangle) - |d\rangle \otimes |\overline{d}\rangle\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|u\overline{u}\rangle + |d\overline{d}\rangle) \tag{4.31}$$

Pga minustegnet i (4.31) ses meget ofte en notation svarende til, at alle tilstande multipliceres med -1. Et sådant fælles fortegn på alle tilstande har ingen fysisk betydning, kun *relative* faser influerer på observable. Men der er grund til at advare mod sammenblanding af forskellige notationer.

Det er vigtigt at understrege, at antagelsen om isospininvarians betyder, at det er de symmetriske og antisymmetriske superpositioner af $|u\overline{u}\rangle$ og $|d\overline{d}\rangle$ tilstande, som modsvares af fysiske partikler. Det er disse som transformerer irreducibelt, dvs med bestemt isospin. Udfra kvarkmodellen alene kan vi ikke gætte, at det skulle være sådan. Vi ville vel nærmest tro, at det var de "rene" kvarktilstande $|u\overline{u}\rangle$ og $|d\overline{d}\rangle$, som var fysisk mest betydningsfulde. Vi skal i de følgende afsnit vende tilbage til disse spørgsmål og gradvist belyse dem nærmere fra forskellig side.

Forholdene for mesoner, som kun indeholder én u- eller d-kvark (eller antikvark), er endnu simplere. Idet således s-kvarktilstande er isosingletter (invariante under $u \leftrightarrow d$), får vi trivielt for isospin-K-tilstande

$$\begin{aligned} |K^+\rangle &= |u\rangle \otimes |\overline{s}\rangle = |u\overline{s}\rangle \\ |K^0\rangle &= |d\rangle \otimes |\overline{s}\rangle = |d\overline{s}\rangle \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned} |K^-\rangle &= (-|\overline{u}\rangle) \otimes |s\rangle = -|\overline{u}s\rangle \\ |\overline{K}^0\rangle &= |\overline{d}\rangle \otimes |s\rangle = |\overline{d}s\rangle \end{aligned} \tag{4.33}$$

Med denne definition transformerer tilstandene som rene dubletter:

$$\begin{pmatrix} |K^+\rangle \\ |K^0\rangle \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} |\overline{K}^0\rangle \\ |K^-\rangle \end{pmatrix}$$

men hvis vi beskriver $K^{\pm}$-tilstande ved et "effektivt" felt $\Phi_K(x)$, hvor $|K^+\rangle$-tilstande skabes af $\Phi_K^\dagger$, så er det med fortegnet i (4.33) *minus* Φ_K : $-\Phi_K$, der skaber $|K^-\rangle$-tilstande.

Såvel elektromagnetiske som stærke vekselvirkninger er invariante under ladningskonjugering. Dette er dels en eksperimentel kendsgerning og dels, som vi siden skal se, en konsekvens af kvanteelektrodynamikken hhv kvantechromodynamikken. For kvarkonium-tilstande giver dette anledning til nyttige udvalgsregler. For ladede mesoner derimod er det besværligt umiddelbart at benytte ladningskonjugeringsinvarians. Fx vil vi finde

$$\mathcal{C}|\rho^+\rangle = \mathcal{C}|u\overline{d}\rangle = |\overline{u}d\rangle \propto |\rho^-\rangle$$

der viser, at $|\rho^+\rangle$ (selvfølgelig) ikke er en egentilstand af $\mathcal{C}$.

Det er imidlertid muligt at kombinere ladningskonjugering og isospin i et enkelt meget nyttigt kvantetal: *G-paritet*. På kvarkniveau har vi

$$\begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} |\overline{u}\rangle \\ |\overline{d}\rangle \end{pmatrix}$$

Her er første dublet en isospindublet, medens dette *ikke* er tilfældet med den anden. Men det er så nærliggende at definere en operation (G-paritet) ved

$$G\begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\overline{d}\rangle \\ -|\overline{u}\rangle \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

hvor jo begge dubletter er rene isospindubletter. For *alle* andre kvarker: s, c, b, t, defineres

$$G|q\rangle = |\overline{q}\rangle,$$

dvs G virker som $\mathcal{C}$ for disse.

Det ses, at vi for kvarker kan skrive $G = \mathcal{C}i\sigma_2$. Så fås

$$G^2\begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} |\overline{d}\rangle \\ -|\overline{u}\rangle \end{pmatrix} = \mathcal{C}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |\overline{d}\rangle \\ -|\overline{u}\rangle \end{pmatrix} = \mathcal{C}\begin{pmatrix} -|\overline{u}\rangle \\ -|\overline{d}\rangle \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \end{pmatrix}$$

Bemærk, at $G^2 = -1$ *for isospin* $\frac{1}{2}$ kvarker. Specielt har vi

$$G|\overline{u}\rangle = +|d\rangle \quad , \quad G|\overline{d}\rangle = -|u\rangle$$

I den udstrækning både $\mathcal{C}$ og isospin er bevaret, er dette også tilfældet med G.

Lad os nu finde G for de pseudoskalære mesoner og vektormesonerne bestående af u- og d-kvarker/antikvarker. Ved at bruge, både hvad vi har lært om sammensætning af spin og af isospin ((4.6), (4.7) og (4.28),(4.29),(4.30),(4.31)), finder vi

$$|\pi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\uparrow\rangle|\overline{d}\downarrow\rangle - |u\downarrow\rangle|\overline{d}\uparrow\rangle) \tag{4.35}$$

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|d\uparrow\rangle|\overline{d}\downarrow\rangle - |d\downarrow\rangle|\overline{d}\uparrow\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\uparrow\rangle|\overline{u}\downarrow\rangle - |u\downarrow\rangle|\overline{u}\uparrow\rangle)\right\} \tag{4.36}$$

$$|\pi^-\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|d\uparrow\rangle|\overline{u}\downarrow\rangle - |d\downarrow\rangle|\overline{u}\uparrow\rangle) \tag{4.37}$$

$$|\eta\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|d\uparrow\rangle|\overline{d}\downarrow\rangle - |d\downarrow\rangle|\overline{d}\uparrow\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\uparrow\rangle|\overline{u}\downarrow\rangle - |u\downarrow\rangle|\overline{u}\uparrow\rangle)\right\} \tag{4.38}$$

For virkningen af G findes så, idet vi bruger Fermi-statistik, samt at koefficienterne i impulssummerne (som er undertrykt) er symmetriske under $\hat{p} \to -\hat{p}$:

$$G|\pi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\bar{d}\uparrow\rangle(-|u\downarrow\rangle) - |\bar{d}\downarrow\rangle(-|u\uparrow\rangle)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\downarrow\rangle|\bar{d}\uparrow\rangle - |u\uparrow\rangle|\bar{d}\downarrow\rangle) = -|\pi^+\rangle$$

Tilsvarende for de andre $|\pi\rangle$-tilstande:

$$G|\pi^{\stackrel{\pm}{0}}\rangle = -|\pi^{\stackrel{\pm}{0}}\rangle \tag{4.39}$$

dvs *alle* π-tilstande er egentilstande af G med egenværdien -1. For η-tilstanden fås tilsvarende

$$G|\eta\rangle = +|\eta\rangle \tag{4.40}$$

Af (4.7) ses, at alle spintilstande af vektormesoner er symmetriske i spinkvantetallene i modsætning til de pseudoskalære mesontilstande, som er antisymmetriske i spinkvantetallene. Vi får derfor (hvilket også let bekræftes ved direkte regning):

$$\left.\begin{array}{l} G|\rho^{\stackrel{\pm}{0}}\rangle = +|\rho^{\stackrel{\pm}{0}}\rangle \\ G|\omega\rangle = -|\omega\rangle \end{array}\right\} \tag{4.41}$$

Enhver tilstand bestående af n π-mesoner har

$$G = (-1)^n \tag{4.42}$$

Dette giver anledning til den meget nyttige udvalgsregel, at *egentilstande af G henfalder altid til enten et lige eller et ulige antal π-mesoner alt eftersom $G = +1$ eller $G = -1$.*

G-paritet er mere besværlig og mindre nyttig at anvende, hvis henfaldsprodukterne indeholder andre partikler end π-mesoner.

4.6 Eksempler på brug af isospin og G-paritet

4.6.1 ρ-henfald

Med en masse på 768 MeV har ρ-mesonen i princippet mulighed for at henfalde til op til 5 π-mesoner, medens det "billigste" henfald til strange partikler $K\overline{K}$ er forbudt, fordi $2m_K = 988$ MeV. Iflg. foregående paragraf har imidlertid ρ-mesonen $G = +1$, så et henfald til tre eller fem π-mesoner forventes stærkt undertrykt. Tilbage bliver mulighederne $\rho \to 2\pi$ og $\rho \to 4\pi$. Faserummet[2] for det sidste er meget lille. Eksperimentelt gælder, at $\rho \to 4\pi$ aldrig er set. Henfaldet er fuldstændig domineret af $\rho \to 2\pi$, omend henfaldene $\rho \to e^+e^-$ og $\mu^+\mu^-$ er målt med forgreningsforhold af $\mathcal{O}(10^{-5})$. Som vi senere skal se giver disse sjældne henfald interessante informationer.

De ladede ρ-mesoner har derfor kun flg. stærke henfald

$$\rho^+ \to \pi^+\pi^0 \quad \text{og} \quad \rho^- \to \pi^-\pi^0$$

Den neutrale ρ-mesons henfald er yderligere instruktivt at studere. Af mulighederne $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$ og $\rho^0 \to \pi^0\pi^0$ forekommer kun det første! Det andet er *ikke* forbudt af G-paritet, men derimod af ladningskonjugering:

$$C(\rho^0) = -1 \quad \text{og} \quad C(\pi^0) = +1 \quad (\text{jfr } (4.11))$$

[2]se kap. 1

4.6.2 ω-henfald

Da $G(\omega) = -1$ forventer vi kun at finde $\omega \to 3\pi$ henfaldet, da faserummet for $\omega \to 5\pi$ er forsvindende. Eksperimentelt findes forgreningsforholdene:

$$\begin{array}{llcll}
\omega \to \pi^+\pi^-\pi^0 & : & 88.8 & \pm & 0.6\ \% \\
\omega \to \pi^+\pi^- & : & 2.2 & \pm & 0.3\ \% \\
\omega \to \pi^0\gamma & : & 8.5 & \pm & 0.5\ \% \\
\omega \to \pi^0 e^+ e^- & : & 0.059 & \pm & 0.019\ \%
\end{array}$$

De to sidste henfald er elektromagnetiske. Eksistensen af $\omega \to \pi^+\pi^-$ er et udtryk for isospinbrud. At dette henfald trods alt foregår så hyppigt, skyldes tilstedeværelsen af ρ^0-mesonen med omtrent samme masse som ω. Dette giver anledning til en vis mixing af ρ og ω. Hertil kommer, at ρ med en bredde på $\Gamma_\rho = 150$ MeV henfalder langt stærkere end ω med $\Gamma_\omega = 8.4$ MeV. Derfor er ω-henfaldet mere påvirket af ρ^0 end omvendt. Den forventede dominans af $\omega \to 3\pi$ er dog meget tydelig.

4.6.3 η-henfald

$m(\eta) = 548.8$ MeV, så fra energibevarelse er der i η-henfaldet højst plads til 3π-mesoner ($4 \times m_\pi \simeq 560$ MeV). Da $G(\eta) = +1$, er $\eta \to 3\pi$ forbudt. Imidlertid er $\eta \to 2\pi$ endnu mere forbudt, nemlig af paritetsbevarelse, som synes at gælde eksakt både for stærke vekselvirkninger og for elektromagnetiske vekselvirkninger! At paritetsbevarelse forbyder $\eta \to 2\pi$ ses således:

Da $P(\eta) = -1$ (jfr (4.7) og (4.8)), må sluttilstanden også have $P = -1$. For en 2π-tilstand i η's hvilesystem findes

$$\mathcal{P}(|\pi_1(\vec{p})\rangle \otimes |\pi_2(-\vec{p})\rangle) = (-|\pi_1(-\vec{p})\rangle) \otimes (-|\pi_2(+\vec{p})\rangle) = +|\pi_1(-\vec{p})\rangle|\pi_2(\vec{p})\rangle$$

Endvidere ved vi, at η har spin $= 0$, så hvis den henfalder til en 2π-tilstand, må denne også have totalt impulsmoment $= 0$ (i η's hvilesystem). Men heraf følger, at 2π-tilstanden må være på formen

$$|2\pi\rangle = \sum_{\hat{p}} |\pi_1(\vec{p})\rangle|\pi_2(-\vec{p})\rangle$$

altså *lige* under $\hat{p} \to -\hat{p}$. Det følger derfor af *rotationsinvarians*, at enhver 2π-tilstand med $J = 0$ har $P = +1$. Dermed er det bevist, at $\eta \to 2\pi$ er forbudt af paritetsinvarians *og* rotationsinvarians.

Konklusionen er, at η ikke har noget "normalt" stærkt henfald. Eksperimentelt henfalder η så godt som altid til 3π, men bredden $\Gamma = 1.2keV$ er en faktor $10^4 - 10^5$ gange mindre end "normale hadronbredder", svarende til at amplituden igen er kun ca 1% af det "normale".

4.7 Zweig's regel - eller OZI-reglen - og kvarkdiagrammer

I dette afsnit skal vi betragte et andet fænomenologisk træk ved de stærke vekselvirkninger. Ud fra erfaringerne om isospinsymmetriens succes kunne man få det indtryk, at tilstande med forskellig kvarkindhold er meget villige til at fluktuere mellem hinanden, sålænge fundamentale kvantetal er bevarede. Fx har vi set, at en ρ^0-meson er en superposition af $u\bar{u}$ og $d\bar{d}$-tilstande, dvs at disse villigt transformerer mellem hinanden som et resultat af de stærke vekselvirkninger.

Zweig's regel udsiger i en vis forstand, at dette er en meget speciel egenskab ved u- og d-kvarker. De stærke vekselvirkninger er således meget utilbøjelige til at udføre overgangene

$$s\bar{s} \rightarrow u\bar{u} \quad \text{eller} \quad c\bar{c} \rightarrow d\bar{d}$$

skønt ingen af disse bryder nogen kendte udvalgsregler.

Et berømt eksempel (som var næsten det eneste overbevisende, da Zweig – m. fl. – udformede sin regel) haves i φ-henfaldet. φ-mesonen har kvarksammensætningen $s\bar{s}$ og kvantetal som ω-mesonen: $J^{PC} = 1^{--}, I^G = 0^-$. Den adskiller sig fra ω ved sin højere masse: $m_\varphi = 1019$ MeV mod $m_\omega = 783$ MeV. Der er derfor også mulighed for henfaldet $\varphi \rightarrow K\bar{K}$ foruden det til ω svarende henfald $\varphi \rightarrow 3\pi$. Sidstnævnte henfald har væsentlig mere faserum end $\omega \rightarrow 3\pi$ og må derfor forventes at være stærkere. Imidlertid findes eksperimentelt

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega \rightarrow 3\pi) &= 7.9 \text{ MeV} \\ \Gamma(\varphi \rightarrow 3\pi) &= 0.65 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Der er altså tale om en yderst ejendommelig undertrykkelse af $\varphi \rightarrow 3\pi$-henfaldet. $\varphi \rightarrow K\bar{K}$-henfaldet har et meget lille faserum: $2m_{K^\pm} = 988$ MeV og $2m_{K^0} = 996$ MeV. Imidlertid findes eksperimentelt

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi \rightarrow K^+K^-) &= 2.2 \text{ MeV} \\ \Gamma(\varphi \rightarrow K^0\overline{K}^0) &= 1.5 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Disse henfald er altså stærkt favoriserede fremfor $\varphi \rightarrow 3\pi$.

Disse ejendommeligheder førte Zweig (og uafhængigt af ham Okubo og Iizuka, således at reglen ofte omtales som OZI-reglen) til at formulere et princip som lettest anskues vha *kvarkdiagrammer*. Disse er stærkt inspirerede af Feynman-diagrammer, som vi skal indføre i næste afsnit, men de har slet ikke Feynman-diagrammernes stringente matematiske mening. De repræsenterer blot et anskueligt billede af, hvorledes stærke processer i det væsentlige må tænkes at forløbe.

Lad os indføre kvarkdiagrammer gennem nogle eksempler, først for henfaldet $\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$, fig. (4.3).

Diagrammet angiver løseligt kvarkernes rumlige position (Y-aksen) som funktion af tiden (x-aksen) (undertiden drejer man billedet 90^0). Hver kvark beskrives så ved en kurve i diagrammet. Som i de rigtige Feynman-diagrammer sætter vi pile på kurverne, fordi kvarkerne er fermioner. Hvis pilen vender samme vej som tidsaksen, betyder linjen at en kvark har udviklet sig; vender pilen den modsatte vej, betyder det at en antikvark udvikler sig. I fig. (4.3) ser vi, at til tidlige tider har vi u og $\bar{d}$-kvarkerne tæt sammen i en ρ^+-meson. Til tiden t_0 har u og $\bar{d}$ via kvantefluktuationer adskilt sig noget fra hinanden, og i feltet mellem dem opstår et $d\bar{d}$-par. Herefter sker henfaldet ved, at den nyskabte $\bar{d}$ går sammen med den "gamle" u i en π^+, medens den nyskabte d går sammen med $\bar{d}$ i en π^0.

Vi kan tilsvarende se på et kvarkdiagram for ω-henfald, fig. (4.4). Her har vi yderligere antydet muligheden af, at henfaldet $\omega \rightarrow 3\pi$ er domineret af $\omega \rightarrow \rho\pi$ efterfulgt af $\rho \rightarrow 2\pi$.

Lad os nu betragte kvarkdiagrammerne svarende til $\varphi \rightarrow K\bar{K}$ og $\varphi \rightarrow 3\pi$ (fig. (4.5) og (4.6)).

Vi kan nu tydeligt aflæse af kvarkdiagrammerne, at der er noget sært ved henfaldet $\varphi \to 3\pi$. Det har den egenskab, at det kan opdeles i to halvdele ved et snit vinkelret på tidsaksen, uden at nogen kvarklinjer overskæres. OZI-reglen udsiger simpelthen, at processer, der er repræsenterede af kvarkdiagrammer, som i denne forstand *ikke* er sammenhængende, har væsentlig mindre sandsynligheder end processer svarende til sammenhængende diagrammer.

Vi må dog supplere denne oprindelige formulering med et udsagn om massen af de kvarker, der indgår i diagrammet. Betragt fx kvarkdiagrammet for en π^0-meson (som ikke henfalder stærkt). Der er lige stor sandsynlighed for at finde π^0'en sammensat af $u\overline{u}$ og af $d\overline{d}$. Vi kan derfor tegne diagrammet (fig. (4.7)) Skønt diagrammet svarer til adskilte dele i OZI's forstand, er udviklingen af en π^0-meson en ganske "normal" stærk proces. Som vi siden skal se, giver kvantechromodynamikken en begyndende forståelse af OZI-reglen. Ifølge denne er det forståeligt, at amplituden for et OZI-forbudt kvarkdiagram er undertrykt, men kun hvis der overføres et "stort" beløb invariant 4-impuls over "hullet" i diagrammet. Med "stor" menes her noget, som er stort i forhold til den karakteristiske skala for de stærke vekselvirkninger. I QCD kaldes denne Λ og har værdien ca. $0.1 - 0.2$ GeV. I fig. (4.6) overføres beløbet $m_\varphi^2 \simeq 1GeV^2$, en del større end Λ^2. OZI-reglen gælder derfor for fig. (4.6). I fig. (4.7) overføres kun beløbet $m_\pi^2 \sim \Lambda^2$, altså gælder OZI-reglen ikke for fig. (4.7).

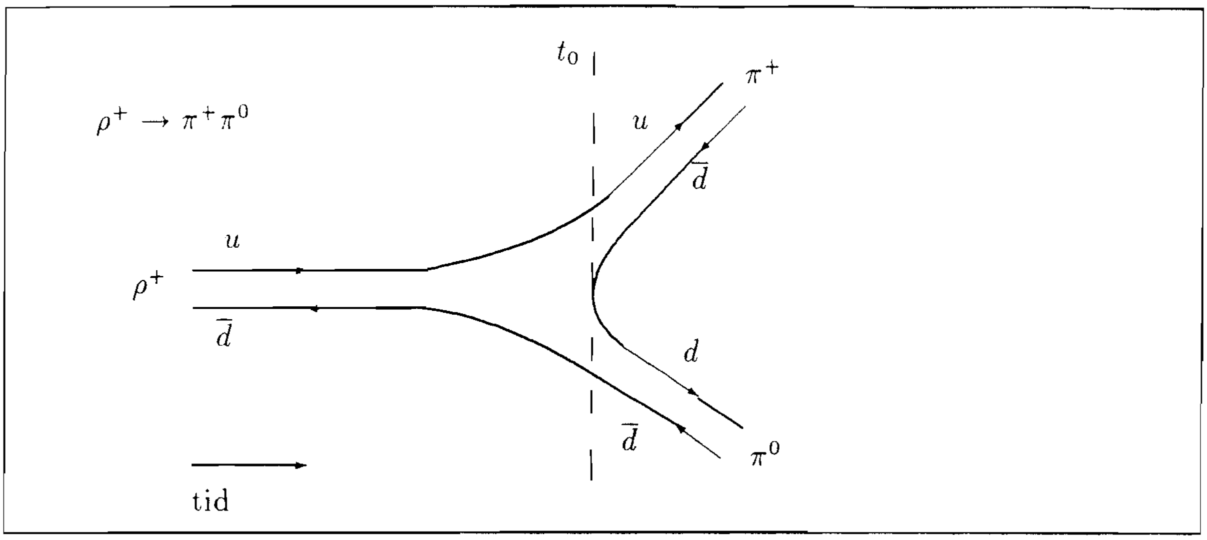
Skønt OZI-reglen blev fremsat allerede i første halvdel af 60'erne, fik den først sit egentlige gennembrud efter opdagelsen af J/ψ-partiklen og de andre tunge kvarkonium-tilstande i sidste halvdel af 70'erne.

Lad os kort betragte J/ψ-henfaldene og se dem som en utroligt slående bekræftelse på OZI-reglen. Med en masse på 3097 MeV har J/ψ-partiklen ingen mulighed for at henfalde til partikler, som indeholder en af de c-kvarker, som J/ψ er opbygget af. De letteste sådanne partikler er nemlig D-mesonerne med masser på 1869 MeV, altså mere end halvdelen af J/ψ-massen. Dens henfald er derfor OZI-forbudt, og det invariante massekvadrat af J/ψ er $9.6GeV^2$, således at OZI-reglen efter vores formulering skulle gælde væsentligt bedre end for φ-mesonen. fig. (4.8) viser et muligt kvarkdiagram for det hyppigste rene hadronhenfald for J/ψ (som foregår ca. 5% af gangene).

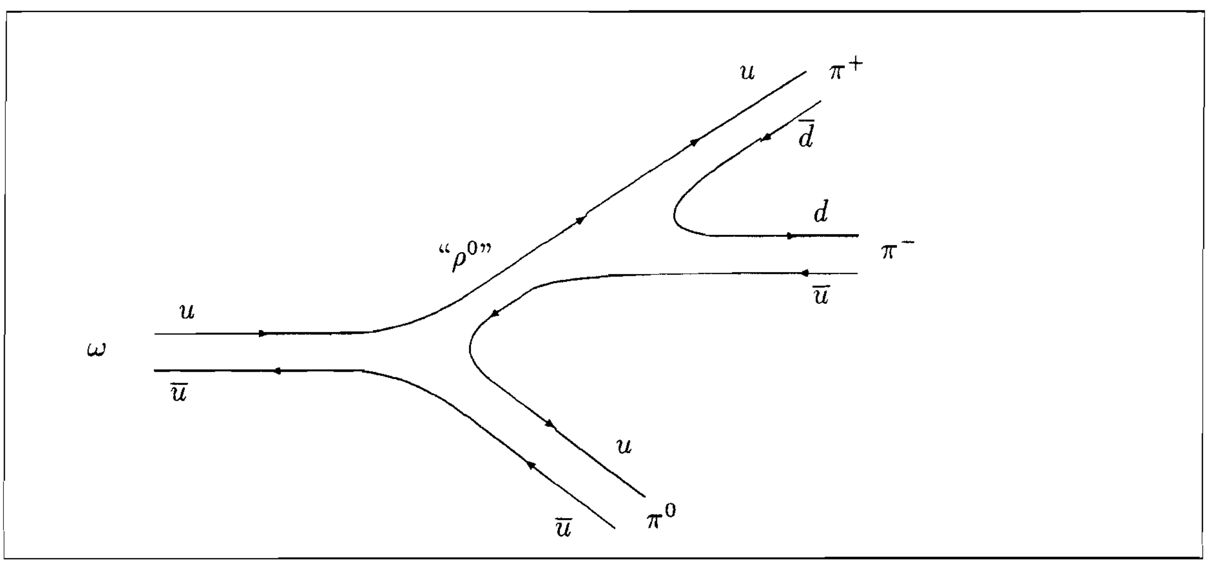
Det chokerende i efteråret 1974 var, at J/ψ-mesonens ***totale*** bredde inkluderet ***alle*** hadronhenfald var så utroligt lille som

$$\Gamma_{J/\psi} = 0.068 \pm 0.010 \text{ MeV}$$

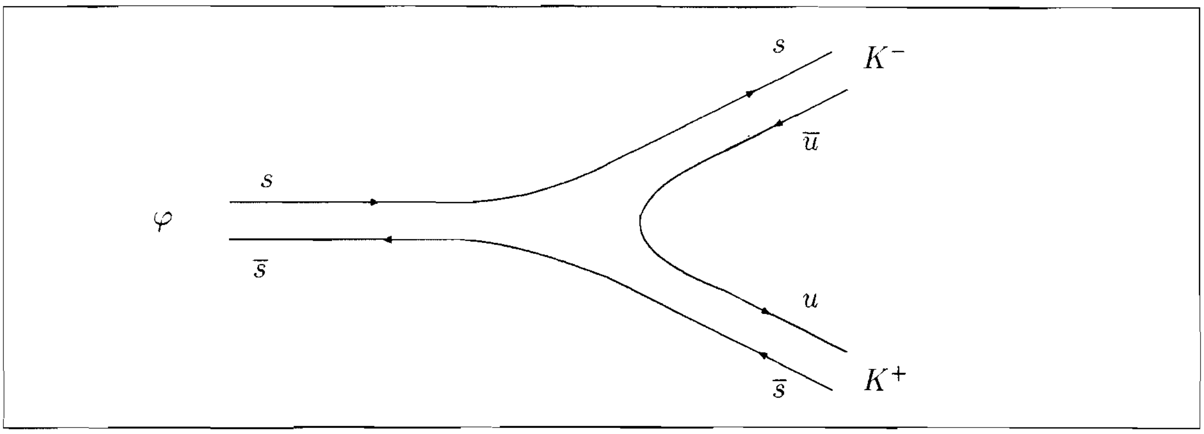
skønt der er enormt meget faserum til rådighed for et henfald til nogle få π-mesoner. Idag ser vi dette som et udtryk for, at OZI-reglen gælder meget effektivt for tunge partiklers henfald til lette partikler. I 1974 var der tvivl om, hvorvidt J/ψ overhovedet burde opfattes som en ægte hadron (D-partiklerne med åben charm var da endnu ikke fundet). Medvirkende til at akceptere J/ψ som en "god hadron" var det forhold, at henfaldene til π-mesoner stort set fulgte det mønster, man ville forvente, hvis G-paritet var bevaret. Ganske som φ har $G = -1$, må J/ψ have $G = -1$ ($I = 0$ da der hverken er u eller d-kvarker i J/ψ). G-bevarelse vil derfor forbyde henfald af J/ψ til et lige antal π-mesoner. Eksperimentelt findes da også, at henfald af formen $J/\psi \to (2n+1)\pi$ foregår ca 10 gange så hyppigt som henfald af formen $J/\psi \to (2n)\pi$. Eksistensen af de sidste G-brydende henfald kan desuden forstås i god detalje som en elektromagnetisk proces. Vi skal senere belyse dette nærmere.



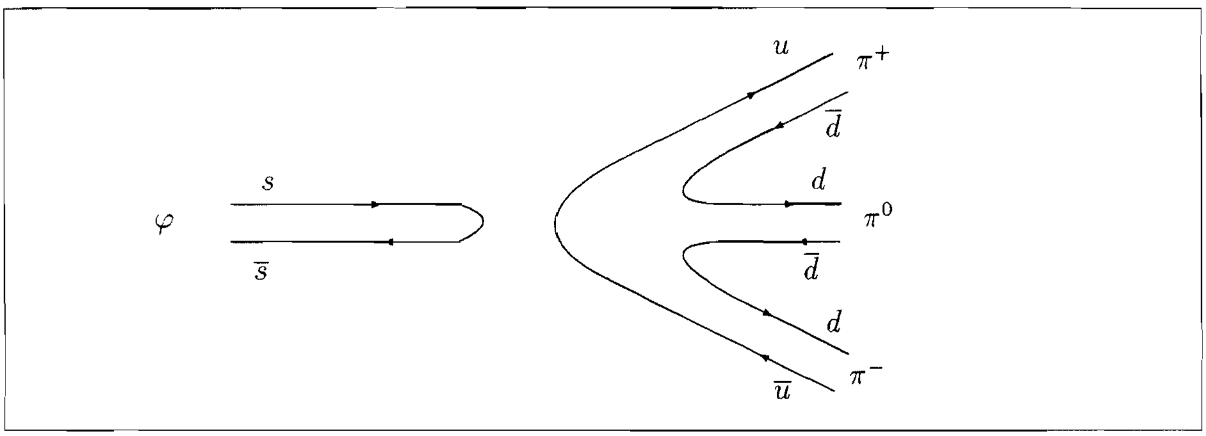
Figur 4.3: OZI-tilladt kvark-diagram for ρ-henfald.



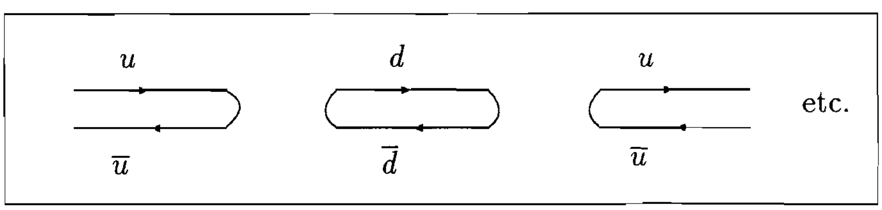
Figur 4.4: OZI-tilladt kvark-diagram for ω-henfald.



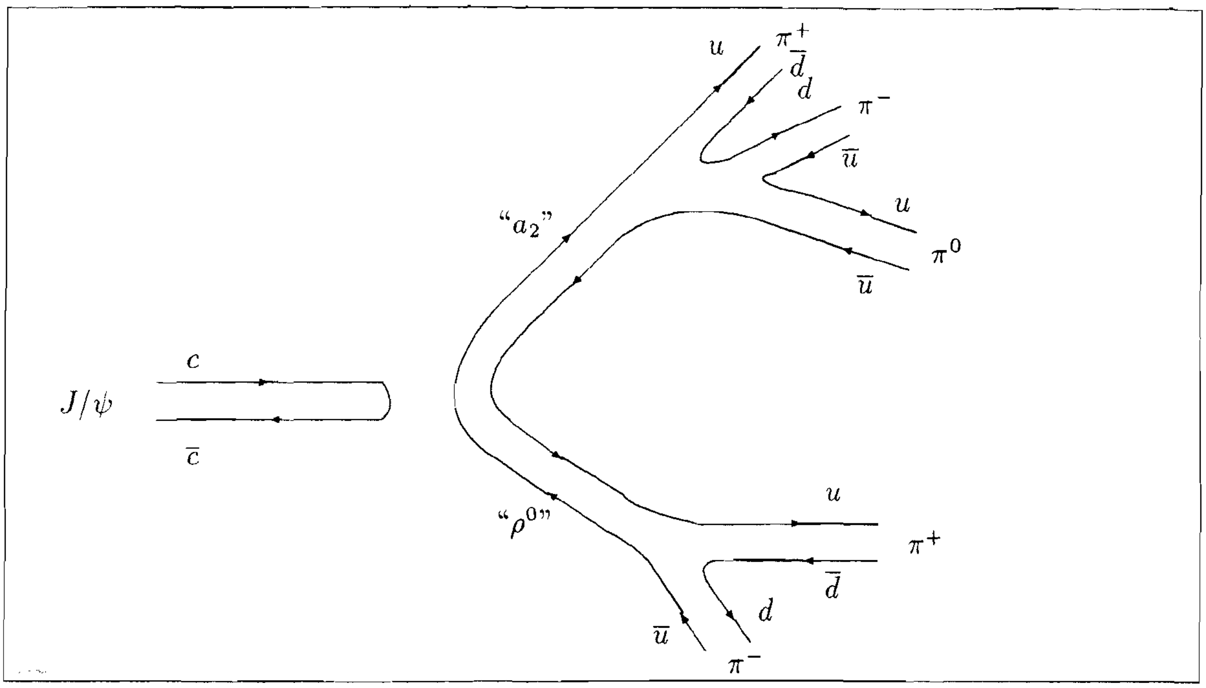
Figur 4.5: OZI-tilladt kvark-diagram for φ-henfald.



Figur 4.6: OZI-forbudt kvark-diagram for φ-henfald.



Figur 4.7: Kvark-diagram, der skal illustrere hvordan en π^0-meson kan fluktuere mellem en $u\overline{u}$ og en $d\overline{d}$ kvark sammensætning.



Figur 4.8: OZI-forbudt kvark-diagram for J/ψ-henfald til 5 pioner, via resonans-kanalen, $J/\psi \to a_2(1320) + \rho^0$.

4.8 Højere flavoursymmetrier

Gennem 60'erne og op til J/ψ-partiklens opdagelse i november 1974 var et af elementarpartikelfysikkens store spørgsmål: Hvilket begreb er fysisk set det vigtigste: idéen om approksimative indre symmetrier eller kvark-idéen?

Erfaringerne fra antagelsen om isospininvarians syntes at tyde på, at indre symmetrier spillede en fundamental rolle. Idéen bag OZI-reglen er den stik modsatte; kvarkernes identitet er her det fremherskende. Lad os i dette afsnit omtale de idéer, som lagde hovedvægten på begrebet, "indre symmetrier".

Antagelsen om isospininvarians siger, at de stærke vekselvirkninger ikke kan se forskel på u- og d-kvarker. Lad os generalisere antagelsen derhen, at de stærke vekselvirkninger (næsten) ikke kan se forskel på u, d og s-kvarker. I stedet for en $SU(2)$-symmetri for de stærke vekselvirkninger vil vi så forsøge at arbejde med en $SU(3)$-symmetri, hvor $SU(3)$ er gruppen af unitære 3×3 matricer med determinant $= 1$. Den fundamentale *repræsentation* er selvfølgelig netop disse matricer selv: Den er 3-dimensional og bæres af kvarkerne (u, d, s). Antikvarkerne danner en antitriplet $(\overline{u}, \overline{d}, \overline{s})$, som i modsætning til hvad tilfældet er i $SU(2)$ *ikke* er ækvivalent med tripletrepræsentationen (u, d, s).

Mesontilstande opbygges af én kvark og én antikvark. Hvis $SU(3)$ er en god symmetri, vil vi så forvente at finde partikler, som falder i naturlige multipletter svarende til irreducible repræsentationer af $SU(3)$.

Ved at sammensætte de tre kvarktilstande $|u\rangle, |d\rangle, |s\rangle$ på alle mulige måder med de tre antikvarktilstande $|\overline{u}\rangle, |\overline{d}\rangle, |\overline{s}\rangle$ fås klart ni forskellige tilstande. Disse kan vises at falde i to irreducible repræsentationer af $SU(3)$: En 8-dimensional oktetrepræsentation og en 1-dimensional singletrepræsentation. At der findes en linearkombination, som er invariant under alle $SU(3)$-transformationer (dvs er en singlet), er i virkeligheden indlysende. Lad os indføre betegnelsen

$$|q\rangle = q_1|u\rangle + q_2|d\rangle + q_3|s\rangle$$

med

$$|q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 = 1$$

og lad denne tilstand, repræsenteret af søjlen,

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

transformere under $SU(3)$-transformationen U_{ij} $\quad (i, j = 1, 2, 3 \;\; , \; \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = 1 \;\; , \; \det(\mathbf{U}) = 1)$ ved

$$q_i \to q_i' = U_{ij} q_j \qquad \text{eller} \qquad \mathbf{q} \to \mathbf{q}' = \mathbf{U}\mathbf{q}$$

Tilsvarende lader vi

$$|\overline{q}\rangle = \overline{q}_1|\overline{u}\rangle + \overline{q}_2|\overline{d}\rangle + \overline{q}_3|\overline{s}\rangle$$

betegne en vilkårlig antikvarktilstand. Ganske som for $SU(2)$ fører kravet om en konsistent transformationslov for *felterne* så til, at *rækken* $\overline{\mathbf{q}}^\top \equiv (\overline{q}_1, \overline{q}_2, \overline{q}_3)$ transformerer efter

$$\overline{\mathbf{q}}'^\top = \overline{\mathbf{q}}^\top \mathbf{U}^\dagger$$

En helt vilkårlig mesontilstand bestående af u, d, s kvarker og antikvarker, er på formen

$$|\text{meson}\rangle = M_{11}|u\rangle \otimes |\overline{u}\rangle + M_{12}|u\rangle \otimes |\overline{d}\rangle + M_{13}|u\rangle \otimes |\overline{s}\rangle + \cdots$$

altså karakteriseret ved en koefficient-matrix

$$M_{ij}$$

som transformerer som

$$M_{ij} \rightarrow M'_{ij} = U_{ii'} M_{i'j'} U^{\dagger}_{j'j}$$

(summation over i' og j' er underforstået). Lad os nu se på den specielle mesontilstand, for hvilken $M_{ij} \propto \delta_{ij}$. Det svarer til tilstanden

$$|\{1\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|u\rangle \otimes |\overline{u}\rangle + |d\rangle \otimes |\overline{d}\rangle + |s\rangle \otimes |\overline{s}\rangle\Big) \tag{4.43}$$

Under en vilkårlig $SU(3)$-transformation opfører den sig således:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &\rightarrow U_{ii'}\delta_{i'j'}U^{\dagger}_{j'j} \\ &= U_{ii'}U^{\dagger}_{i'j} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

da $\mathbf{U}$ er unitær. Med andre ord: tilstanden (4.43) er *invariant* under alle $SU(3)$-transformationer: Den bærer den 1-dimensionale trivielle repræsentation

$$\mathbf{U} \rightarrow \{1\}$$

og transformerer som den irreducible singlet-repræsentation.

Vi er nu (næsten) klar til at nedskrive den færdige oktet og singlet for mesoner. Først opskrives de ni direkte produkter i et diagram, hvor ordinaten måler antallet af $\overline{s}$-kvarker og abcissen måler I_3 . Antallet af $\overline{s}$-kvarker er det samme som det historiske kvantetal, strangeness, der her igen er det samme som generaliseringen, "hyperladning", Y, se herom lgn.(4.47).

I midten af diagrammet, (4.9), sidder de tre lineært uafhængige tilstande $u\overline{u}, d\overline{d}$ og $s\overline{s}$. Når vi skal udføre reduktionen til irreducible repræsentationer af $SU(3)$, er problemet blot, at vælge de rette linearkombinationer af disse. Men her kender vi allerede svaret: Singlet-repræsentationen er (4.43)

$$|\{1\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|u\overline{u}\rangle + |d\overline{d}\rangle + |s\overline{s}\rangle) \tag{4.44}$$

Oktetrepræsentationerne er da blot to lineært uafhængige tilstande, som er orthogonale på denne. Som den ene af disse er det naturligt at vælge den neutrale mesontilstand, som har $I = 1$ og som er i samme *isospinmultiplet* som $u\overline{d}$ og $d\overline{u}$:

$$|\{8\}, Y = 0, I = 1, I_3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|d\overline{d}\rangle - |u\overline{u}\rangle)$$

som vi allerede har mødt. Som den anden tilstand kan vi *ikke* bruge den linearkombination, som vi brugte til at beskrive ω-mesonen med:

$$|\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|d\overline{d}\rangle + |u\overline{u}\rangle)$$

Denne tilstand er nemlig *ikke* orthogonal på $|\{1\}\rangle$. Den korrekte, manglende oktettilstand er tydeligvis

$$|\{8\}, Y = 0, I = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|u\overline{u}\rangle + |d\overline{d}\rangle - 2|s\overline{s}\rangle)$$

Da

$$\begin{aligned}\langle u\bar{u}|u\bar{u}\rangle &= \langle d\bar{d}|d\bar{d}\rangle = \langle s\bar{s}|s\bar{s}\rangle = 1\\ \langle u\bar{u}|d\bar{d}\rangle &= \langle u\bar{u}|s\bar{s}\rangle = \text{etc.} = 0\end{aligned}$$

har vi nemlig

$$\langle\{1\}|\{8\}, Y=0, I=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{3}}[1+1-2] = 0$$

og tilsvarende $\langle\{8\}, Y=0, I=1|\{8\}, Y=0, I=0\rangle = 0$.

Som vi tidligere har set, svarer de neutrale fysiske mesoner $|\omega\rangle$ og $|\varphi\rangle$ *ikke* til tilstandene $|\{1\}\rangle$ og $|\{8\}\rangle$.

Dette må vi tage som udtryk for, at $SU(3)$-symmetribegrebet er mindre fundamentalt end kvarkbegrebet: Det er den "naturlige" kvarktilstand $|s\bar{s}\rangle$, som modsvares af den fysiske meson $|\varphi\rangle$. På isospinniveauet er det derimod *ikke* de naturlige kvarktilstande $|u\bar{u}\rangle$ og $|d\bar{d}\rangle$, der svarer til de fysiske mesoner ρ^0 og ω.[3]

Vi kan konkludere, at isospininvariansbegrebet synes lige så fundamentalt som kvarkbegrebet, medens kvarkbegrebet synes mere fundamentalt end generalisationen af isospinsymmetri til $SU(3)$-invarians. Vi nævner pány, at iflg QCD synes isospinsymmetriens succes at bero på den omstændighed, at både u- og d-kvarkerne mest naturligt tillægges masser, som er betydeligt mindre end hadronskalaen $\Lambda \sim 0.2$ GeV.

Tanken om en approksimativ $SU(3)$-invarians er på ingen måde død, men man får alle resultaterne simplest direkte fra kvarkmodellen.

Efter at charmkvarken var foreslået teoretisk, blev der naturligvis hurtigt udarbejdet forudsigelser baseret på en formodning om, at de stærke vekselvirkninger måske besad en $SU(4)$-invarians svarende til, at de ikke skulle kunne skelne mellem u, d, s og c-kvarker. Det er imidlertid helt oplagt, at kvarkbegrebet her er langt mere fundamentalt end symmetribegrebet. Som vi har set må J/ψ-mesonen forstås som en meget ren $c\bar{c}$-meson hvis henfald er særdeles stærkt OZI-forbudt svarende til, at de stærke vekselvirkninger forholder sig helt anderledes over for c-kvarker end de gør over for de andre. Iflg. kvantechromodynamikken er forskellen udelukkende et resultat af den langt større værdi for c-kvarkens masse. Tilbage bliver, at QCD overhovedet intet lys kaster over spørgsmålet om, hvorfor kvarkernes masser har de værdier, som de har.

Med opdagelsen i 1977 af Υ-mesoner, hvis familiemedlemmer er blevet stærkt undersøgt, har vi fået kendskab til en femte kvark: b-kvarken eller bottom-kvarken. Mig bekendt er der ikke gjort nævneværdige anstrengelser for at udarbejde konsekvenserne af en hertil hørende approksimativ $SU(5)$-flavoursymmetri.

4.9 Baryontilstande

Vi skal nu kort studere baryonernes eller 3-kvarktilstandenes kvantetal.

Som for mesonerne formoder vi, at de laveste bundne tilstande har symmetriske bølgefunktioner i impulsrummet: S-tilstande.

Lad os først se på flavourindholdet. Idet vi igen repræsenterer en helt generel kvarktilstand

$$|q\rangle = q_1|u\rangle + q_2|d\rangle + q_3|s\rangle + q_4|c\rangle + \cdots \tag{4.45}$$

[3]Det bør her bemærkes, at forholdene for de pseudoskalære mesoners vedkommende er anderledes. Her synes virkelig η og η' at være næsten rene oktet- og singlettilstande, hhv.

ved søjlen eller flavourvektoren (q_i), kan vi repræsentere en 3-kvarktilstand ved flavourtensoren

$$B_{ijk} \tag{4.46}$$

svarende til tre-kvark-tilstanden

$$B_{111}|uuu\rangle + \cdots$$

Lad os foreløbigt se bort fra c- og b-kvarker. Vi kan så opstille en basis for disse tensorer i et skema, hvor abscissen er I_3 og ordinaten er

$$Y = B + S \tag{4.47}$$

$B = 1$ er baryontallet, og S - strangeness = minus antallet af s-kvarker (se fig. (4.10)).

Lad os derefter se på, hvor mange uafhængige spintilstande, hvert punkt i skemaet indeholder.

For uuu-baryonen har vi de fire spintilstande

$$u(\uparrow)u(\uparrow)u(\uparrow) \quad , \quad u(\uparrow)u(\uparrow)u(\downarrow) \quad , \quad u(\uparrow)u(\downarrow)u(\downarrow) \quad , \quad u(\downarrow)u(\downarrow)u(\downarrow).$$

Vi benytter her en notation, hvor der ingen forskel er på at skrive $u(\uparrow)u(\downarrow)u(\uparrow)$ og $u(\uparrow)u(\uparrow)u(\downarrow)$, da de tre kvarker alle er u-kvarker. For tilstanden uds bestående af tre forskellige kvarker er der indlysende $2^3 = 8$ tilstande, da alle tre kvarker er forskellige og hver har to spintilstande. Tallene i parentes i fig. (4.10) angiver antallet af spintilstande.

Det er nu meget nærliggende at identificere disse kvarktilstande med de laveste baryonfamilier med J^P hhv $\frac{1}{2}^+$ og $\frac{3}{2}^+$ (P er klart $= +1$, da alle kvarker har indre paritet $= +1$, og vi betragter tilstande, som er symmetriske i impulsrummet). Disse baryonfamilier kan vi indtegne i (I_3, Y)-diagrammer (se fig. (4.11) og (4.12)).

Det er klart, at denne identificering giver de rigtige kvantetal og det korrekte antal spintilstande.

Lad os nu se lidt mere i detalje på symmetriegenskaberne af disse baryontilstande.

Det simpleste tilfælde fremkommer ved at studere baryondekupletten med spin $\frac{3}{2}$.

Lad os først se på spinindholdet. Tre spin-$\frac{1}{2}$ partikler kan sammensættes til et totalt spin på $\frac{3}{2}$ på følgende måde (notation, $|S, S_z\rangle$):

$$\begin{aligned}
|3/2, +3/2\rangle &= |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \\
|3/2, +1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}[|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle] \\
|3/2, -1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}[|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle] \\
|3/2, -3/2\rangle &= |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Vi benytter her en indlysende notation, hvor $\uparrow, \downarrow$ betyder $S_z = \pm\frac{1}{2}$, og hvor 1., 2. og 3. pil svarer til 1., 2. og 3. kvark. Udtrykkene (4.48) kan fås af tabellen over Clebsch-Gordan koefficienter. Bemærk, at tilstandene er fuldstændig symmetriske under ombytning af to kvarker.

Lad os dernæst se på det fuldstændige udtryk for Δ-resonansernes kvark- og spinsammensætning. Δ-partiklerne er opbygget udelukkende af u- og d-kvarker. Vi kan derfor konstruere tilstande med veldefineret isospin i fuldstændig analogi til (4.48):

$$\begin{aligned} |\Delta^{++}\rangle &= |uuu\rangle \\ |\Delta^{+}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}[|uud\rangle + |udu\rangle + |duu\rangle] \\ |\Delta^{0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}[|udd\rangle + |dud\rangle + |ddu\rangle] \\ |\Delta^{-}\rangle &= |ddd\rangle \end{aligned} \tag{4.49}$$

For spintilstandene af $|\Delta^{++}\rangle$ findes så ved at kombinere (4.49) og (4.48)

$$\begin{aligned} |\Delta^{++},3/2\rangle &= |u\uparrow u\uparrow u\uparrow\rangle \\ |\Delta^{++},1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}[|u\uparrow u\uparrow u\downarrow\rangle + |u\uparrow u\downarrow u\uparrow\rangle + |u\downarrow u\uparrow u\uparrow\rangle] \\ |\Delta^{++},-1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}[|u\uparrow u\downarrow u\downarrow\rangle + |u\downarrow u\uparrow u\downarrow\rangle + |u\downarrow u\downarrow u\uparrow\rangle] \\ |\Delta^{++},-3/2\rangle &= |u\downarrow u\downarrow u\downarrow\rangle \end{aligned} \tag{4.50}$$

For de andre Δ-tilstande fås temmelig komplicerede udtryk, men konstruktionen af dem er lige ud ad landevejen. For $|\Delta^0,+1/2\rangle$ fås således

$$\begin{aligned} |\Delta^0,1/2\rangle = \frac{1}{3}\{&|u\uparrow d\uparrow d\downarrow\rangle + |d\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle + |d\uparrow d\uparrow u\downarrow\rangle \\ &+|u\uparrow d\downarrow d\uparrow\rangle + |d\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle + |d\uparrow d\downarrow u\uparrow\rangle \\ &+|u\downarrow d\uparrow d\uparrow\rangle + |d\downarrow u\uparrow d\uparrow\rangle + |d\downarrow d\uparrow u\uparrow\rangle\} \end{aligned} \tag{4.51}$$

Inden vi går videre med de øvrige partikler, bemærker vi et fundamentalt problem med disse tilstande. De er fuldstændig symmetriske i alle variable; de er nemlig fuldstændig symmetriske både i flavourvariable, spinvariable og impulsvariable. For Δ^+ og Δ^0 er dette delvist et valg, men for Δ^{++}, Ω^- (og Δ^-) er det en triviel nødvendighed. Ser vi specielt på $|\Delta^{++},3/2\rangle$ er der kun mulighed for kvark- og spinindholdet $|u\uparrow u\uparrow u\uparrow\rangle$.

Vi har hermed tilsyneladende brudt et af de mest fundamentale principper i relativistisk kvantefysik: Spin-statistik teoremet, som siger, at partikler med halvtalligt spin kun kan forekomme i *anti*-symmetriske tilstande.

Den i dag accepterede løsning på problemet er colourhypotesen der, som vi senere skal se, fører direkte til kvantechromodynamikken.

Ifølge denne hypotese indeholder alle kvarker foruden spin og flavour et nyt kvantetal kaldet colour. Kvarkerne antages at kunne forekomme i enhver superposition af tre lineært uafhængige tilstande kaldet “rød”, “grøn” og “blå” (eller $1, 2, 3$). Det antages videre, at de stærke vekselvirkninger besidder en virkelig dyb, fundamental invarians under lineære transformationer mellem sådanne superpositioner, altså at de stærke vekselvirkninger er helt eksakt invariante under gruppen af $SU(3)$-transformationer mellem *kvarkfarver*. Denne antagelse må under ingen omstændigheder forveksles med den tidligere nævnte antagelse om en approksimativ $SU(3)$ invarians mellem *flavour*-værdierne u, d, s. Den nye invarians berører *ikke* flavourværdierne. For en u-kvark sker transformationerne mellem tilstandene u_R, u_B, u_G: den røde, blå og grønne *u-kvark*.

Da vi nu har tildelt kvarkerne farve (pr. hypotese), er de selvfølgelig ikke længere nødvendigvis helt ens i $|\Delta^{++},3/2\rangle$: den ene kan være rød, den anden grøn og den tredje blå.

Vi supplerer nu colourhypotesen med flg. krav:

De fysiske hadroner er alle colour-$SU(3)$-singletter.

Det er håbet i dag, at dette krav i en eller anden form engang vil kunne udledes som en *dynamisk* konsekvens af kvantechromodynamikken. Men foreløbigt opstiller vi det som en uafhængig hypotese.

I denne formulering har colourhypotesen en række behagelige konsekvenser:

1. Frie kvarker kan ikke forekomme isoleret, da de er colour-$SU(3)$-tripletter og ikke singletter.

2. Mange ikke-observerede kvarkkonfigurationer såsom 2-kvark eller 4-kvarktilstande kan vises at være umulige: Der findes ingen singletkombinationer af dem. De simpleste coloursingletter er $q\bar{q}$ og qqq-tilstande, som vi straks skal se.

3. Colourhypotesen løser vores problem om Fermi-statistik (se nedenfor).

4. Colourhypotesen har eksperimentelle konsekvenser, som synes eftervist (se senere afsnit).

5. Colourhypotesen fører direkte til den særdeles smukke teori, kvantechromodynamikken (QCD), for stærke vekselvirkninger (se kap. 6).

Lad os nu studere coloursingletter af baryoner og mesoner og se, at de giver anledning til antisymmetriske baryontilstande som ønsket.

For en kvark med flavour q betegner vi basistilstandene med $|q_R\rangle, |q_B\rangle, |q_G\rangle$ og en vilkårlig superposition med

$$|q\rangle = q_1|q_R\rangle + q_2|q_B\rangle + q_3|q_G\rangle$$

hvor q_i er komplekse tal, så

$$|q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 = 1$$

Colourtilstanden er så beskrevet ved $SU(3)$-triplet vektoren q_i, der transformerer under en $SU(3)$ transformation $\mathbf{U}$ som

$$q_i \to q_i' = U_{ij}q_j$$

Coloursinglet mesontilstande dannes ganske som i (4.43) med flavour erstattet af colour.

Lad os nu se på en baryon bestående af tre kvarkflavours $q^{(1)}, q^{(2)}$ og $q^{(3)}$. I colourrummet har vi en fuldstændig basis for disse 3-kvarktilstande beskrevet ved colourtensoren

$$B_{ijk}$$

der er koefficient til tilstanden

$$|q_i^{(1)}\rangle \otimes |q_j^{(2)}\rangle \otimes |q_k^{(3)}\rangle$$

og som under $SU(3)$-colourtransformationer (som vi ofte vil forkorte til $SU(3)_C$) transformerer til

$$B_{ijk} \to B'_{ijk} = U_{ii'}U_{jj'}U_{kk'}B_{i'j'k'} \tag{4.52}$$

Vi vil nu vise, at hvis vi tager en linearkombination af colourkvarktilstande, som er fuldstændig antisymmetrisk, så transformerer denne som en singlet.

Altså tager vi

$$B_{ijk} = \epsilon_{ijk}$$

som transformerer til

$$B'_{ijk} = U_{ii'}U_{jj'}U_{kk'}\epsilon_{i'j'k'}$$

Nu er det for det første klart, at dette sæt af tal er fuldstændig antisymmetrisk i i, j, k. Ombyttes fx i og j, fås

$$\begin{aligned} B'_{jik} &= U_{ji'}U_{ij'}U_{kk'}\epsilon_{i'j'k'} \\ &= U_{jj'}U_{ii'}U_{kk'}\epsilon_{j'i'k'} \qquad (i' \text{ og } j' \text{ er summationsvariable}) \\ &= -U_{jj'}U_{ii'}U_{kk'}\epsilon_{i'j'k'} \\ &= -U_{ii'}U_{jj'}U_{kk'}\epsilon_{i'j'k'} = -B'_{ijk} \end{aligned}$$

Altså har vi $B'_{ijk} = \epsilon_{ijk} \cdot C$, hvor C er uafhængig af i, j, k. Vi kan finde C ved at sætte $(i, j, k) = (1, 2, 3)$:

$$B'_{123} = C = U_{1i'}U_{2j'}U_{3k'}\epsilon_{i'j'k'} = \det(\mathbf{U}) = 1$$

der viser, at $B'_{ijk} = B_{ijk} = \epsilon_{ijk}$, altså at denne antisymmetriske tensor er $SU(3)_C$-invariant som påstået.

Vi får herefter for den fulde $|\Delta^{++}, 3/2\rangle$ tilstand

$$\begin{aligned} |\Delta^{++}3/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} & [|u_R \uparrow u_B \uparrow u_G \uparrow\rangle - |u_R \uparrow u_G \uparrow u_B \uparrow\rangle \\ & -|u_B \uparrow u_R \uparrow u_G \uparrow\rangle + |u_B \uparrow u_G \uparrow u_R \uparrow\rangle \\ & +|u_G \uparrow u_R \uparrow u_B \uparrow\rangle - |u_G \uparrow u_B \uparrow u_R \uparrow\rangle] \end{aligned} \tag{4.53}$$

og tilsvarende for de andre baryontilstande.

Vi står nu i den situation, at pga kravet om colourinvarians må baryontilstandene netop være *symmetriske* i impuls, flavour og spinvariable, da de allerede er antisymmetriske i colourvariable. Vi kan derfor fortsætte med at udelade alle colourkomplikationer og være forvisset om, at vi overholder kravene om Fermi-statistik, blot vi holder vores baryontilstande *symmetriske* i flavours og spin!

Vi vil overlade til læseren at udarbejde flavour- og spinindholdet for alle medlemmer af dekupletten og oktetten. Vi nævner blot, at da spinindholdet i dekupletten er symmetrisk, må flavourindholdet for sig også være det.

Situationen for $\frac{1}{2}^+$-oktetten er mere kompliceret. Her har såvel spindel som flavourdel en blandet symmetri. Den totale tilstand bliver symmetrisk, såfremt vi anvender samme blandede symmetri for spin og flavour.

For spindelens vedkommende kan vi tænke på sammensætningen af de tre spin-$\frac{1}{2}$ kvarker til en total spin-$\frac{1}{2}$ tilstand som fremkommet ved først at sammensætte to kvarker til en spin-0-tilstand:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle]$$

og derpå tilføje den 3. kvark.

Lad os gennemføre konstruktionen for protontilstanden $|p \uparrow\rangle$. Vi starter med at tilføje en spin-$\uparrow$-kvark til en to-kvark spin-0, samt at tilføje en u-kvark til en to-kvark isospin-0 tilstand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[|ud\rangle - |du\rangle]$$

Dette giver os umiddelbart

$$\frac{1}{2}[u\uparrow d\downarrow -u\downarrow d\uparrow -d\uparrow u\downarrow +d\downarrow u\uparrow]u\uparrow$$

som har det ønskede spin og isospin, men som endnu ikke er fuldstændig symmetrisk. Adderes imidlertid alle permutationer og omnormeres, fås det ønskede resultat

$$\begin{aligned}|p\uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}}\{2|u\uparrow d\downarrow u\uparrow\rangle + 2|u\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle + 2|d\downarrow u\uparrow u\uparrow\rangle \\ &-|u\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle - |u\uparrow d\uparrow u\downarrow\rangle - |u\downarrow d\uparrow u\uparrow\rangle \\ &-|d\uparrow u\downarrow u\uparrow\rangle - |d\uparrow u\uparrow u\downarrow\rangle - |u\downarrow u\uparrow d\uparrow\rangle\}\end{aligned} \quad (4.54)$$

4.9.1 Flavour-$SU(3)$-symmetri for baryoner

Da $SU(3)$-kvarkhypotesen først blev fremsat i begyndelsen af 60'erne, kendtes Ω^- partiklen ikke. Det blev $SU(3)$-teoriens første og største triumf at kunne forudsige denne partikel, som blev fundet i 1963 i processen

$$K^-p \to \Omega^- + K^0 + K^+$$

Successen blev forøget ved den omstændighed, at man ad gruppeteoretisk vej var nået til at opstille den sk Gell-Mann–Okubo masseformel. Vha denne var det muligt med forbløfende nøjagtighed at forudsige massen af Ω^-. Efter denne forudsigelse kunne Ω^- ikke henfalde stærkt, idet den laveste tilstand med $S = -3$ er $\Xi\overline{K}$, som har en højere samlet masse end Ω^-. Henfaldet måtte følgelig være svagt, og Ω^- kunne da også iagttages som et ca. 1 cm langt spor i boblekammerbilleder.

Vi skal ikke her udlede Gell-Mann–Okubo masseformlen på gruppeteoretisk basis, men nøjes med en stærkt forenklet udledelse baseret på kvarkmodellen.

Idet vi antager, at u- og d-kvarker bidrager med samme energibeløb til alle baryonmasser inden for en bestemt multiplet, samt at også s-kvarken bidrager med et karakteristisk beløb, får vi for dekupletten, idet m betegner u- og d-kvarkers bidrag og μ betegner s-kvarkens bidrag:

$$m_\Delta = 3m \quad , \quad m_{\Sigma(1385)} = 2m + \mu \quad , \quad m_{\Xi(1530)} = m + 2\mu \quad , \quad m_\Omega = 3\mu$$

eller

$$m_{\Omega^-} - m_{\Xi(1530)} = m_{\Xi(1530)} - m_{\Sigma(1385)} = m_{\Sigma(1385)} - m_\Delta$$

Af

$$m_\Delta = 1232 \text{ MeV} \quad , \quad m_{\Sigma(1385)} = 1385 \text{ MeV} \quad , \quad m_{\Xi(1530)} = 1533 \text{ MeV}$$

får vi

$$m_{\Sigma(1385)} - m_\Delta = 153 \text{ MeV} \quad , \quad m_{\Xi(1530)} - m_{\Sigma(1385)} = 148 \text{ MeV}$$

der viser, at masseformlen synes at gælde med få MeV's nøjagtighed. Vi kan så forudsige Ω^--massen

$$m_{\Omega^-} = m_{\Xi(1530)} + 150 \text{ MeV} = 1683 \text{ MeV}$$

som er mindre end $m_\Xi + m_K = 1809$ MeV, således at Ω^- må henfalde svagt til $\Xi\pi$ eller $\Lambda\overline{K}$.

Den eksperimentelle værdi for m_{Ω^-} blev fundet som (moderne værdi)

$$m_\Omega = 1672 \text{ MeV}$$

i imponerende overensstemmelse med ovenstående forudsigelse.

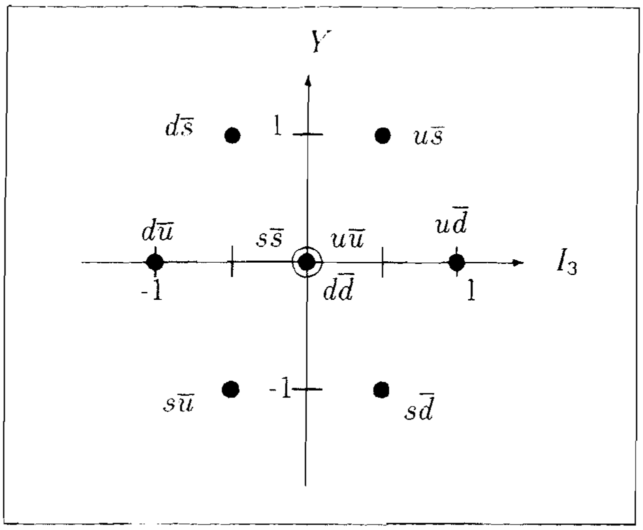
Benytter vi samme behandling af oktettens baryonmasser får vi

$$\frac{1}{2}(m_N + m_\Xi) = m_\Sigma = m_\Lambda$$

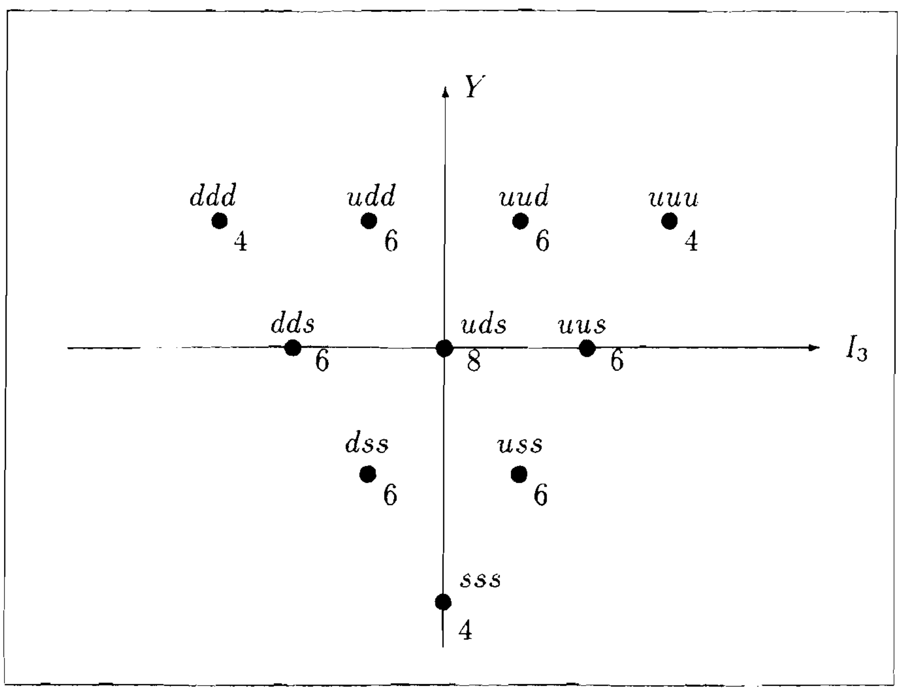
Med $m_N = 939$ MeV, $m_\Lambda = 1116$ MeV, $m_\Sigma = 1192$ MeV og $m_\Xi = 1317$ MeV ser vi, at fejlen her er betydeligt større end for dekupletten. Gell-Mann-Okubo-masseformlen er identisk med vores simple udgave for dekupletten. For oktetten har den kun én forudsigelse:

$$\frac{1}{2}(m_N + m_\Xi) = \frac{1}{4}(m_\Sigma + 3m_\Lambda)$$

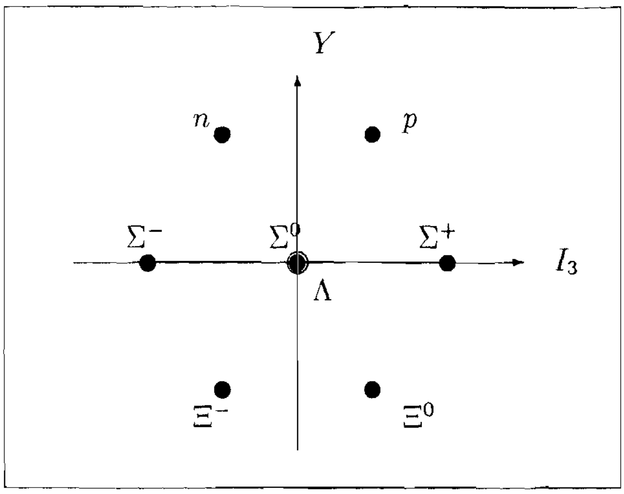
som er opfyldt med stor nøjagtighed.



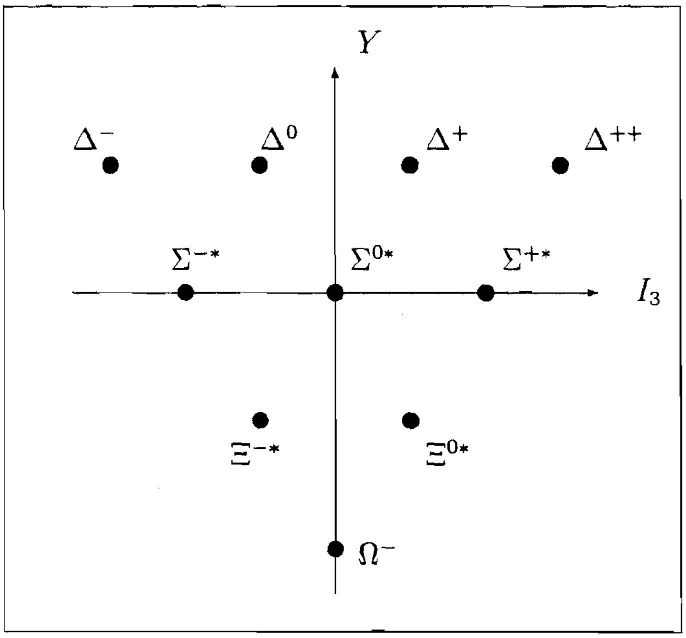
Figur 4.9: Diagram over kvarksammensætningen af mesoner bestående af u, d, s-kvarker (samt disses anti-kvarker). x-aksen er 3. komponenten af isospin, og y-aksen, Y, er hyperladning (her = strangeness = antallet af $\bar{s}$-kvarker).



Figur 4.10: Kvark-indhold og kvantetal for baryoner sammensat af u, d, s kvarker.



Figur 4.11: $J^P = \frac{1}{2}^+$ baryon-oktetten



Figur 4.12: $J^P = \frac{3}{2}^+$ baryon-dekupletten

4.10 Exciterede tilstande; Regge-trajektorier

Hidtil har vi næsten udelukkende beskæftiget os med mesoner og baryoner i grundtilstanden, hvad impulsdelen af bølgefunktionen angår. Men naturligvis er det en helt karakteristisk egenskab ved kvarkmodellens opfattelse af hadronerne som bundne tilstande af bestanddele, at også rotations- og vibrationstilstande (såvel som kombinationer heraf) skal kunne forekomme.

Det må derfor betragtes som en betydelig kvalitativ succes for beskrivelsen, at et stort antal partikeltilstande er fundet, som naturligt lader sig fortolke på denne måde.

Særlig for de rene rotationstilstande er fortolkningen overbevisende, og endvidere falder disse rene rotationstilstande i familier kaldet Regge-trajektorier, hvor der gælder en ejendommeligt simpel lov for sammenhængen mellem spin, J, og masse $M(J)$ inden for hver familie, specielt for hvert kvark-indhold:

$$J = \alpha_0 + \alpha' \cdot M^2(J) \tag{4.55}$$

altså at spinnet er en *lineær* funktion af masse*kvadratet.* Vi taler om approksimativt lineære Regge-trajektorier med hældning α' og intercept α_0. Den eksperimentelle værdi for hældningen α' er desuden med god tilnærmelse uafhængig af hvilken familie, vi betragter. Vi taler om den universelle værdi for hældningen, som er af størrelsen:

$$\alpha' = 0.9 GeV^{-2}$$

se figurerne nedenfor ((4.13)–(4.15)).

Det overraskende simple mønster af retlinjede Regge-trajektorier med universel hældning fører til et tilsvarende simpelt billede af exciterede hadroner med høje spin. Man forestiller sig disse hurtigt roterende hadroner som langstrakte, pølseformede strukturer med spinnet vinkelret på pølsens længdeakse. I mesonerne sidder en kvark og en antikvark i hver ende af pølsen. I baryoner sidder formentlig én kvark i den ene ende og to i den anden ende. Pølsens længde er bestemt af pølsens elasticitet og af centrifugalkraften i rotationen. I den sk "sækmodel" (eng.: bag model) for hadroner er de laveste hadroner at opfatte som kugleformede sække, i hvilke kvarkerne danner stående bølger. Tildeles sækken et højt spin, bliver den aflang, pølseformet. Iflg. QCD er den kraft, som er nødvendig for at strække pølsen længere, uafhængig af pølsens længde, såfremt pølsens tykkelse ikke ændrer sig. I urelativistisk fysik ville det sige, at der var et potential mellem kvark og antikvark (i en meson) eller dikvark (i en baryon) af formen

$$V(r) = c \cdot r \tag{4.56}$$

hvor r er afstanden mellem kvarkerne.

Næsten uanset hvordan pølsen iøvrigt opfører sig, vil et potential af denne form give anledning til asymptotisk retlinjede Regge-trajektorier. Specielt er dette korrekt i sækmodellen, hvor behandlingen endda kan gøres kovariant. (Der er dog her visse spinkomplikationer fra kvarkerne, som vi ser bort fra i denne sammenhæng).

Vi ser altså, at formen af disse Regge-trajektorier giver en meget værdifuld information om de kræfter, der virker mellem kvarkerne.

Lad os nu kort se lidt mere i detalje på de vigtigste Regge-trajektorier.

En $q\bar{q}$-meson, hvor kvarkerne har baneimpulsmoment L og spin S, har paritet $P = -(-)^L$, ladningskonjugering $C_n = (-)^{L+S}$ for en kvarkoniumtilstand.

Fig. (4.13) viser de tydeligste meson-Regge-trajektorier svarende til triplet ($S = 1$) tilstande med $J = L + 1$.

For mesoner bestående af u- og d-kvarker (antikvarker) venter vi at finde fire nærliggende tilstande for hvert J med $P = (-1)^J$, svarende til de fire måder at kombinere (u, d) med $(\overline{u}, \overline{d})$. Disse fire tilstande falder naturligt i en isosinglet og en isotriplet. Figuren viser, at alle disse tilstande er fundet op til $J = 3$, medens man på $J = 4$ niveauet kun kender den isoskalære $f_4(2050)$-meson.

For K-mesonerne (én u eller d og én $\overline{s}$) venter vi at finde én isodublet samt dens antidublet, hvilket igen er tilfældet.

Endelig venter vi for $s\overline{s}$-mesoner kun at finde én tilstand for hvert J. De kendte mesoner φ og f_2' passer her i skemaet. Bemærk, at f_2' overvejende henfalder til $K\overline{K}$ i overensstemmelse med OZI-reglen.

Fig. (4.14) - (4.17) viser en lang række baryontilstande med etablerede spin og paritet. For strangeness $= 0$ kaldes de N-tilstande, hvis de har $I = 1/2$, og Δ-tilstande, hvis de har $I = 3/2$. Tilsvarende kaldes strangeness $= -1$-baryonerne for Λ, hvis de har $I = 0$ og Σ, hvis de har $I = 1$.

Vi har set eksempler på, hvorledes sådanne 3-kvarktilstande bekvemt lader sig skrive som det direkte produkt af fire typer "bølgefunktioner":

$$|\text{3-kvark-baryon}\rangle = \psi(\{\vec{p}\}) \otimes \psi(\text{spin}) \otimes \psi(\text{flavours}) \otimes \psi(\text{colour}) \qquad (4.57)$$

Colourdelen er altid strengt antisymmetrisk, således at det direkte produkt af de tre andre er symmetrisk. For baryoner i $L = 0$ (eller S)-tilstanden er $\psi(\{\vec{p}\})$ også symmetrisk. Vi ønsker nu at betragte tilstande, hvor impulsdelen svarer til et vist baneangulært moment $L \neq 0$. Vi har så flg. muligheder for det totale spin J:

$$J = L \pm \frac{1}{2} \quad , \quad J = L \pm \frac{3}{2} \quad ; \qquad (4.58)$$

sidste mulighed forekommer kun, hvis ψ (spin) svarer til $S = 3/2$.

Sådanne tilstande har også bestemt paritet. Da ψ (spin), ψ (flavour) og ψ (colour) er invariante under paritetsoperatoren, finder vi som bekendt

$$P = (-)^L \qquad (4.59)$$

svarende til, at $P = +1$ for $L = 0, 2, 4, \ldots$ og $P = -1$ for L = 1,3,5,... .

For Δ-baryonerne ved vi, at både ψ (flavour) og ψ (spin) er symmetrisk. Det samme *skal* så være tilfældet med $\psi(\{\vec{p}\})$, hvilket betyder, at vi kun kan have L lige. I overensstemmelse hermed ses på den øverste (ledende) Regge-trajektorie kun tilstande med $J^P = 3/2^+, 7/2^+$ og $11/2^+$. For N-baryonerne derimod har ψ (spin) og ψ (flavour) blandet symmetri. Vi har derfor mulighed for at danne tilstande med L både lige og ulige for et fast J. I overensstemmelse hermed findes både $J^P = 5/2^{\pm}$, og $J^P = 9/2^{\pm}$ svarende til hhv $5/2^+ : 1/2 + 2$, $5/2^- : 3/2 + 1$, $9/2^+ = 1/2 + 4$, $9/2^- : 3/2 + 3$. Serien $J^P = 3/2^-, 7/2^-, 11/2^-$, svarende til $1/2 + 1, 3, 5, \ldots$ ses at ligge noget lavere end den ledende trajektorie.

I figurerne med baryon-Regge-trajektorier har vi markeret resonanser med positiv paritet ved lukkede cirkler, og dem med negativ paritet ved åbne cirkler. Vi har her kun ønsket at fremdrage de allertydeligste træk og fremhæve dem som overbevisende succeser for kvarkmodellen. At forstå alle hadrontilstandene kræver mere detaljerede oplysninger om kvarkdynamikken. Vi må forvente, at det endelige billede bliver ganske kompliceret.

4.11 "De nye partikler"

Nogle af kvarkmodellens største triumfer er blevet fejret i anledning af opdagelsen af partikler indeholdende de "nye tunge" kvarker c og b. Der kendes nu et betydeligt antal mesoner af formen $(c\bar{c}), (c\bar{u}), (c\bar{d}), (c\bar{s})$ samt de tilhørende antipartikler.

Endvidere kendes baryontilstande

$$\Lambda_c^+, \Sigma_c^{++}, \Sigma_c^+ \Sigma_c^0, \Xi_c^+, \Xi_c^0$$

svarende til, at s-kvarken i Λ, Σ og Ξ er ombyttet med en c-kvark. Efterhånden kendes også et større antal Υ-mesoner, bestående af $b\bar{b}$, såvel som B-mesoner på formen $(u\bar{b}), (b\bar{u}), (d\bar{b}), (b\bar{d})$.

På det niveau, vi har betragtet hadroner i indeværende kapitel, følger behandlingen af "de nye partikler" fuldstændig ovenstående mønster. Vi vil i senere kapitler komme tilbage til en række detailegenskaber, der på slående måde bekræfter vores forestillinger om hadronernes kvarkstruktur.

4.12 Baryonernes magnetiske momenter

Som en sidste, lidt mere detaljeret anvendelse af kvarkmodellen, vil vi diskutere baryonernes magnetiske momenter.

4.12.1 Klassisk behandling

Lad os først minde om forholdene i klassisk, urelativistisk elektrodynamik. Vi betragter den simplest tænkelige situation: En partikel med masse m og ladning e bevæger sig af en eller anden grund i cirkelbane med radius r og hastighed v. Så er dens impulsmoment

$$\vec{J} = mvr\hat{n} \tag{4.60}$$

hvor $\hat{n}$ er en enhedsvektor normal til baneplanen. Systemets magnetiske moment er den elektriske strøm gange arealet af banen. Nu er omløbsfrekvensen $v/2\pi r$, så det magnetiske moment bliver

$$\vec{\mu} = e \cdot \frac{v}{2\pi r} \cdot \pi r^2 \hat{n} = \frac{1}{2} evr\hat{n} \tag{4.61}$$

Sammenligning med (4.60) giver

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m}\vec{J} \tag{4.62}$$

uafhængigt af banens størrelse.

Forestiller vi os nu en klassisk snurretop med ladning jævnt fordelt i forhold til massefordelingen, ser vi, at det magnetiske moment for den klassiske top igen vil adlyde (4.62), hvor størrelsen $e/2m$ både kan opfattes som en delladning divideret med den tilhørende delmasse (gange 2), men også som toppens totale ladning divideret med 2 gange toppens totale masse. Opfatter vi toppen som en model for en elementarpartikel, har vi altså i (4.62) en klassisk teori for elementarpartiklernes magnetiske moment. Som vi snart skal se, er dette en ret dårlig teori.

Størrelsen $e/2m$ kaldes en Bohr-magneton, hvis e er positronens ladning, og m er elektronens masse. Er e protonens ladning og m protonens masse, kaldes størrelsen en kernemagneton. Baryoners magnetiske momenter måles i enheder af kernemagnetoner. Vi indfører også begrebet g-faktoren for en partikel

$$\mu = g\,\frac{e}{2M}\cdot s \quad , \quad s \ \text{dens spin} \tag{4.63}$$

hvor e er partiklens ladning, og hvor M er dens masse. Iflg. (4.62) venter vi, at g skal være 1.

I tabel 4.4 har vi angivet de eksperimentelt kendte værdier af magnetiske momenter i kernemagnetoner for en række spin-1/2 baryoner. Vi ser, at tallene dels afviger betragteligt fra 1, dels at de ikke er nul, selvom elementarpartiklens elektriske ladning er nul. At det magnetiske moment for Σ^- og Ξ^- er negativt, er dog hvad vi ville vente.

En god teori for elementarpartikler bør kunne forklare de ejendommelige tal i tabel 4.4. Det må betragtes som en triumf for kvarkmodellen, at den kan give en meget simpel forståelse af disse tal.

Tabel 4.4: Baryonernes magnetiske momenter i enheder af kernemagnetoner $e/2M$

navn	eksperiment	kvarkmodel	"fit"
p	2.793	$\frac{M}{\overline{m}}$	$(\overline{m} = 337 MeV)$
n	- 1.913	$-\frac{2}{3}\frac{M}{\overline{m}}$	-1.86
Λ	- 0.613	$-\frac{1}{3}\frac{M}{m_s}$	(m_s =510 MeV)
Σ^+	2.42 ± 0.05	$\frac{1}{9}(8\frac{M}{\overline{m}} + \frac{M}{m_s})$	2.68
Σ^-	-1.16 ± 0.02	$-\frac{1}{9}(4\frac{M}{\overline{m}} - \frac{M}{ms})$	- 1.03
Ξ^0	-1.25 ± 0.01	$-\frac{2}{9}(\frac{M}{\overline{m}} + 2\frac{M}{m_s})$	- 1.44
Ξ^-	-0.68 ± 0.03	$\frac{1}{9}(\frac{M}{\overline{m}} - 4\frac{M}{m_s})$	- 0.51

Lad os, inden vi går til udledelsen, først betragte resultatet som angivet i tabel 4.4. Den 3. kolonne angiver vores teori. Her er M protonmassen, medens $\overline{m}$ og m_s er hhv den karakteristiske energi af en u- eller d-kvark i en baryon ($\overline{m}$) og den karakteristiske energi af en s-kvark i en baryon (m_s). I "fit"-kolonnen har vi afstået fra at forudsige μ for p og Λ og i stedet brugt disse værdier til at finde $\overline{m}$ og m_s. Den omstændighed, at $\overline{m}$ og m_s passer så godt med tabel 4.1., er yderst tilfredsstillende. Tilbage bliver forudsigelsen for $n, \Sigma^+, \Sigma^-, \Xi^0$ og Ξ^-, som må siges at være imponerende for en så simpel model, som vi snart skal indføre.

4.12.2 Det magnetiske moment af en Dirac-fermion

Inden vi kan udlede tabel 4.4. får vi brug for at kende det "indre" magnetiske moment af en kvark. Denne størrelse er ikke direkte målt, men vi vil nu antage, at kvarker er *simple strukturløse Dirac-fermioner.* Det følger så, at deres g-faktor må være 2 (!). Dette berømte resultat blev først udledt af Dirac og anvendt på elektronen. Det løste en alvorlig vanskelighed med forståelsen af detaljer i atomspektre. Kvarkernes magnetiske momenter er selvfølgelig ikke lig med elektronernes, da jo kvarkernes elektriske ladninger er $+2/3$ eller $-1/3$. Endvidere er kvarkernes masse forskellige fra elektronernes. Som vi skal se, er det kvarkernes *energi*, der erstatter masseparameteren i det urelativistiske resultat (4.63).

For at finde det magnetiske moment af en Dirac-fermion tænker vi på dennes energi i et ydre homogent magnetfelt. Vi ved da, at energien ændres med beløbet

$$\Delta E_{spin} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \tag{4.64}$$

hvoraf $\vec{\mu}$ kan bestemmes.

Vi har i tankerne ultra-relativistiske kvarker, der danner stående bølger inden i hadronsækken. Lad os derfor for simpelheds skyld studere en ultrarelativistisk elektron, så vi kan negligere dens hvilemasse. Så er Dirac-ligningen uden baggrundsfelt

$$i\, \partial\!\!\!/ \psi \equiv p\!\!\!/ \psi = 0$$

Fra klassisk elektrodynamik er vi vante til at tage hensyn til et elektromagnetisk felt ved at erstatte p^μ med

$$p^\mu - eA^\mu$$

Vi skal senere i kap. 6 (lign. (6.8) og (6.24)) begrunde denne fremgangsmåde i detalje. Vi får så for Dirac-ligningen i et baggrundsfelt

$$(i\, \partial\!\!\!/ - e\, A\!\!\!/)\psi = 0$$

Lad os virke på denne ligning med differentialoperatoren

$$-(i\, \partial\!\!\!/ - e\, A\!\!\!/) \equiv -i\, D\!\!\!\!/ \quad , \qquad \text{hvor} \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$$

$$\begin{aligned} 0 &= -(i\, \partial\!\!\!/ - e\, A\!\!\!/)(i\, \partial\!\!\!/ - e\, A\!\!\!/)\psi = +D_\mu D_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \psi \\ &= (\frac{1}{2}[D_\mu, D_\nu]\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \frac{1}{2}\{D_\mu, D_\nu\}\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\})\psi \end{aligned} \tag{4.65}$$

hvor vi har brugt, at der altid gælder

$$AB = \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{2}\{A, B\}$$

samt at kommutatorerne og antikommutatorerne har modsatte symmetrier i (μ, ν), således at fx

$$[D_\mu, D_\nu]\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv 0$$

pga summationen over μ og ν.

Lad os udregne kommutatoren $[D_\mu, D_\nu]$ virkende på en funktion $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\psi(x) &= [\partial_\mu + ieA_\mu, \partial_\nu + ieA_\nu]\psi(x) \\ &= [\partial_\mu, \partial_\nu]\psi(x) + ie([\partial_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \partial_\nu])\psi(x) - e^2[A_\mu, A_\nu]\psi(x) \end{aligned}$$

Her forsvinder første og sidste led. For de midterste fås

$$[\partial_\mu, A_\nu]\psi(x) = \partial_\mu(A_\nu(x)\psi(x)) - A_\nu(x)\partial_\mu\psi(x) = (\partial_\mu A_\nu)\psi(x)$$

Altså ialt

$$
\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu]\psi(x) &= ie(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))\psi(x) \\
&\equiv ie\ F_{\mu\nu}(x)\psi(x)
\end{aligned} \tag{4.66}
$$

der bla viser, at $[D_\mu, D_\nu]$ ikke er en differentialoperator men blot et felt.

For sidste led i (4.65) finder vi, da $\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\{D_\mu, D^\mu\}\psi(x) &= D_\mu D^\mu \psi(x) = (\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu)\psi(x) \\
&= \partial_\mu\partial^\mu\psi(x) + ie(\partial_\mu A^\mu(x))\psi(x) + 2ieA_\mu(x)\partial^\mu\psi(x) - e^2 A_\mu A^\mu \psi(x)
\end{aligned} \tag{4.67}
$$

Lad os nu vælge et vektorpotential A_μ svarende til et homogent magnetfelt i z-aksens retning. Det er let at se, at én mulighed er

$$
A^\mu = [0, 0, x^1 B, 0] \tag{4.68}
$$

for hvilken $\partial_\mu A^\mu = 0$. Endvidere har vi

$$
F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.69}
$$

Endelig har vi (jfr. afsn. 3.8)

$$
\frac{1}{2}[\gamma^i, \gamma^j] = -i\epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}
$$

Kombineres alle resultater kan vi skrive (4.65) som

$$
\{\frac{1}{2}(ieF_{ij})\left(-i\epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}\right) + \partial_\mu\partial^\mu + 2ieA_\mu(x)\partial^\mu - e^2 A_\mu(x)A^\mu(x)\}\psi(x) = 0
$$

eller

$$
\{-eB\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} + \partial_\mu\partial^\mu + 2ieA_\mu\partial^\mu - e^2 A_\mu(x)A^\mu(x)\}\psi(x) = 0 \tag{4.70}
$$

Fra kap. 3 ved vi, at

$$
\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}
$$

kan fortolkes enten som spinmatricen i fermionens hvilesystem eller som helicitetsoperatoren for fermioner, der bevæger sig i 3-aksens retning. Andet led i (4.70) giver os på sædvanlig måde

$$
-(p^0)^2 + (\vec{p})^2
$$

for egentilstande af energi og impuls. De to sidste led er her uinteressante for os. De beskriver den ændring af energi, fermionen får som følge af, at den vil begynde at udføre en spiralbevægelse omkring feltlinierne. Vores afgørende resultat er, at *kvadratet* på *energien* bliver ændret med beløbet

$$\Delta(E_{spin})^2 = -2eB \cdot s \tag{4.71}$$

hvor s er heliciteten langs 3-aksen. Heraf følger for små felter ($B \to 0$), at

$$\Delta E_{spin} = -\frac{2eB}{2E}s \tag{4.72}$$

I alle disse ligninger har e stået for partiklens ladning, som er negativ for en elektron. Vi skifter nu notation og forbeholder bogstavet e til elementarladningen uden fortegn. Vi vil så ofte betegne en partikels ladning ved Qe eller bare Q, som altså for elektronen er -1. Med denne notation kan vi derfor nu skrive

$$\mu(\text{elektron}) = -\frac{2 \cdot s \cdot e}{2E}$$

eller, at

$$\text{elektronens } g\text{-faktor er } 2 \tag{4.73}$$

Vi kan straks generalisere resultatet til en relativistisk kvark med ladning Qe og *energi* m :

$$\mu(\text{kvark}) = +2Qs\frac{e}{2m} \tag{4.74}$$

hvor s er kvarkens helicitet $= \pm\frac{1}{2}$.

4.12.3 Baryonernes magnetiske momenter

Lad os nu gå tilbage til baryonernes magnetiske momenter og først se på en proton. Som tidligere begrundet antager vi, at de tre kvarker i en proton er i en S-tilstand, således at der ikke er noget baneimpulsmoment at holde regnskab med. Vores teori for protonens magnetiske moment består alene i at sammenlægge bidragene fra de tre kvarker. Her må vi tage hensyn til, at en proton er beskrevet ved tilstanden (4.54). Vi vil altså studere middelværdien (som også er egenværdien) af det magnetiske moment i denne tilstand. Da de enkelte led i summen (4.54) er orthogonale, og det magnetiske moment ikke ændrer på tilstandene, får vi

$$\begin{aligned}
\langle p|\mu|p\rangle \;=\; & \frac{1}{18}\{4\langle u\uparrow d\downarrow u\uparrow|\mu|u\uparrow d\downarrow u\uparrow\rangle \\
& + 4\langle u\uparrow u\uparrow d\downarrow|\mu|u\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle + 4\langle d\downarrow u\uparrow u\uparrow|\mu|d\downarrow u\uparrow u\uparrow\rangle \\
& + \langle u\uparrow u\downarrow d\uparrow|\mu|u\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle + \langle u\uparrow d\uparrow u\downarrow|\mu|u\uparrow d\uparrow u\downarrow\rangle \\
& + \langle u\downarrow d\uparrow u\uparrow|\mu|u\downarrow d\uparrow u\uparrow\rangle + \langle d\uparrow u\downarrow u\uparrow|\mu|d\uparrow u\downarrow u\uparrow\rangle \\
& + \langle d\uparrow u\uparrow u\downarrow|\mu|d\uparrow u\uparrow u\downarrow\rangle + \langle u\downarrow u\uparrow d\uparrow|\mu|u\downarrow u\uparrow d\uparrow\rangle\}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Her bemærker vi først, at μ ikke kan se forskel på tilstande, der blot afviger ved permutationer af kvarker. Altså fås

$$\langle p|\mu|p\rangle = \frac{1}{3}\{2\langle u\uparrow u\uparrow d\downarrow|\mu|u\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle + \langle u\uparrow u\downarrow d\uparrow|\mu|u\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle\}$$

Idet vi antager, at u og d-kvarker begge har energien $\overline{m}$ i protonen, får vi

$$\begin{aligned}
\langle u\uparrow u\uparrow d\downarrow|\mu|u\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle &= \tfrac{e}{2\overline{m}}\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} - (-\tfrac{1}{3})\right) = \tfrac{e}{2\overline{m}}\tfrac{5}{3} \\
\langle u\uparrow u\downarrow d\uparrow|\mu|u\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle &= \tfrac{e}{2\overline{m}}\left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3} + (-\tfrac{1}{3}\right) = -\tfrac{1}{3}\tfrac{e}{2\overline{m}}
\end{aligned}$$

$$\langle p|\mu|p\rangle = \frac{e}{2m} = \frac{e}{2M}\left(\frac{M}{m}\right) \tag{4.76}$$

som er resultatet i tabel 4.4.

For de øvrige baryoners vedkommende overlades regningen i det væsentlige til læseren. Vi giver her nogle små vejledninger.

(i) Neutronens kvarksammensætning fremgår af protonens ved at erstatte u med d.

(ii) Λ-tilstanden dannes ved at sammensætte (ud) med spin og isospin $= 0$ og så tilføje en s. Dette giver

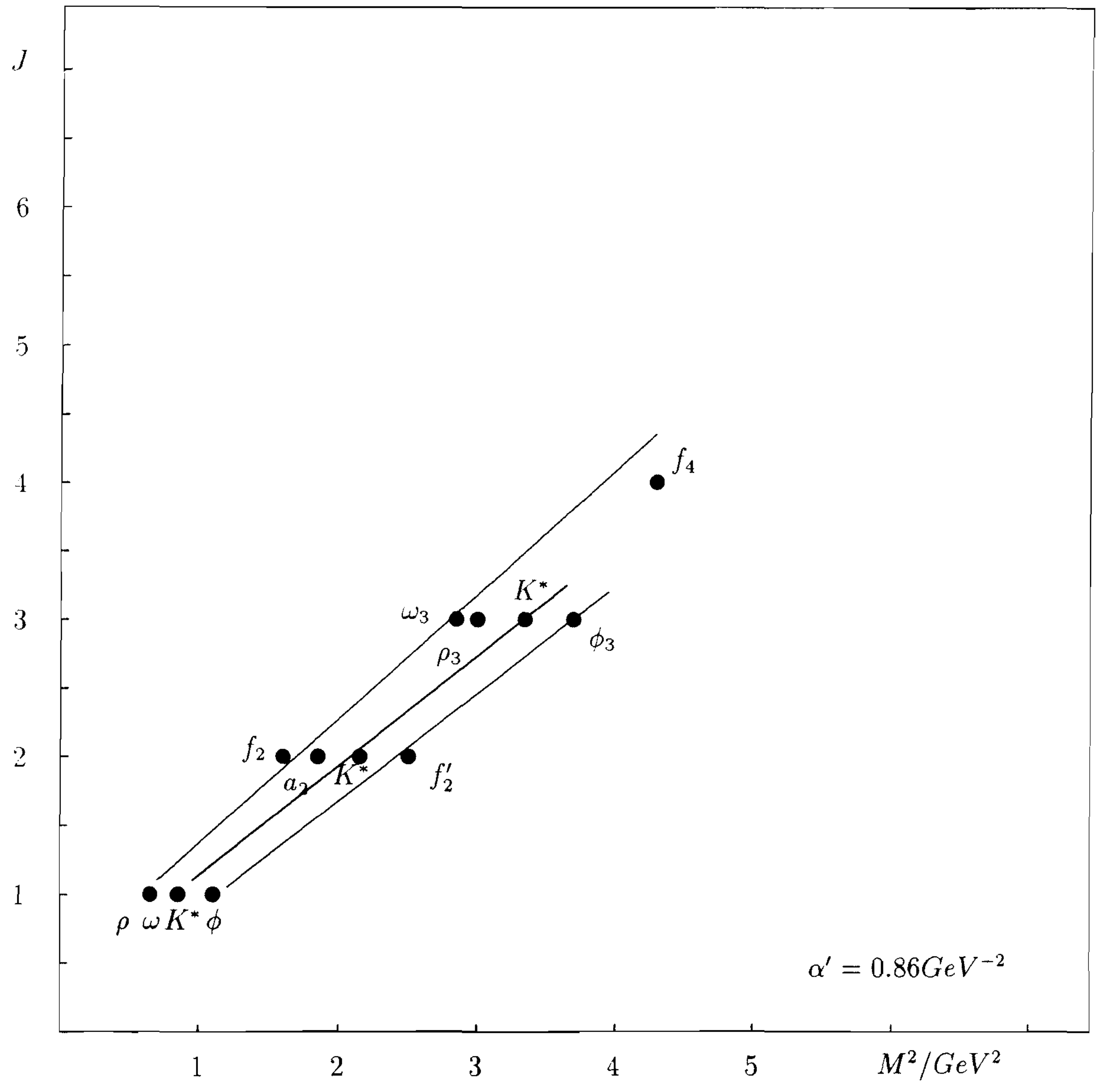
$$\begin{aligned}|\Lambda \uparrow\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{12}}\{&|u \uparrow d \downarrow s \uparrow\rangle \quad + \quad 5 \text{ ikke interfererende permutationer}\\ -&|u \downarrow d \uparrow s \uparrow\rangle \quad - \quad 5 \text{ ikke interfererende permutationer}\}\end{aligned}$$

(iii) For Σ^+ må de to u-kvarker have isospin $= 1$. Symmetriseringen giver så anledning til, at de også må have spin $= 1$ (spin 0 og isospin 1 ville give nul efter symmetrisering). Heraf fås før symmetrisering

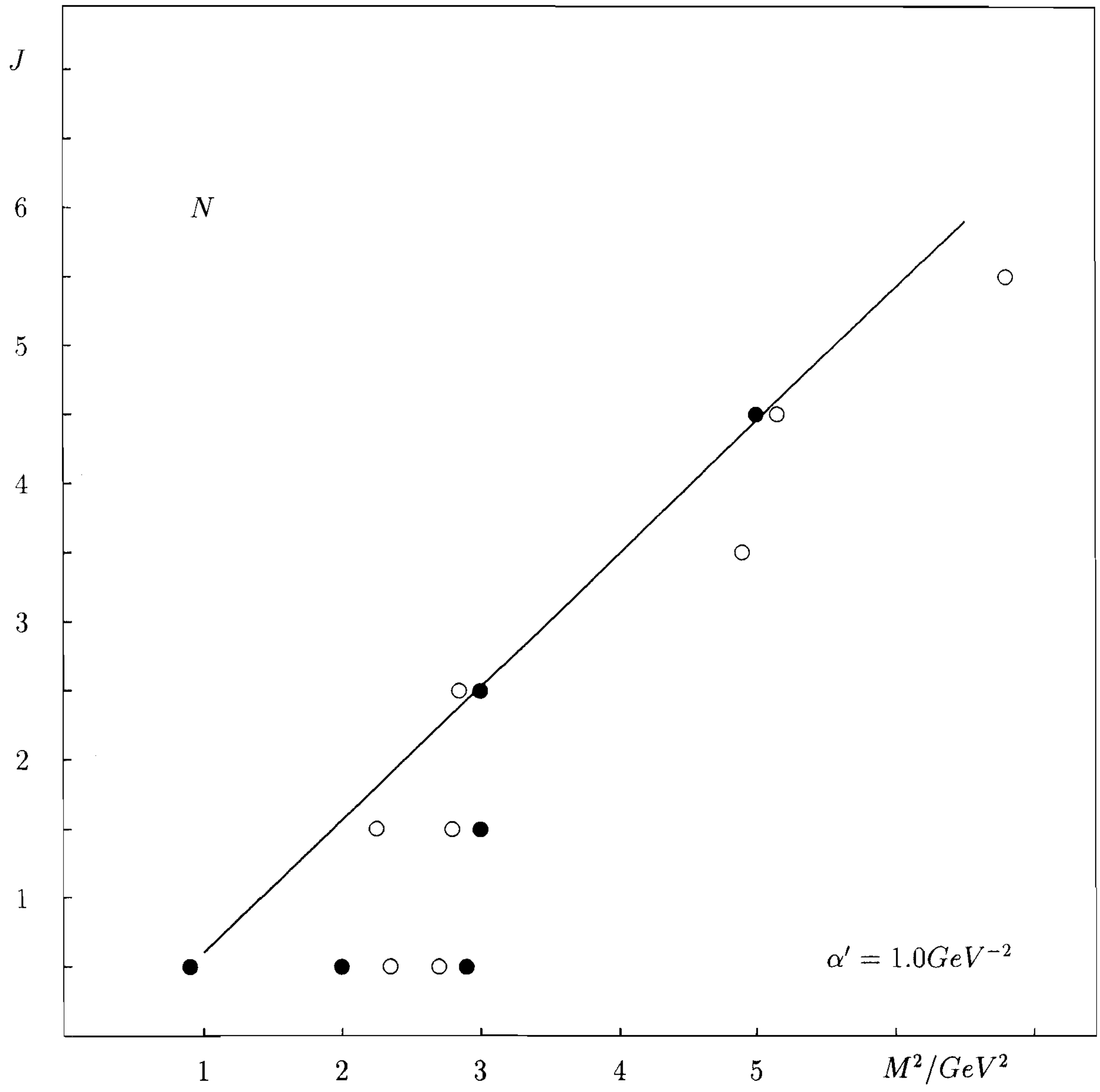
$$|\Sigma^+ \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|u \uparrow u \uparrow s \downarrow\rangle - |u \uparrow u \downarrow s \uparrow\rangle - |u \downarrow u \uparrow s \uparrow\rangle)$$

(iv) Σ^- fås af Σ^+ ved $u \to d$.

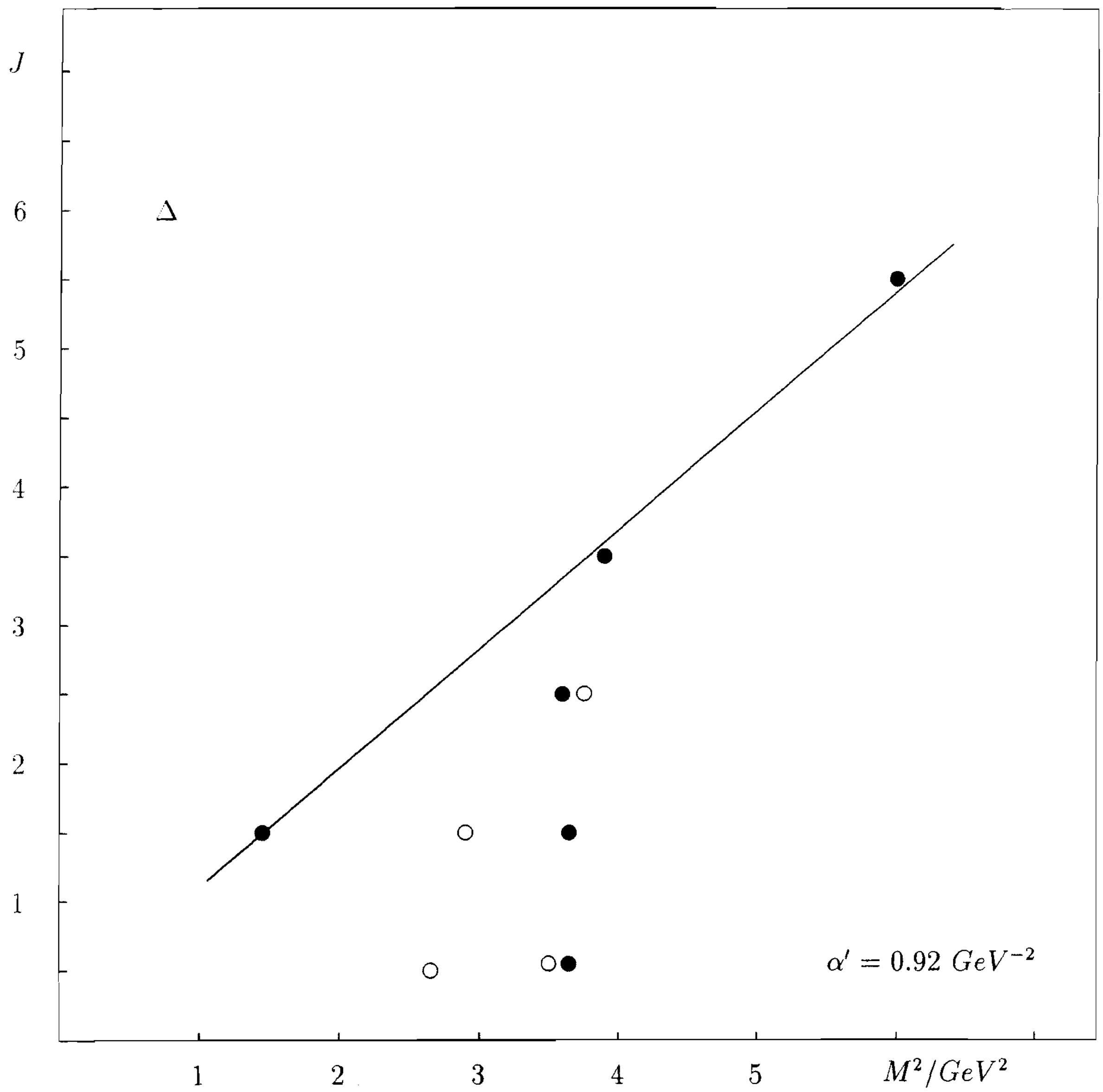
(v) Ξ^- fås af Ξ^0 ved $u \to d$.



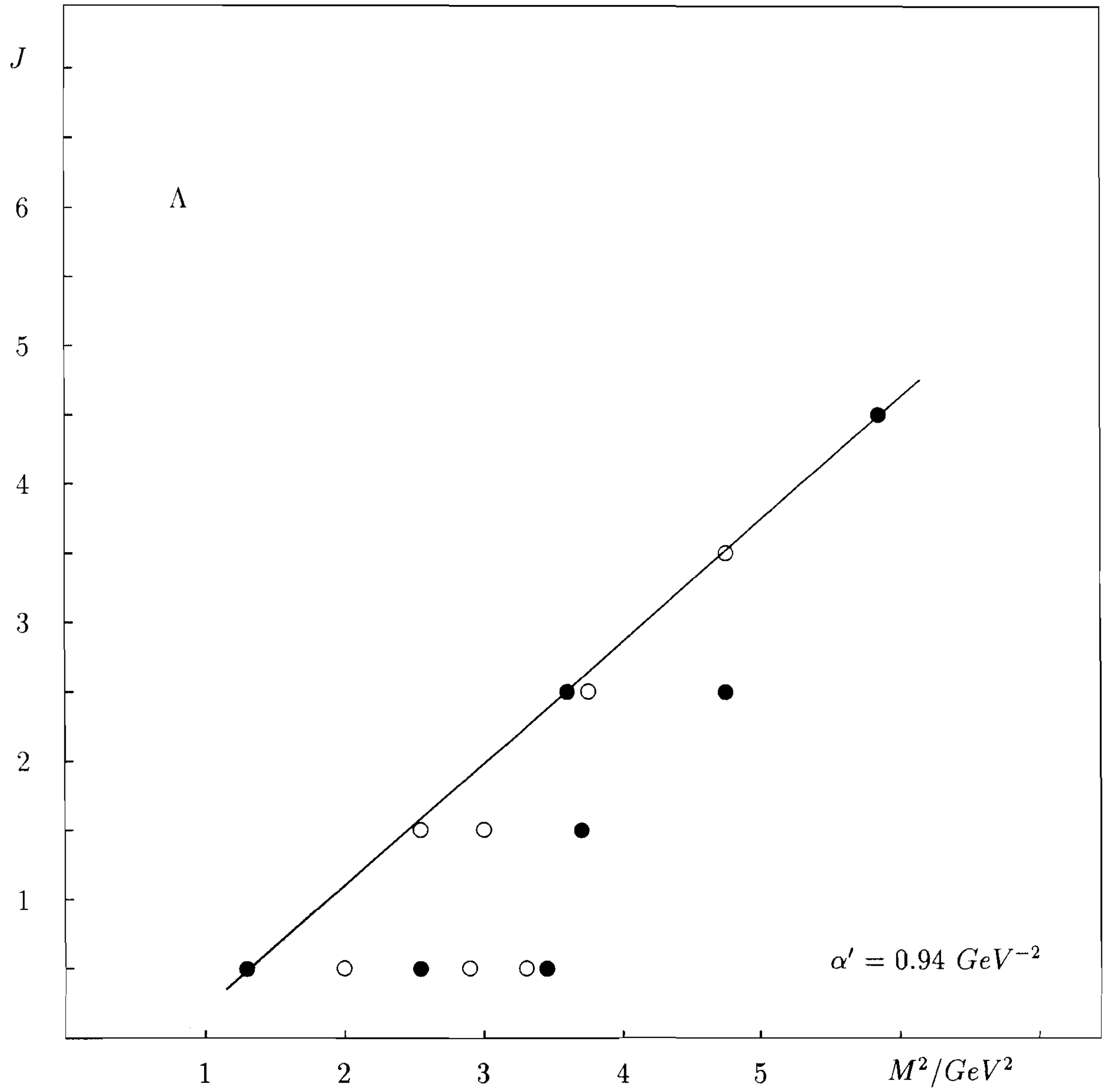
Figur 4.13: Meson-Regge-trajektorier.



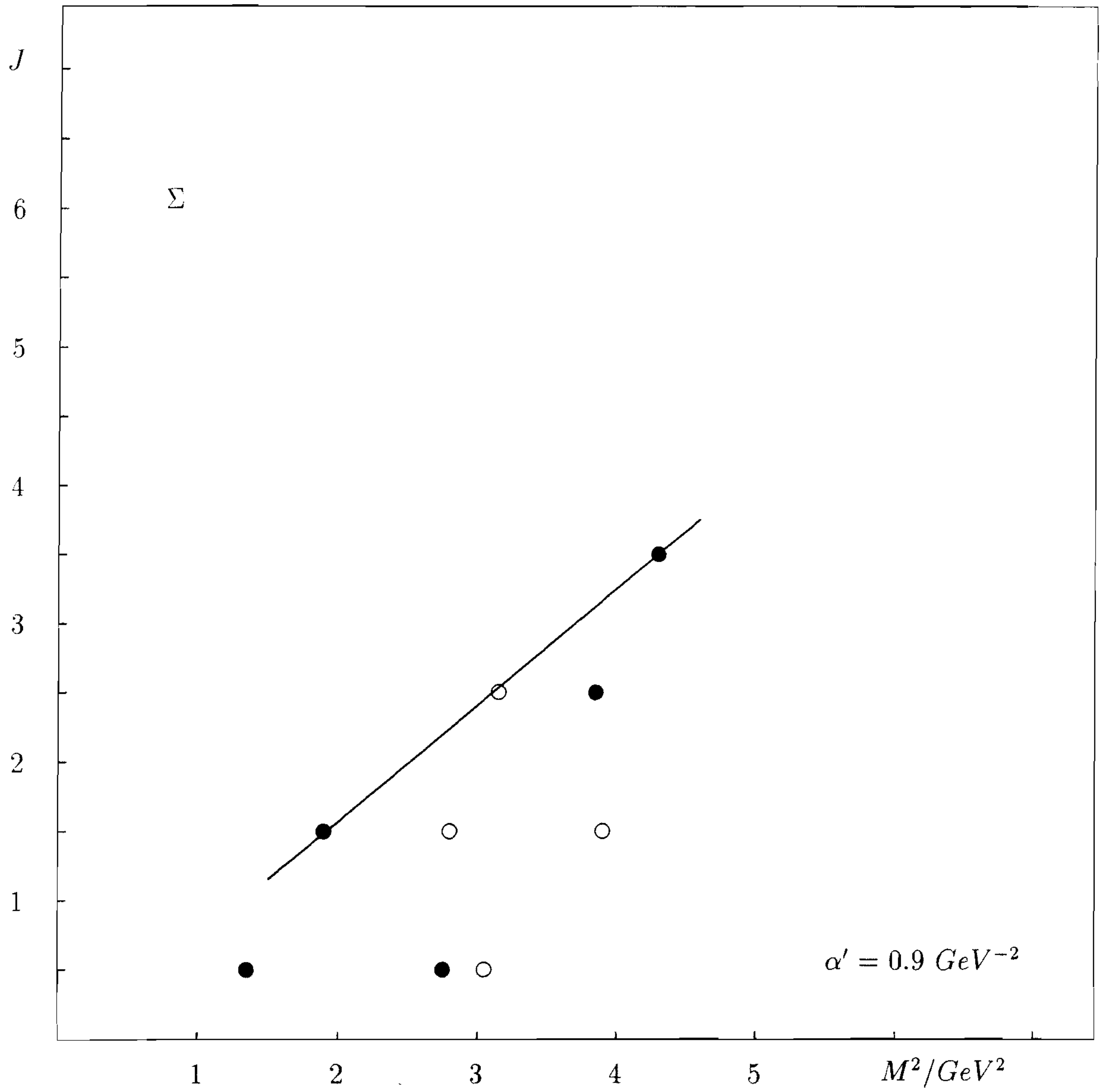
Figur 4.14: Nucleon-Regge-trajektorier.



Figur 4.15: Δ-resonans-Regge-trajektorier.



Figur 4.16: Λ-hyperon-Regge-trajektorier, dvs dem med strangeness $= -1, I = 0$.



Figur 4.17: Σ-hyperon-Regge-trajektorier, dvs. dem med strangeness $= -1, I = 1$

Kapitel 5

KVANTEELEKTRODYNAMIK OG FEYNMAN-REGLER

5.1 Elektrodynamik for et fermionfelt

De sædvanlige Maxwell-ligninger i vacuum lyder

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\vec{j}}{\epsilon_0}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \tag{5.1}$$

hvor c er lyshastigheden og ϵ_0 er en konstant, hvis værdi beror på en konvention, som fastlægger valget af *enhed* for elektrisk ladning. Ladningstætheden og ladningsstrømtætheden er givet ved hhv $\rho(\vec{x},t)$ og $\vec{j}(\vec{x},t)$. Disse størrelser samles i en 4-vektor, $j^\mu(x)$ således, at

$$j^\mu(x)\equiv(\rho(\vec{x},t),\vec{j}(\vec{x},t))$$

Vi ønsker nu at betragte et fysisk system bestående af fermioner med ladning e, som vekselvirker udelukkende elektromagnetisk. Vi tænker i dette afsnit mest på elektroner (og andre ladede leptoner), men behandlingen gælder i vid udstrækning også de elektromagnetiske forhold for kvarker.

Fermionerne er beskrevet ved et kvantefelt $\psi(x)$ med fire spinkomponenter. Som en model for den elektriske 4-strømtæthed vil vi tage

$$j^\mu(x)=e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{5.2}$$

Vi har tidligere set, at denne størrelse er en 4-divergensfri 4-vektor. I næste kapitel skal vi yderligere begrunde valget (5.2) som et resultat af gaugeprincippet.

I dette kapitel skal vi fortrinsvis tænke på $\psi(x)$ som et elektronfelt og følgelig betragte e som negativ = værdien af elektronens ladning. I senere kapitler, når vi taler om kvarker og andre fermioner, er det bekvemt at betegne fermionens ladning som Qe, hvor e = *proton*ladningen, og Q (elektron) $=-1$, Q (u-kvark) $=+2/3$ etc. Men i dette kapitel vil vi altså ikke slæbe rundt på Q.

Værdien af elektronladningen specificeres bekvemt ved finstrukturkonstanten

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\simeq\frac{1}{137.03599} \tag{5.3}$$

I *SI*-systemet er ϵ_o pr. definition $=\frac{10^7}{4\pi c^2}$. I højenergifysikken vælges normalt enheder, så

$$\hbar=c=\epsilon_o=1 \quad ; \quad \alpha=\frac{e^2}{4\pi}\simeq\frac{1}{137}$$

Det viser sig nu, at i kvantefysikken er feltstyrkerne $\vec{E}$ og $\vec{B}$ *ikke* bekvemme størrelser direkte at kvantisere. De naturlige variable er 4-potentialerne $A^\mu(x)$. Igen skal vi begrunde dette nærmere i næste kapitel. I termer af gaugepotentialerne $A^\mu(x)$ kan vi formulere elektrodynamikken som følger:
Definér

$$F_{\mu\nu}(x)\equiv\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x) \tag{5.4}$$

Så er

$$F^{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}=-F^{\nu\mu} \tag{5.5}$$

Maxwell-ligningerne er dels dem uden strømme og ladninger, der nu kan skrives:

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \tag{5.6}$$

som er en triviel konsekvens af (5.4), samt dels dem med strømme og ladninger, der nu kan skrives:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{5.7}$$

eller

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \tag{5.8}$$

Øvelse: Vis, at ligningerne (5.6) og (5.7) er ækvivalente med de oprindelige Maxwell-ligninger.

Disse bevægelsesligninger fås af Lagrange-tætheden

$$\mathcal{L}(x) = \overline{\psi}(x)(i\,\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) - \frac{\epsilon_0}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) - e\overline{\psi}(x)\,A\!\!\!/(x)\psi(x) \tag{5.9}$$

hvor vi bruger notationen, at for hver 4-vektor (4-operator) a^μ betegner $a\!\!\!/$ 4×4 matricen $a_\mu\gamma^\mu$, hvor γ^μ er Dirac-matricerne.

De to første led i (5.9) er Lagrange-funktionerne for det frie Dirac-felt og for det frie Maxwell-felt. Sidste led er vekselvirkningsdelen:

$$\mathcal{L}_I(x) = -e\overline{\psi}(x)\,A\!\!\!/(x)\psi(x) \tag{5.10}$$

Det overlades til læseren at bruge de almindelige Euler-Lagrange-ligninger på (5.9):

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right] \tag{5.11}$$

og eftervise (5.7) ved variation efter A_ν. Her indskrænker vi os til et enkelt eksempel: Variation efter $\psi(x)$ (læseren opfordres til nøje at gennemtænke skjulte indices!):

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -e\overline{\psi}\,A\!\!\!/ - m\overline{\psi} \quad \text{(en række-spinor!)} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = i\overline{\psi}\gamma^\mu$$

Altså

$$i\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu + m\overline{\psi} = -e\overline{\psi}\,A\!\!\!/ \tag{5.12}$$

Når "koblingskonstanten" e mellem stof og stråling går mod nul, forsvinder højre side, og $\overline{\psi}$ udvikler sig efter den frie Dirac-ligning.

Lad os endelig se på de elektromagnetiske vekselvirkningers invarians under paritet og ladningskonjugering. Vi har allerede (jfr kap. 3.11) studeret transformationsegenskaberne af ψ og $\overline{\psi}$ under $\mathcal{P}$ og $\mathcal{C}$. Vi valgte dem, så den frie Dirac-ligning blev invariant. Endvidere at

$$\begin{aligned} j^\mu(\vec{x},t) = e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \;&\xrightarrow{\mathcal{P}}\; \mathcal{P}j^\mu(x)\mathcal{P}^{-1} = j_\mu(-\vec{x},t) \quad \text{og} \\ j^\mu(\vec{x},t) \;&\xrightarrow{\mathcal{C}}\; \mathcal{C}j^\mu(x)\mathcal{C}^{-1} = -j^\mu(\vec{x},t) \end{aligned} \tag{5.13}$$

Det er derfor nærliggende at *definere* $A^\mu(x)$'s transformation under $\mathcal{P}$ og $\mathcal{C}$ til

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{P}A^\mu(x)\mathcal{P}^{-1} & = & A_\mu(-\vec{x},t) \\ \mathcal{C}A^\mu(x)\mathcal{C}^{-1} & = & -A^\mu(x) \end{array}\right\} \tag{5.14}$$

Med disse definitioner er nemlig (integralet over) $\mathcal{L}_I$ invariant. Det er ikke helt trivielt, at også den frie Maxwell-del af $\mathcal{L}$ er invariant med definitionen (5.14). Det overlades til læseren at vise, at dette virkelig er tilfældet. Herunder findes først transformationsloven for $F_{\mu\nu}(x)$, som kan skrives

$$\left.\begin{array}{lcl} \vec{E}(\vec{x},t) \xrightarrow{\mathcal{P}} -\vec{E}(-\vec{x},t) & , & \vec{B}(\vec{x},t) \xrightarrow{\mathcal{P}} +\vec{B}(-\vec{x},t) \\ \vec{E}(\vec{x},t) \xrightarrow{\mathcal{C}} -\vec{E}(\vec{x},t) & , & \vec{B}(\vec{x},t) \xrightarrow{\mathcal{C}} -\vec{B}(\vec{x},t) \end{array}\right\} \tag{5.15}$$

I princippet er hele kvanteelektrodynamikken indeholdt i Lagrange-funktionen (5.9). Vi mangler "blot" at løse bevægelsesligningerne i de feltkonfigurationer, som svarer til interessante eksperimentelle situationer. Og her skal vel at mærke de observable behandles som kvantemekaniske operatorer, og randbetingelserne på feltkonfigurationerne skal beskrives ved begyndelses- og slut-tilstande. Dette problem er langtfra trivielt! Vi skal i resten af kapitlet beskæftige os med nogle af detaljerne.

5.2 Kvantisering af det frie Maxwell-felt

Som bekendt er Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

invariant under gaugetransformationer

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x) \tag{5.16}$$

hvor $\chi(x)$ er et vilkårligt skalarfelt.

I klassisk elektrodynamik udnyttes denne flertydighed til valg af gaugebetingelser, som gør den matematiske behandling af et forelagt problem særlig simpel. I *kvante*elektrodynamikken derimod byder denne gaugeinvarians på en lang række dybtgående problemer, som vi her blot kan skitsere nogle af.

Problemet er, at vi må passe på, hvilke dynamiske variable vi overhovedet kvantiserer. Lad os forestille os en konkret fysisk situation, hvor feltet $A^\mu(\vec{x},t_0)$ har en given værdi overalt i rummet til tiden $t = t_0$. I en "normal" situation ville så feltets værdi $A^\mu(\vec{x},t)$ være éntydigt givet til enhver senere tid som løsning til bevægelsesligningerne. Dette kan imidlertid ikke være tilfældet med det elektromagnetiske felt. Haves nemlig én løsning, vil (5.16) også være en løsning for vilkårligt valgte $\chi(x)$. Sagt med andre ord, vores fysiske system (feltet $A^\mu(x)$) indeholder slet ikke så mange frihedsgrader, som det ser ud til. Dette er i overensstemmelse med, at vi udmærket godt ved, at fotoner med bestemt 4-impuls kun findes i *to* helicitetstilstande, medens man ud fra beskrivelsen skulle vente at finde fire, da A_μ har fire komponenter. To af A_μ's komponenter er mao ufysiske og skal så selvfølgelig heller ikke kvantiseres. Men udvælger vi to til kvantisering, vil vi uundgåeligt bryde den relativistiske kovarians i beskrivelsen.

Et af de formelle problemer i kvanteelektrodynamikken (og alle andre gaugeteorier) er, at man - for overhovedet at kunne kvantisere teorien - er nødt til at bryde gaugeinvarians (og evt også kovarians) [1]. Imidlertid gælder det, at ligegyldigt i hvilken gauge man kvantiserer, så bliver alle fysiske forudsigelser nøjagtigt de samme, og de adlyder alle krav om relativistisk invarians. Det vil ikke i dette kursus være muligt at bevise dette fundamentale resultat, men vi skal se smagsprøver på de afgørende pointer.

Vi vælger først at gennemføre kvantiseringen i den sk *strålingsgauge*, karakteriseret ved

$$A^0(x) \equiv 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) = 0$$

som er to ikke-kovariante gaugebetingelser.

Det følger heraf, at Lorentz-betingelsen $0 = \partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ er opfyldt med fotonmassen = 0. De frie bevægelsesligninger for $A^\mu(x)$ er så den masseløse Klein-Gordon-ligning (jfr (5.8))

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu(x) = \Box A_\nu(x) = 0$$

Vi kan derfor udvikle $\vec{A}(x)$ (A^0 er jo bare nul i vores gauge) på et fuldstændigt sæt af planbølge løsninger:

$$\vec{A}(x) = \int \frac{d^3k}{(2k^0)(2\pi)^3} \sum_{i=1}^{2} \left(\vec{\epsilon}_i(\vec{k}) a_i(\vec{k})\ e^{-ik_\mu x^\mu} + \vec{\epsilon}_i(\vec{k}) a_i^\dagger(\vec{k})\ e^{+ik_\mu x^\mu} \right) \tag{5.17}$$

hvor

$$k^0 = +[\vec{k}^2]^{\frac{1}{2}} = |\vec{k}| \quad \text{eller} \quad k_\mu k^\mu = 0$$

der sikrer, at Klein-Gordon-ligningen er opfyldt. I (5.17) har vi også benyttet, at $A^\mu(x)$ er et hermitesk felt. Polarisationsvektorerne

$$\vec{\epsilon}_i(\vec{k}) \perp \vec{k} \quad , \quad i = 1, 2 \tag{5.18}$$

Dette følger direkte af gaugebetingelsen $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_{\vec{k}} \sum_{i=1}^{2} \left(\vec{\epsilon}_i(\vec{k}) a_i(\vec{k}) \cdot (i\vec{k}\ e^{-ikx}) + \vec{\epsilon}_i(\vec{k}) a_i^\dagger(\vec{k}) \cdot (-i\vec{k}\ e^{ikx} \right)$$

hvoraf

$$\vec{\epsilon}_i(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0$$

Det er denne betingelse, der sikrer, at der for hvert $\vec{k}$ kun kan findes to lineært uafhængige løsninger; derfor summation over $i = 1, 2$. Polarisationsvektorerne vil vi desuden normere, så

$$\vec{\epsilon}_i(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}_j(\vec{k}) = \delta_{ij} \tag{5.19}$$

Så gælder også **(Øvelse)**

$$\sum_{i=1}^{2} \epsilon_i^l(\vec{k}) \epsilon_i^m(\vec{k}) = \delta_{lm} - \frac{k^l k^m}{|\vec{k}|^2} \tag{5.20}$$

---

[1] Dette refererer til en "perturbativ kvantisering"; ved at benytte en gitterformulering af rum og tid kan teorien (i en "kompaktificeret" form) kvantiseres uden at bryde gauge-invarians, men det er uhyre ubekvemt for anvendelser baseret på Feynman-diagrammer.

hvor i er polarisationsindeks, medens l og m er 3-dimensionale vektorindices. Vi har noteret dem foroven udelukkende af pladshensyn.

Repræsentationen (5.17) er velkendt fra klassisk strålingsteori, hvor $a_i(\vec{k})$ og $a_i^\dagger(\vec{k})$ er komplekst konjugerede koefficienter. I den kvantiserede teori spiller de rollen som skabelses- og annihilationsoperatorer for fotoner:

$$\begin{aligned} \left[a_i(\vec{k}), a_j^\dagger(\vec{k}')\right] &= \delta_{ij}\delta_{\vec{k}\vec{k}'} \\ \left[a_i(\vec{k}), a_j(\vec{k}')\right] &= \left[a_i^\dagger(\vec{k}), a_j^\dagger(\vec{k}')\right] = 0 \end{aligned} \tag{5.21}$$

hvor som sædvanlig

$$\delta_{\vec{k}\vec{k}'} \equiv (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

For fotonantalsoperatoren gælder så

$$\left.\begin{aligned} N_i(\vec{k}) &= a_i^\dagger(\vec{k}) a_i(\vec{k}) \\ \left[N_i(\vec{k}), a_j^\dagger(\vec{k}')\right] &= \delta_{ij} a_j^\dagger(\vec{k}')\delta_{\vec{k}\vec{k}'} \\ \left[N_i(\vec{k}), a_j(\vec{k}')\right] &= -\delta_{ij} a_j(\vec{k}')\delta_{\vec{k}\vec{k}'} \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

Vi overlader til læseren at vise, at 4-impulsoperatoren for systemet kan skrives

$$P^\mu = \sum_{\vec{k},i} k^\mu N_i(\vec{k}) \qquad \text{(+ uendelig konstant)} \tag{5.23}$$

hvor

$$\sum_{\vec{k}} \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0}$$

Fotontilstande fås ved at lade skabelsesoperatorer virke på vacuumtilstanden

$$|\vec{k}, i\rangle = a_i^\dagger(\vec{k})|0\rangle \tag{5.24}$$

og disse er normeret på sædvanlig kovariant måde:

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}', j|\vec{k}, i\rangle &= \langle 0|a_j(\vec{k}')a_i^\dagger(\vec{k})|0\rangle = \langle 0|[a_j(\vec{k}), a_i^\dagger(\vec{k}')]|0\rangle \\ &= \delta_{ij}\delta_{\vec{k}\vec{k}'} \equiv \delta_{ij}(2\pi)^3 2k^0\delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \end{aligned} \tag{5.25}$$

Det er endvidere klart, at fotoner adlyder Bose-Einstein-statistik, således som vi har behandlet dem.

5.3 Fotonens kvantetal

Lad os først bestemme spinnet af en foton samt dens helicitetstilstande. Hertil skal vi undersøge feltets transformationsegenskaber under rotationer. Lad os tænke på en foton med $\vec{k} = (0, 0, k)$ langs 3-aksen. For at finde heliciteten af tilstanden $|\vec{k}, 1\rangle$ og $|\vec{k}, 2\rangle$ skal vi så undersøge virkningen af J_3, som jo er det samme som heliciteten:

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{J} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{J_3 k}{k} = J_3$$

Altså spørger vi først om feltets transformationsegenskaber under en infinitesimal rotation af størrelsen $\delta\varphi$ omkring 3-aksen.

Fra diskussionen i kap. 2.2 gælder under en rotationstransformation

$$\vec{A}'(\vec{x}') = U^\dagger(R)\vec{A}(Rx)U(R) = R\vec{A}(x)$$

hvor

$$R = \begin{bmatrix} 1 & +\delta\varphi & 0 \\ -\delta\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

og hvor $U(R)$ er den unitære operator, der udfører rotationen [2]. For en infinitesimal rotation er den på formen (jfr diskussionen i afsn. 3.8).

$$U(R) = I + iJ_3\delta\varphi$$

hvoraf

$$\vec{A}'(Rx) = \vec{A}(Rx) - i\delta\varphi[J_3, \vec{A}(Rx)]$$

Men af (5.26) fås

$$\begin{aligned} A'_1(Rx) &= A_1(x) + \delta\varphi A_2(x) \\ A'_2(Rx) &= A_2(x) - \delta\varphi A_1(x) \\ A'_3(Rx) &= A_3(x) \end{aligned}$$

hvoraf

$$\left.\begin{aligned} [J_3, A_1(Rx)] &= +iA_2(x) \\ [J_3, A_2(Rx)] &= -iA_1(x) \end{aligned}\right\} \tag{5.27}$$

Vi bruger nu planbølgeudviklerne af feltet

$$\begin{aligned} A^l(x) &= \sum_{\vec{k},i} \left[\epsilon_i^l(\vec{k})a_i(\vec{k})\ e^{-i(k^0x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \epsilon_i^l(\vec{k})a_i^\dagger(\vec{k})\ e^{+i(k_0x_0 - \vec{k}\cdot\vec{x})}\right] \\ A^l(Rx) &= \sum_{\vec{k},i} \left[\epsilon_i^l(\vec{k})a_i(\vec{k})\ e^{-i(k^0x^0 - \vec{k}\cdot(R\vec{x}))} + \text{h.c.}\right] \end{aligned} \tag{5.28}$$

(h.c. = hermitesk konjugeret). Nu er selvfølgelig $\vec{k}\cdot(R\vec{x}) = (R^{-1}\vec{k})\cdot\vec{x}$, da skalarproduktet er rotationsinvariant. Hvis vi derpå erstatter summationsvariablen $\vec{k}$ med $R\vec{k}$ (hvilket er lovligt, da $\vec{k} \to R\vec{k}$ er en orthonormal transformation), får vi

$$A^l(Rx) = \sum_{\vec{k},i} \left[\epsilon_i^l(R\vec{k})a_i(R\vec{k})\ e^{-i(k^0x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \text{h.c}\right]$$

[2] Ifølge diskussionen i kap. 2, afhænger U af en hel 4×4 *Lorentz*-transformationsmatrix. Den matrix, der hører til rotationen har triviel opførsel for så vidt angår tidsdelen.

Vi interesserer os nu for rotationer om z-aksen samt for sådanne fotontilstande, som har $\vec{k}$ langs z-aksen. For disse er $R\vec{k} \equiv \vec{k}$. Indsættes i (5.27) fås derfor for sådanne R og $\vec{k}$:

$$\begin{aligned} \sum_i \epsilon_i^1 \left[J_3, a_i^\dagger\right] &= +i \sum_i \epsilon_i^2 a_i^\dagger \\ \sum_i \epsilon_i^2 \left[J_3, a_i^\dagger\right] &= -i \sum_i \epsilon_i^1 a_i^\dagger \end{aligned}$$

men da $\vec{k} = (0,0,k)$ og derfor $\vec{\epsilon}_1 = (1,0,0)$ og $\vec{\epsilon}_2 = (0,1,0)$ fås

$$\left.\begin{aligned} \left[J_3, a_1^\dagger\right] &= +ia_2^\dagger \\ \left[J_3, a_2^\dagger\right] &= -ia_1^\dagger \end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

Disse ligninger viser, at tilstandene $|\vec{k},\ 1,2\rangle$ *ikke* svarer til tilstande med bestemt helicitet. Grunden er, at vi har valgt reelle polarisationsvektorer svarende til planpolariserede bølger. For at få helicitetstilstande må vi vælge cirkulært polariserede bølger. Vi definerer (for $\vec{k}||\hat{z}$)

$$\left.\begin{aligned} a_\pm &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(a_1 \mp ia_2) \quad , \quad a_\pm^\dagger = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger \pm ia_2^\dagger) \\ \vec{\epsilon}_\pm &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\epsilon}_1 \pm i\vec{\epsilon}_2) \quad , \quad \vec{\epsilon}_\pm^{\,*} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\epsilon}_1 \mp i\vec{\epsilon}_2) \end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

Så er

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}_1 a_1 + \vec{\epsilon}_2 a_2 &= \vec{\epsilon}_+ a_+ + \vec{\epsilon}_- a_- \qquad \text{og} \\ \vec{\epsilon}_1 a_1^\dagger + \vec{\epsilon}_2 a_2^\dagger &= \vec{\epsilon}_+^{\,*} a_+^\dagger + \vec{\epsilon}_-^{\,*} a_-^\dagger \end{aligned}$$

(5.29) kan så skrives

$$[J_3, a_\pm^\dagger] = \pm a_\pm^\dagger \tag{5.31}$$

Tilstandene $|\vec{k},\lambda\rangle = a_\lambda^\dagger|0\rangle$, $\lambda = \pm$ har derfor helicitet $= \pm 1$:

$$\begin{aligned} J_3|\vec{k},+\rangle &= J_3 a_+^\dagger|0\rangle = (J_3 a_+^\dagger - a_+^\dagger J_3)|0\rangle \qquad (J_3|0\rangle = 0) \\ &= +a_+^\dagger|0\rangle = +|\vec{k},+\rangle \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Af (5.14) kan vi finde fotonens ladningskonjugerings-kvantetal. Af

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\vec{A}(x)\mathcal{C}^{-1} &= -\vec{A}(x) \qquad \text{følger straks} \\ \mathcal{C}a_\pm^\dagger\mathcal{C}^{-1} &= -a_\pm^\dagger \end{aligned}$$

og derfor

$$\mathcal{C}|\vec{k},\pm\rangle = -|\vec{k},\pm\rangle \tag{5.32}$$

dvs fotonen har $C = -1$.

Spørgsmålet om fotonens indre paritet er mere subtilt. Anvender vi paritetsoperatoren på en fotontilstand med bestemt impuls (planbølge-tilstand), får vi en ny tilstand med modsat impuls, altså ingen egentilstand. For massive partikler kan vi løse problemet ved at gå til hvilesystemet, men det duer selvfølgelig ikke for en masseløs foton. For at få en egentilstand af paritetsoperatoren, må vi derfor se på tilstande, der er dannet som superpositioner af forskellige impulstilstande: såkaldte multipol-tilstande. For sådanne kan paritets-egenværdien nok beregnes, men det bliver i nogen grad en definitionssag hviklet bidrag vi anser for at hidrøre fra fotonens "indre" paritet.

I en gauge som vores, hvor $A^0 \equiv 0$ mens der jo altid gælder

$$\mathcal{P}\vec{A}(\vec{x},t)\mathcal{P}^{-1} = -\vec{A}(-\vec{x},t)$$

virker det måske rimeligt at tildele fotonen en indre paritet af værdien -1. Denne sædvane vil vi følge, uden at gå det tekniske apparat igennem, der kræves for at indføre multipol-formalismen. Men denne er strengt taget nødvendig for alvorligt at kunne udlede udvalgsregler baseret på paritetsinvarians.

5.4 Relativistisk kovarians og gaugeinvarians

Vores gaugebetingelser og vores valg af polarisationsvektorer har refereret til ét bestemt inertialsystem. Det er derfor ikke klart, at en behandling startende fra et andet inertialsystem vil give samme resultat for de fysiske observable, som vi senere skal lære at beregne. Der er derfor grund til at søge en eksplicit kovariant formulering. Denne giver også de simpleste praktiske regninger i de fleste tilfælde. Det er en sådan kovariant formulering, vi nu skal opstille.

De fysiske fotoner, vi har behandlet, var *transversale* i den forstand, at deres polarisationsvektor ϵ^μ havde $\epsilon^0 = 0$ og $\vec{\epsilon} \perp \vec{k}$. Vi skal nu indføre to nye rent matematiske "spøgelses-" eller "gaugefotoner". I vores inertialsystem har den ene (den skalære) $\epsilon^0 \neq 0$, $\vec{\epsilon} = \vec{0}$, og den anden (den longitudinale) har $\epsilon^0 = 0$ og $\vec{\epsilon} \| \vec{k}$. Disse "fotoners" rolle er udelukkende at gøre formalismen eksplicit kovariant. Deres egenskaber vælger vi omhyggeligt, sådan at de *(a)* ikke giver anledning til nogen ændring i de observable størrelser, og *(b)* gør de praktiske regninger og formalismen mere elegant.

For at motivere behandlingen kan vi først tænke på en vilkårlig proces, i hvilken der skabes en fysisk, transversal foton med 4-impuls k^μ og polarisationsvektor ϵ^μ. Som vi siden skal se, er amplituden, M, herfor lineær i ϵ^μ :

$$M = M_\mu \epsilon^\mu$$

hvor koefficientamplituden M_μ er uafhængig af fotonens polarisationstilstand. Overgangssandsynligheden er så bilineær i ϵ_μ (pånær kompleks konjugering):

$$|M|^2 = M_\mu M_\nu^* \epsilon^\mu \epsilon^{\nu *}$$

Hvis vores eksperimentelle opstilling ikke kan skelne fotoner med forskellig helicitet, er antallet af begivenheder givet ved

$$\begin{aligned} |M(1)|^2 + |M(2)|^2 &= M_\mu M_\nu^* (\epsilon_1^\mu \epsilon_1^{\nu *} + \epsilon_2^\mu \epsilon_2^{\nu *}) = M_\mu M_\nu^* P_\perp^{\mu\nu} \\ P_\perp^{\mu\nu} &\equiv \epsilon_1^\mu \epsilon_1^{\nu *} + \epsilon_2^\mu \epsilon_2^{\nu *} \end{aligned}$$

Vi skal siden se, at vores regneregler for M_μ automatisk gør denne størrelse til en 4-vektor. Hvis derfor "polarisationstensoren" $P_\perp^{\mu\nu}$ *var* en Lorentz-tensor, ville antallet af begivenheder eksplicit være invariant. Men $P_\perp^{\mu\nu}$ er absolut ikke en tensor, som den her er defineret. Det er dette forhold vi nu skal råde bod på.

Som sagt indfører vi to "matematiske fotoner": en skalær med polarisationsvektor ϵ_0^μ og en longitudinal med polarisationsvektor ϵ_3^μ. *Men vi vælger nu produktionssandsynligheden for den skalære foton negativ og af samme størrelse, som produktionssandsynligheden for den longitudinale.* Dvs at alle sandsynlighedsudtryk bliver forøget med beløbet

$$|M(3)|^2 - |M(0)|^2 = 0$$

som vi skriver

$$-M_\mu M_\nu^*(\epsilon_3^\mu \epsilon^{\nu 3^*} + \epsilon_0^\mu \epsilon^{\nu 0^*})$$

hvor vi, foruden polarisationsvektorerne ϵ_1^μ og ϵ_2^ν for fotoner langs z-aksen:

$$\epsilon_1^\mu = (0,1,0,0) \quad \text{og} \quad \epsilon_2^\mu = (0,0,1,0)$$

har indført de to nye

$$\epsilon_3^\mu = (0,0,0,1) \quad \text{og} \quad \epsilon_0^\mu = (1,0,0,0)$$

Endvidere har vi vedtaget at behandle polarisationsindices foroven og forneden efter Lorentz-metrik:

$$\epsilon^{\mu\rho} = g^{\rho\rho'} \epsilon_{\rho'}^\mu$$

Så kan vores tidligere udtryk for sandsynligheden for at observere en foton uden hensyn til dens polarisation skrives vha [3]

$$P_\perp^{\mu\nu} = -\epsilon_1^\mu \epsilon^{\nu 1^*} - \epsilon_2^\mu \epsilon^{\nu 2^*}$$

Det er også klart, at vi har (summation over ρ)

$$\epsilon_\rho^\mu \epsilon^{\nu\rho} = g^{\mu\nu} \tag{5.33}$$

og vi kan skrive for den modificerede polarisationstensor:

$$P^{\mu\nu} = -\epsilon_\rho^\mu \epsilon^{\nu\rho} = -g^{\mu\nu} \tag{5.34}$$

Vi har hermed opnået to ting: $P^{\mu\nu}$ er blevet en tensor, og samtidig har vi automatisk fået en forbindelse mellem kravet om kovarians (Lorentz-metrik) og minustegnet foran "sandsynligheden" for produktion af skalære fotoner.

Men hvordan kan vi sikre, at $|M(3)|^2 = |M(0)|^2$ altid? Dette beror på, at det er en følge af gaugeinvarians, at

$$M_\mu \cdot k^\mu = 0 \tag{5.35}$$

Vi kan foreløbigt blot bemærke det plausible heri som følger: En gauge-transformation af gaugepotentialet:

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \chi$$

modsvares for fotoner, dvs i impulsrummet, løseligt af

$$\epsilon^\mu \to \epsilon^\mu + k^\mu \chi$$

[3] Bemærk at vores brug af kompleks konjugering af ϵ'erne er overflødig for plan-polariserede fotoner, da ϵ'erne så er reelle. For cirkulært polariserede fotoner er ϵ'erne komplekse, og kompleks konjugering nødvendig.

At en amplitude er gauge-*invariant* må så betyde, at hvis erstatter ϵ^μ med fotonens 4-impuls, k^μ, får vi 0. Også dette resultat skal vi siden vende tilbage til.

Men lad os nu se, hvad (5.35) betyder for en foton langs z-aksen, hvor $k^\mu = (k, 0, 0, k)$:

$$k(M_0 + M_3) = 0 \quad \text{eller} \quad M_0 = -M_3$$

som sikrer os, at $|M(3)|^2 - |M(0)|^2 = 0$.

Hermed har vi omskrevet vores ikke-kovariante formalisme til én, der er kovariant, uden at ændre på de fysiske forudsigelser i det inertialsystem, hvor kvantiseringen blev udført.

Vi kan endelig nedskrive vores 4-potential inklusive de ufysiske frihedsgrader (bemærk at $k^2 = 0$ i summen)

$$A^\mu(x) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\nu=0}^{3} \left[\epsilon_\nu^\mu(\vec{k}) a^\nu(\vec{k})\, e^{-ikx} + \epsilon_\nu^{\mu*}(\vec{k}) a^{\nu\dagger}(\vec{k}) e^{ikx}\right] \tag{5.36}$$

Her er $a^1(k)$ og $a^2(k)$ de samme som vores tidligere operatorer a_1 og a_2. De ny operatorer adlyder ombytningsrelationerne:

$$[a^\mu(\vec{k}), a^{\nu\dagger}(\vec{k}\,')] = -g^{\mu\nu}\delta_{\vec{k}\,\vec{k}\,'} \tag{5.37}$$

For $\mu, \nu = 1, 2$ stemmer disse overens med (5.21). For $\mu = \nu = 3$ haves en sædvanlig kommutator mellem skabelses- og annihilationsoperatorer:

$$[a^3(\vec{k}), a^{3\dagger}(\vec{k}\,')] = +\delta_{\vec{k}\,\vec{k}\,'}$$

For $\mu = \nu = 0$ derimod har vi

$$[a^0(\vec{k}), a^{0\dagger}(\vec{k}\,')] = -\delta_{\vec{k}\,\vec{k}\,'}$$

Den ejendommelige konsekvens heraf er, at hvis vi "skaber en skalær foton":

$$|0, \vec{k}\rangle = a^{0\dagger}(\vec{k})|0\rangle$$

så får vi for normen af denne tilstand:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{k}, 0|0, \vec{k}\rangle &= \langle 0|a^0(\vec{k}) a^{0\dagger}(\vec{k})|0\rangle \\
&= \langle 0|[a^0(\vec{k}), a^{0\dagger}(\vec{k})]|0\rangle \\
&= -1 \qquad\qquad (!!!)
\end{aligned}$$

Dette viser, at vi ikke har at gøre med et sædvanligt Hilbert-rum. Minustegnet er præcist, hvad vi har brug for til at lade den skalære fotons bidrag til sandsynligheden blive negativ. Den matematiske formalisme fungerer perfekt, men det er ikke muligt at tilskrive den en fysisk sandsynligheds-fortolkning.

Under en Lorentz-transformation lader vi nu A^μ transformere som en 4-vektor. I det nye inertialsystem er gaugebetingelsen $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ almindeligvis *ikke* opfyldt. De fysiske fotoner er derfor *ikke* simpelthen dem med polarisationsvektorer ϵ_1^μ og ϵ_2^μ. Det er derfor *ikke* rigtigt, at ϵ_0^μ og ϵ_3^μ udelukkende beskriver ufysiske gaugefotoner. I dette nye inertialsystem er det visse nye linearkombinationer, der er fysiske og andre, der er ufysiske. Alt dette behøver vi ikke at bekymre os om. Vi skal blot benytte den kovariante polarisationstensor

$$P^{\mu\nu} = -\epsilon^{\mu}_{\rho}\epsilon^{\nu\rho^*} = -g^{\mu\nu} \tag{5.38}$$

samt sikre os, at gaugeinvarianskravet

$$M_\mu k^\mu = 0 \tag{5.39}$$

er opfyldt.

Valget (5.38) kaldes Feynman-gauge-valget. Andre valg er mulige (og i visse situationer nyttige). *Alle* andre valg viser sig at give anledning til udtryk af formen

$$P^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} + k^\mu a^\nu + k^\nu a^\mu + bk^\mu k^\nu$$

hvor a er en 4-vektor, som muligvis afhænger af kvantiserings-inertialsystemet. Pga betingelsen (5.39) ser vi, at i udtryk for *fysiske observable:*

$$M_\mu M_\nu^* P^{\mu\nu}$$

spiller disse ekstra gaugeled ingen som helst rolle. Vi skal komme tilbage hertil i afsn. 5.10.

5.5 Kovariant perturbationsteori

Vi begynder med at minde om den velkendte formalisme, som bruges til behandling af "tidsafhængig perturbationsteori". I vores tilfælde kommer tidsafhængigheden ind derved, at vi forestiller os en begyndelsessituation med *frie partikler* i så stor afstand fra hinanden, at de ikke vekselvirker. Vekselvirkningen er aktiv i et kort tidsinterval omkring kollisionen, og sluttilstanden antages igen at bestå af frie partikler i stor indbyrdes afstand.

Det fysiske system, som vi især tænker på i dette kapitel, er systemet af et fermionfelt og et elektromagnetisk strålingsfelt, som udvikler sig efter QED-Lagrange-funktionen (5.9). Men i vores behandling refererer vi foreløbig blot til et helt generelt fysisk system med en Hamilton-funktion

$$H = H_0 + H_I \tag{5.40}$$

der kan opdeles bekvemt i en "fri" del H_0 og en "vekselvirkningsdel" H_I. Vi har allerede behandlet de frie Hamilton-funktioner for Dirac-feltet og for fotonfeltet og set, at de kunne skrives på formen

$$\begin{aligned} H_0(\text{fermion}) &= \sum_{\vec{p},s} [N(\vec{p},s) + \overline{N}(\vec{p},s)]p_0 \\ H_0(\text{foton}) &= \sum_{\vec{k},\lambda} N(\vec{k},\lambda)k_0 \end{aligned} \tag{5.41}$$

hvor $N(\vec{p},s)$ og $\overline{N}(\vec{p},s)$ er antalsoperatorerne for fermioner og antifermioner med masse m og $p_0 = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$, medens $N(\vec{k},\lambda)$ er antalsoperatoren for fotoner med helicitet λ og $k_0 = |\vec{k}|$. Disse Hamilton-funktioner følger af de to første (frie) led i (5.9). Sidste led i (5.9) er vekselvirkningslagrangetætheden. Vi antager nu, at denne *ikke* indeholder nogen afledet af feltet. Denne antagelse er rent teknisk og formalismen kan (med besvær) gennemføres uden den. Men det er åbenbart, at antagelsen er opfyldt i QED. I så fald er de kanonisk konjugerede variables form uafhængig af, om vekselvirkningen er tilstede eller ej. Det gælder så, at Hamilton-tætheden $\mathcal{H}_I$ for vekselvirkningsdelen simpelthen er

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I \tag{5.42}$$

og

$$H_I = \int d^3x \mathcal{H}_I \tag{5.43}$$

Lad os nu betragte en vis tilstand af vores fysiske system i Schrödinger-billedet $|t\rangle_S$, hvor den jo er tidsafhængig. Vi udfører nu den kanoniske transformation til vekselvirkningsbilledet på sædvanlig måde:
Schrödinger-ligningen i Schrödinger-billedet lyder

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_S = (H_0 + H_I)|t\rangle_S \tag{5.44}$$

Tilstandene i vekselvirkningsbilledet $|t\rangle_V$ defineres ved

$$|t\rangle_V = e^{itH_0}|t\rangle_S$$

eller

$$|t\rangle_S = e^{-itH_0}|t\rangle_V$$

hvorefter (5.44) bliver

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_S = H_0\, e^{-itH_0}|t\rangle_V + i\, e^{-itH_0}\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_V = (H_0 + H_I)e^{-itH_0}|t\rangle_V$$

Heraf fås ved at virke med e^{+itH_0}

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_V = e^{itH_0}H_I\, e^{-itH_0}|t\rangle_V \equiv H_I(t)|t\rangle_V \tag{5.45}$$

hvor vi har defineret vekselvirkningshamiltonfunktionen i vekselvirkningsbilledet $H_I(t)$, hvorimod H_I er den tilsvarende tidsuafhængige operator i Schrödingerbilledet. Tænker vi os H_I givet som et polynomium i Schrödinger-operatorer, ser vi, at $H_I(t)$ er det samme polynomium af de tilsvarende vekselvirkningsbilledeoperatorer.

Schrödinger-ligningen (5.45) løses formelt vha tidsudviklingsoperatoren $U(t, t_0)$:

$$|t\rangle_V = U(t, t_0)|t_0\rangle_V \tag{5.46}$$

med

$$U(t, t) = 1 \tag{5.47}$$

Denne operator er særdeles interessant for os, idet dens "grænseværdi" - passende defineret for $t_0 \to -\infty$ og $t \to +\infty$ - netop er S-matricen, som beskriver overgangen mellem tilstande, der er simpelt specificeret hhv i en fjern fortid og i en fjern fremtid.

Af (5.46)og (5.45) fås straks

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H_I(t)U(t, t_0) \tag{5.48}$$

Løsningen til denne ligning med randbetingelsen (5.47) kan umiddelbart nedskrives på formen

$$U(t,t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} dt' H_I(t')U(t',t_0) \tag{5.49}$$

Hvis $H_I(t)$ er "lille" i en passende forstand, fx ved at "koblingskonstanten" e i $\mathcal{L}_I = -e\overline{\psi}\not{A}\psi$ er lille, så kan (5.49) løses ved iteration. Vi sætter $t_0 \to -\infty$ og får så de successive approksimationer

$$\begin{aligned} U^{(0)}(t,-\infty) &= 1 \\ U^{(1)}(t,-\infty) &= 1 - i\int_{-\infty}^{t} dt' H_I(t')U^{(0)}(t',-\infty) \\ &= 1 - i\int_{-\infty}^{t} dt' H_I(t') \\ U^{(2)}(t,-\infty) &= 1 - i\int_{-\infty}^{t} dt' H_I(t') + (-i)^2 \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' H_I(t')H_I(t'') \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.50}$$

Vi indfører nu det vigtige begreb: Det tidsordnede produkt af to eller flere operatorer:

$$T(A_1(t_1)A_2(t_2)) = \begin{cases} A_1(t_1)A_2(t_2) & \text{når} \quad t_1 > t_2 \\ A_2(t_2)A_1(t_1) & \text{når} \quad t_2 > t_1 \end{cases} \tag{5.51}$$

(Denne definition er kun nyttig, når A'erne er "Bose-operatorer". Det er netop tilfældet med Hamilton-funktionen: I QED består den af to Fermi-operatorer og en Bose-operator:

$$H_I = e\int d^3x\, \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$$

For rene Fermi-operatorer defineres det tidsordnede produkt med et ekstra minustegn

$$T\left(F_1(t_1)F_2(t_2)\right) = \begin{cases} F_1(t_1)F_2(t_2) & \text{for} \quad t_1 > t_2 \\ -F_2(t_2)F_1(t_1) & \text{for} \quad t_2 > t_1 \end{cases} \tag{5.52}$$

men vi får ikke brug herfor.)

Vi kan nu skrive

$$\begin{aligned} U(t,-\infty) &= 1 - i\int_{-\infty}^{t} dt' H_I(t') + (-i)^2\int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' H_I(t')H_I(t'') + \dots \\ &+ (-i)^n \int_{-\infty}^{t} dt^{(1)} \int_{-\infty}^{t^{(1)}} dt^{(2)} \dots \int_{-\infty}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} H_I(t^{(1)})H_I(t^{(2)}) \cdot \ldots \cdot H_I(t^{(n)}) \\ &+ \dots \end{aligned} \tag{5.53}$$

I integranden i sidste led er tidsargumenterne eksplicit ordnede: $t^{(1)} > t^{(2)} > t^{(3)} > \dots > t^{(n)}$. Vi kan derfor uden videre erstatte integranden med

$$T\{H_I(t^{(1)})\dots H_I(t^{(n)})\}$$

men denne funktion er klart symmetrisk i de variable $t^{(i)}$. Vi kan derfor anvende følgende trivielle teorem, som gælder for en funktion $f(x_1,\dots,x_n)$, der er symmetrisk i alle sine variable:

$$\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} dx_n\, f(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n!}\int_a^b dx_1 \int_a^b dx_2 \dots \int_a^b dx_n\, f(x_1,\dots,x_n)$$

(Bevis: **Øvelse.** Hjælp: For $n > 2$: tænk på permutationer af $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ som liggende i intervallet $[a, b]$).

Ved hjælp heraf får vi så

$$\begin{aligned} U(t,-\infty) &= 1 - i\int_{-\infty}^{t} dt'\, H_I(t') + \frac{1}{2}(-i)^2\int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t} dt'' T\{H_I(t')H_I(t'')\}\ldots \\ &+ (-i)^n\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{t} dt^{(1)}\int_{-\infty}^{t} dt^{(2)}\cdots\int_{-\infty}^{t} dt^{(n)} T\{H_I(t^{(1)})H_I(t^{(2)})\ldots H_I(t^{(n)})\} \\ &+ \ldots \end{aligned} \tag{5.54}$$

og endelig får vi *Dyson's formel for S-matricen*, idet vi benytter, at

$$\begin{aligned} H_I(t) &= \int d^3x\, \mathcal{H}_I(\vec{x}, t) \\ S &= U(\infty, -\infty) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \ldots\ldots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(x_1)\ldots\mathcal{H}_I(x_n)\} \end{aligned} \tag{5.55}$$

Idet vi husker, at $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I$, kan vi også skrive dette simpelt og kompakt som

$$S = T\exp\{+i\int d^4x\ \mathcal{L}_I(x)\} \tag{5.56}$$

der skal forstås på den måde, at eksponentialfunktionen skal udvikles i sin sædvanlige Taylor-række, derpå skal $(\int d^4x\ \mathcal{L})^n$ erstattes med et produkt af n 4-dimensionale integraler, og endelig skal T-operatortegnet virke på integranden.

5.6 Eksempel: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

I en systematisk fremstilling ville vi nu analysere matrikselementer af T-produkter af feltoperatorer vha det sk Wick's teorem. Dette teorem fører derpå til opstilling af Feynman-reglerne. Her vil vi indskrænke os til at studere ét simpelt eksempel i detalje: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ i laveste ikke-trivielle orden i perturbationsudviklingen. Vi vil bevise Feynman-reglerne for denne ene proces og derpå i næste paragraf anføre Feynman-reglerne generelt.

Det fysiske billede af processen (i laveste orden) vil vise sig at kunne beskrives bekvemt ved *Feynman-diagrammet*, fig. (5.1). I en "fjern" fortid bevæger en elektron og en positron sig mod hinanden med 4-impulser p_-^μ og p_+^μ. Omkring "kollisionstidspunktet" annihilerer de og bliver til en "virtuel foton, γ" med 4-impuls

$$k^\mu = p_-^\mu + p_+^\mu$$

Denne foton er *virtuel* i den forstand, at $k_\mu k^\mu \neq 0$. Faktisk er

$$k^2 \equiv k_\mu k^\mu = (p_- + p_+)^2 = (\text{totale c.m.-energi})^2$$

som er en stor positiv størrelse i typiske moderne eksperimenter. Som eksempel kunne vi tænke på en energi, PETRA-acceleratoren ved DESY (Hamborg) kunne præstere i 1980: $E_{beam} = 19$ GeV, svarende til

$$k^2 = (2\cdot 19GeV)^2 = 1444GeV^2$$

Iflg. kvantemekanikkens usikkerhedsrelationer er det muligt for en foton at være så langt væk fra masseskallen i et tidsinterval, der er af størrelsen

$$\Delta t \sim \frac{1}{\Delta E} \sim \frac{1}{38GeV} \sim 1.7 \times 10^{-26}\text{sek} \tag{5.57}$$

Hertil svarer også et rumligt område af størrelsen ($c = \hbar = 1$)

$$\Delta R \sim c \cdot \Delta t \sim \frac{1}{38GeV} \sim 5 \cdot 10^{-18}m = 5 \times 10^{-3}fm \tag{5.58}$$

Hvis processen $e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$ eksperimentelt opfører sig, som vi regner den ud efter QED, kan vi derfor sige, at QED er testet ned til så små afstande og tider.

Går vi til de højeste LEP-energier ved CERN (1992), svarende til massen af Z^0-partiklen, ca. 90 GeV, vil vi dels se *afvigelser* fra QED (endda yderst drastiske afvigelser, svarende til eksistensen af Z^0), dels også at disse afvigelser er beskrevet perfekt (inden for måleusikkerheden) af GSW-teorien (kap. 8).

Vi kan også udtrykke det på den måde, at elektroner, positroner, myoner og fotoner opfører sig som punktformede, strukturløse elementære partikler i den forstand, at de beskrives ved et lokalt felt, som er en funktion af begivenhedspunkter (ikke områder). Grænsen for disse partiklers indre størrelse, svarende til Z^0-massen er ca. 2×10^{-3} fm, eller ca. 2 promille af protonens størrelse!

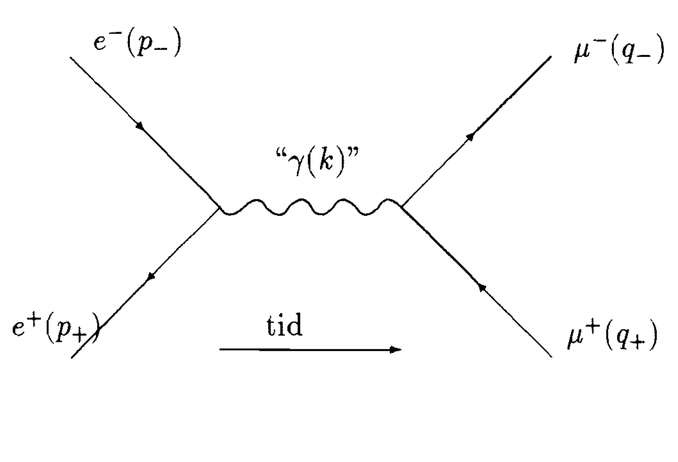
Lad os nu gå tilbage til fig. (5.1). Efter at den virtuelle foton har levet i tiden af størrelsesordenen (5.57), vil den "materialisere" sig til fysiske partikler. Det kunne være til elektron-positronpar eller kvark-antikvarkpar, men nu spørger vi altså om amplituden for, at sluttilstanden er et $\mu^+\mu^-$-par med specificerede 4-impulser $q_+{}^\mu$ og $q_-{}^\mu$ og specificerede spintilstande σ_+ og σ_- ($= \pm 1/2$). Tilsvarende antages de indkomne partikler e^- og e^+ at være i spintilstande s_- og s_+.

Vi søger altså et udtryk for S-matrikselementet

$$\langle \mu^-(q_-, \sigma_-), \mu^+(q_+, \sigma_+)|S|e^-(p_-, s_-), e^+(p_+, s_+)\rangle \equiv S_{fi} \tag{5.59}$$

Det er bekvemt at indføre T-amplituden eller den invariante Feynman-amplitude ved (jfr afsn. 1.2)

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|i\rangle + i(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)\langle f|T|i\rangle \tag{5.60}$$



Figur 5.1: Feynman-diagram for $e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$ til laveste orden i finstrukturkonstanten.

hvor $|i\rangle$ og $|f\rangle$ er begyndelses- og sluttilstande, medens P_f og P_i er de totale 4-impulser i slut- og begyndelsestilstanden, altså her

$$P_i{}^\mu = p_+{}^\mu + p_-{}^\mu \quad , \quad P_f{}^\mu = q_+{}^\mu + q_-{}^\mu$$

Vha T-matrikselementet kan det differentielle tværsnit skrives (i c.m., jfr. (1.123))

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{c.m.}} = \frac{p_f}{p_i}\left|\frac{\langle f|T|i\rangle}{8\pi\sqrt{s}}\right|^2 \tag{5.61}$$

hvor $d\Omega_{c.m.}$ er et rumvinkelelement for én af de udgående to partikler; p_f og p_i er de numeriske værdier af hhv slut-3-impulsen og begyndelses-3-impulsen, og $\sqrt{s}$ er den totale energi i c.m. systemet, altså

$$s = k^2$$

5.6.1 2. ordens perturbationsteori

Vi vil nu bruge Dyson's formel (5.56) til at beregne S-matrikselementet (5.59) og bla se, at et simpelt udtryk for $\langle f|T|i\rangle$ hermed fremkommer. For $\mathcal{L}_I$ tager vi

$$\mathcal{L}_I = -e\overline{\psi}_e \not{A}\psi_e - e\overline{\psi}_\mu \not{A}\psi_\mu \tag{5.62}$$

hvor $\psi_e(x)$ og $\psi_\mu(x)$ er Dirac-felter for hhv elektroner (og positroner) og for myoner.

Vi får for de tre første led i (5.56)

$$S = 1 + i\int d^4x\mathcal{L}_I + \frac{(i)^2}{2}\int d^4x\, d^4y\; T\{\mathcal{L}_I(x)\mathcal{L}_I(y)\} \tag{5.63}$$

Det første led svarer til det første led i (5.60) og beskriver amplituden for, at der ingen vekselvirkning har fundet sted. Det bidrager for det første aldrig til T-amplituden, og for det andet har det selvfølgelig ingen matrikselementer mellem vores e^+e^--begyndelsestilstand og vores $\mu^+\mu^-$-sluttilstand. Andet led bidrager heller ikke til de matrikselementer, vi studerer: $A_\mu(x)$-feltets annihilationsoperatorer vil give 0, når de virker på begyndelsestilstanden (som ikke indeholder nogen foton), og dets skabelsesoperatorer vil af samme grund give 0, når de virker på sluttilstanden.

Første ikke-trivielle bidrag får vi af 3. led i (5.63). Vi skriver

$$\begin{aligned}\langle\mu^-\mu^+|S|e^-e^+\rangle \;\simeq\;& -\frac{1}{2}e^2\langle\mu^-\mu^+|\int d^4x\, d^4y\\ & T\{(\overline{\psi}_e(x)\not{A}(x)\psi_e(x) + \overline{\psi}_\mu(x)\not{A}(x)\psi_\mu(x))\\ \cdot\;& (\overline{\psi}_e(y)\not{A}(y)\psi_e(y) + \overline{\psi}_\mu(y)\not{A}(y)\psi_\mu(y))\}|e^-e^+\rangle\end{aligned} \tag{5.64}$$

Integrandens led af formen $\overline{\psi}_e(x)\not{A}(x)\psi_e(x)\overline{\psi}_e(y)\not{A}(y)\psi_e(y)$ vil give 0, da det ikke skaber nogensomhelst μ-excitationer ($\mu^\pm$ partikler), og derfor er orthogonal på sluttilstanden. Tilsvarende vil leddet med fire myon-operatorer give 0. Tilbage bliver to led med to e-operatorer og to μ-operatorer. Deres sum er symmetrisk i x og y, så vi får

$$\langle\mu^-\mu^+|S|e^-e^+\rangle = -e^2\int d^4x\, d^4y\langle\mu^-\mu^+|T\{\overline{\psi}_e(x)\not{A}(x)\psi_e(x)\overline{\psi}_\mu(y)\not{A}(y)\psi_\mu(y)\}|e^-e^+\rangle$$

Dette udtryk skal vi nu udregne, idet vi bruger de ombytningsrelationer, som gælder for frie felter - det er jo idéen i perturbationsudviklingen. Specielt vil vi udnytte, at $\psi_e(x)$ *kommuterer* med $A_\mu(x)$ og $A_\mu(y)$ og *antikommuterer* med ψ_μ og $\overline{\psi}_\mu$; tilsvarende for $\overline{\psi}_e, \psi_\mu$ og $\overline{\psi}_\mu$. Når vi derfor først betragter virkningen af $\overline{\psi}_e(x)$ og $\psi_e(x)$ i ovenstående matrikselement, ser vi, at det er den samme som i matrikselementet

$$\int d^4x\ A_\mu(x)\langle 0|\overline{\psi}_e(x)\gamma^\mu\psi_e(x)|e^-(p_-,s_-),e^+(p_+,s_+)\rangle \tag{5.65}$$

Vi bruger nu [4]

$$\psi_e(x) = \sum_{\vec{p},s}[u_s(\vec{p})b(\vec{p},s)e^{-ipx} + v_s(\vec{p})d^\dagger(\vec{p},s)e^{ipx}]$$

og

$$\overline{\psi}_e(x) = \sum_{\vec{p},s}[\overline{u}_s(\vec{p})b^\dagger(\vec{p},s)e^{ipx} + \overline{v}_s(\vec{p})d(\vec{p},s)e^{-ipx}]$$

I matrikselementet (5.65) er det kun annihilationsoperatorerne, som kan bidrage, og vi får

$$\int d^4x\ A_\mu(x)\sum_{\vec{p},s,\vec{p}\,',s'}\overline{v}_{s'}(\vec{p}\,')\gamma^\mu u_s(\vec{p})e^{-ix(p+p')}\langle 0|d(\vec{p}\,',s')b(\vec{p},s)|e^-(p_-,s_-),e^+(p_+,s_+)\rangle$$

Nu er

$$|e^-(p_-,s_-),\ e^+(p_+,s_+)\rangle = b^\dagger(\vec{p}_-,s_-)d^\dagger(\vec{p}_+,s_+)|0\rangle$$

idet vi bemærker, at rækkefølgen af fermionerne har betydning for fortegnet: Den partikel, som står længst til højre, er skabt først. Men

$$\langle 0|d(\vec{p}\,',s')b(\vec{p},s)b^\dagger(\vec{p}_-,s_-)d^\dagger(\vec{p}_+,s_+)|0\rangle = \langle 0|d(\vec{p}\,',s')\{b(\vec{p},s),b^\dagger(\vec{p}_-,s_-)\}d^\dagger(\vec{p}_+,s_+)|0\rangle$$

idet nemlig det ekstra led giver 0, når $b^\dagger$ antikommuteres gennem d og virker på $\langle 0|$. Nu er

$$\{b(\vec{p},s),b^\dagger(\vec{p}_-,s_-)\} = \delta_{ss_-}\delta_{\vec{p}\vec{p}_-}$$

og idet vi bruger samme trick på $dd^\dagger$-leddet, får vi

$$\begin{aligned}
&\int d^4x\ A_\mu(x)\sum_{\vec{p},s,\vec{p}\,',s'}\overline{v}_{s'}(\vec{p}\,')\gamma^\mu u_s(\vec{p})\delta_{ss_-}\delta_{\vec{p}\vec{p}_-}\delta_{s's_+}\delta_{\vec{p}\,'\vec{p}_+}e^{-ix(p+p')}\\
= &\int d^4x\ A_\mu(x)e^{-ix(p_-+p_+)}\overline{v}_{s_+}(\vec{p}_+)\gamma^\mu u_{s_-}(\vec{p}_-)\\
= &\int d^4x\ A_\mu(x)e^{-ixP_i}\overline{v}_{s_+}(\vec{p}_+)\gamma^\mu u_{s_-}(\vec{p}_-)
\end{aligned} \tag{5.66}$$

En fuldstændig tilsvarende behandling af μ-feltet giver

$$+\int d^4y\ A_\nu(y)\ e^{+iyP_f}\overline{u}_{\sigma_-}(\vec{q}\,_-)\gamma^\nu v_{\sigma_+}(\vec{q}\,_+)$$

For det samlede S-matrikselement finder vi så

$$\begin{aligned}
S_{fi} = &- e^2\overline{v}_{s_+}(\vec{p}_+)\gamma^\mu u_{s_-}(\vec{p}_-)\overline{u}_{\sigma_-}(\vec{q}\,_-)\gamma^\nu v_{\sigma_+}(\vec{q}\,_+)\\
&\cdot\int d^4x\ d^4y\ e^{-ixP_i+iyP_f}\langle 0|T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\}|0\rangle
\end{aligned} \tag{5.67}$$

[4] b'erne og d'erne skulle her egentlig have passende e-indices på sig for at vise, at talen er om elektronfelt-operatorer. Tilsvarende for myonfelt-operatorer. Vi søger at simplificere notationen i håb om at undgå misforståelser

5.6.2 Fotonpropagatoren

Det sidste dobbelt-integral er stort set fotonpropagatoren (se nedenfor), og vi skal nu udregne dens værdi. Matrikselementet beskriver en situation, hvor en foton skabes på stedet $\vec{y}$ til tiden y_0 (hvis $y_0 < x_0$) og derpå annihileres på stedet $\vec{x}$ til tiden x_0 (for $x_0 < y_0$ ombyttes skabelse og annihilation). Det er dette fænomen, som i Feynman-diagrammet (5.1) er beskrevet ved fotonlinjen (bølgelinjen), der forbinder de to punkter. Vi ser, at den fulde amplitude fås ved at summere (dvs integrere) over alle muligheder, for at denne skabelse og annihilation kan forekomme. Amplituden indeholder desuden en faktor, som beskriver amplituderne, for at e^+e^- annihileres under skabelse af den virtuelle foton:

$$e\overline{v}_{s_+}(\vec{p}_+)\gamma^\mu u_{s_-}(\vec{p}_-)$$

samt en faktor, der beskriver amplituden, for at fotonen annihileres under skabelse af et μ-par:

$$e\overline{u}_{\sigma_-}(\vec{q}_+)\gamma^\nu v_{\sigma_+}(\vec{q}_+)$$

Vi udregner nu fotonpropagatoren, idet vi benytter ($k^2 = 0$)

$$A^\mu(x) = \sum_{\vec{k}} \left[\epsilon^\mu_\rho(\vec{k})a^\rho(\vec{k})\, e^{-ikx} + \epsilon^{\mu^*}_\rho(\vec{k})a^{\rho^\dagger}(\vec{k})\, e^{+ikx}\right]$$

og

$$[a^\rho(\vec{k}), a^{\sigma^\dagger}(\vec{k}\,')] = -g^{\rho\sigma}\delta_{\vec{k}\vec{k}\,'}$$

Først bruger vi translationsinvarians til at skrive

$$\langle 0|T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\}|0\rangle = \langle 0|T\{A_\mu(x-y)A_\nu(0)\}|0\rangle$$

og derefter skifter vi variable fra (x, y) til (z, y), hvor $z \equiv x - y$:

$$\begin{aligned} &\int d^4z\; d^4y\; e^{-iP_iz}\; e^{iy(P_f-P_i)}\langle 0|T\{A_\mu(z)A_\nu(0)\}|0\rangle \\ =\; & (2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)\int d^4z\; e^{-iP_iz}\langle 0|T\{A_\mu(z)A_\nu(0)\}|0\rangle \end{aligned}$$

der viser, at der i processen er total 4-impulsbevarelse som en følge af translationsinvarians, jfr. (5.60). Fra (5.60) finder vi så også

$$i\langle f|T|i\rangle = -e^2\overline{v}_{s^+}(\vec{p}_+)\gamma^\mu u_{s^-}(\vec{p}_-)\overline{u}_{\sigma_-}(\vec{q}_-)\gamma^\nu v_{\sigma_+}(\vec{q}_+)D_{\mu\nu}(P_i)$$

hvor

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(P_i) &= \int d^4z\; e^{-iP_iz}\langle 0|T\{A_\mu(z)A_\nu(0)\}|0\rangle \\ &\equiv \int d^4z\; e^{-iP_iz}D_{\mu\nu}(z) \end{aligned} \tag{5.68}$$

og hvor vi har indført propagatoren i konfigurationsrummet $D_{\mu\nu}(z)$ og i impulsrummet, $D_{\mu\nu}(P_i)$. Vi skriver nu

$$\langle 0|T\{A_\mu(z)A_\nu(0)\}|0\rangle = \theta(z_0)\langle 0|A_\mu(z)A_\nu(0)|0\rangle + \theta(-z_0)\langle 0|A_\nu(0)A_\mu(z)|0\rangle \tag{5.69}$$

hvor θ-funktionen

$$\theta(z_0) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad z_0 > 0 \\ 0 & \text{for} \quad z_0 < 0 \end{cases}$$

har samme virkning som T-produktet. Af planbølgeudviklingen for fotoner har vi så

$$\begin{aligned} \langle 0|A_\mu(z)A_\nu(0)|0\rangle &= \sum_{\substack{\vec{k},\vec{k}\,' \\ \rho,\rho'}} \epsilon_\mu^{\rho'}(\vec{k}\,')e^{-ik'\cdot z}\epsilon_\nu^{\rho *}(\vec{k})\ e^{+ik\cdot 0}\langle 0|a_{\rho'}(\vec{k}\,')a_\rho^\dagger(\vec{k})|0\rangle \\ &= \sum_{\substack{\vec{k},\vec{k}\,' \\ \rho,\rho'}} \epsilon_\mu^{\rho'}(\vec{k}\,')\epsilon_\nu^{\rho *}(\vec{k})e^{-ik'z}(-g_{\rho'\rho})\delta_{\vec{k},\vec{k}\,'} \\ &= \sum_{\vec{k}} e^{-ikz}(-g_{\mu\nu}) \equiv -g_{\mu\nu}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}e^{-i\omega z^0+i\vec{k}\cdot\vec{z}} \end{aligned} \tag{5.70}$$

hvor vi har benyttet (5.33), og hvor $\omega \equiv |\vec{k}|$.

Dette udtryk skal vi nu indsætte i (5.69), men desuden behøver vi følgende repræsentation for θ-funktionen

$$\theta(t) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{2\pi}\frac{i}{u+i\epsilon}e^{-iut} \tag{5.71}$$

At denne formel er korrekt ses let således: For $t > 0$ kan vi lukke integrationsvejen med en stor halvcirkel i den *nedre* komplekse halvplan i u-planen, thi her er, idet $u = u_R + iu_I$ med u_R og $u_I < 0$ reelle,

$$-iut = -iu_R t + u_I t$$

hvor sidste led er negativt for $t > 0$, således at integralets værdi på denne halvcirkel er forsvindende. Integrationsvejen indeholder polen ved $u = -i\epsilon$ $(\epsilon > 0)$, og residuet er $+i/2\pi$. For integralets værdi fås derfor

$$\theta(t) = -2\pi i \times (\frac{i}{2\pi}) = +1$$

hvilket er det ønskede. Minustegnet hidrører fra, at vi har integreret rundt om polen i negativ retning. For $t < 0$ kan vi tilsvarende lukke integrationsvejen i den øvre halvplan, men her er ingen poler, og $\theta(t) = 0$, hvilket også er det ønskede.

Vi skifter nu integrationsvariabel fra u til $k^0 - \omega$, hvor k^0 er den ny fri variable, medens stadig $\omega = |\vec{k}|$. Læg altså mærke til, at det, vi hidtil har kaldt $k^2 = 0$ var størrelsen $\omega^2 - \vec{k}^2$. Nu derimod, reserverer vi navnet k^2 til $(k^0)^2 - \vec{k}^2$, der udmærket kan være forskellig fra nul, da k^0 er en helt fri variabel: $(\omega, \vec{k}) \neq (k^0, \vec{k})$. Så får vi

$$\begin{aligned} \theta(z_0)\langle 0|A_\mu(z)A_\nu(0)|0\rangle &= -g_{\mu\nu}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\frac{dk^0}{2\pi}\frac{i}{(k^0-\omega+i\epsilon)}e^{-i(k^0-\omega)z^0}e^{-i\omega z^0+i\vec{k}\cdot\vec{z}} \\ &= -g_{\mu\nu}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{2\omega}\frac{i}{k^0-\omega+i\epsilon}e^{-ikz} \end{aligned} \tag{5.72}$$

Tilsvarende fås

$$\begin{aligned} \theta(-z_0)\langle 0|A_\nu(0)A_\mu(z)|0\rangle &= -g_{\mu\nu}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{2\omega}\frac{i}{k^0-\omega+i\epsilon}\ e^{+ikz} \\ &= -g_{\mu\nu}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{2\omega}\frac{i}{-k^0-\omega+i\epsilon}e^{-ikz} \quad (k\to -k) \end{aligned} \tag{5.73}$$

Disse to bidrag skal nu adderes. Vi har (på nær ϵ-led i tæller)

$$\frac{1}{2\omega}[\frac{i}{k^0 - \omega + i\epsilon} + \frac{i}{-k^0 - \omega + i\epsilon}] = \frac{i}{2\omega}\frac{2\omega}{(k^0)^2 - (\omega - i\epsilon)^2} = \frac{i}{(k^0)^2 - \omega^2 + i\epsilon'}$$

hvor $\epsilon' \equiv 2\omega\epsilon > 0$, da $\omega > 0$. Men $\omega^2 \equiv \vec{k}^2$, så vi har endelig

$$\langle 0|T\{A_\mu(x)A_\nu(0)\}|0\rangle = -g_{\mu\nu}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2 + i\epsilon}e^{-ikx} \tag{5.74}$$

hvor $k^2 \equiv k_\mu k^\mu = (k^0)^2 - \vec{k}^2$.

For $D_{\mu\nu}(P_i)$ i (5.68) finder vi så

$$D_{\mu\nu}(P_i) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{P_i^2 + i\epsilon} \tag{5.75}$$

og vi er så færdige til at nedskrive det endelige T-matrikselement

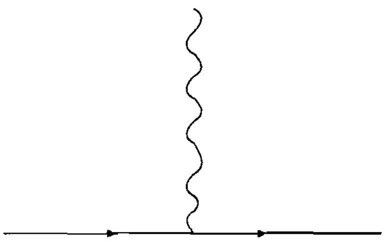
$$i\langle\mu^+\mu^-|T|e^+e^-\rangle = \left(-ie\overline{v}_{s_+}(\vec{p}_+)\gamma^\mu u_{s_-}(\vec{p}_-)\right)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}\right)\left(-ie\overline{u}_{\sigma_-}(\vec{q}_-)\gamma^\nu v_{\sigma_+}(\vec{q}_+)\right) \tag{5.76}$$

Dette matrikselement kunne vi nu evaluere fx ved at benytte de eksplicite løsninger for u'erne og v'erne og γ-matricerne i kap. 3. Herefter kunne T-matrikselementet indsættes i (5.61), og tværsnittet beregnes. Denne metode er meget besværlig. Navnlig i situationer, hvor begyndelsestilstanden stammer fra beams med lige mange partikler med spin $\uparrow$ og spin $\downarrow$ (upolariserede beams), og hvor tilsvarende detektorsystemet ikke kan se forskel på partikler med forskellige spin, findes der langt enklere metoder til at udregne absolutkvadratet af (5.76). Dem skal vi lære om i afs. 5.8

5.7 Feynman-reglerne for QED

I denne paragraf vil vi angive en kogebogsforskrift for, hvorledes matrikselementer af QED-processer beregnes. Vi vil stort set kun tænke på laveste ikke-trivielle orden. Vores eneste "bevis" for disse regler bliver en henvisning til udledelsen af $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ i forrige afsnit, men det skulle efter denne gennemgang være plausibelt, at et generelt sæt af regler kan bevises.

Først tegnes "alle" Feynman-diagrammer, som man agter at tage hensyn til. I princippet vælger man en bestemt orden i e, som man ønsker at regne til, og derefter nedtegnes alle diagrammer med dette antal *vertexer*. Et vertex er et punkt i diagrammet, hvor en fotonlinje:  møder en fermionlinje: således:

vertex:  I diagrammet er underforstået en tidsretning (vi vælger den fra venstre til højre). Fermioner repræsenteres ved fuldt optrukne orienterede linjer med pil i samme retning som tiden. Antifermioner med fuldt optrukne linjer med pil i modsat retning af tiden:

 : fermion

 : anti-fermion

 : foton

Først tegnes lige så mange fermion-, antifermion- og fotonlinjer i venstre del af diagrammet, som der er tilsvarende partikler i begyndelsestilstanden $|i\rangle$, og analogt behandles $|f\rangle$ i højre side af diagrammet.

Derpå færdigtegnes diagrammet, idet det forlanges opbygget af sammenhængende fermionlinjer og fotonlinjer, der enten forbinder to vertexer eller forbinder et vertex med en foton i $|i\rangle$ eller $|f\rangle$. Kun sammenhængende diagrammer behøver at blive undersøgt. To diagrammer, som er topologisk ækvivalente, regnes ikke for særskilte. Som eksempel kan vi tegne en topologisk ækvivalent version af fig. (5.1): fig.(5.2).

Når hvert af de mulige diagrammer er tegnet, tilordnes de en talværdi efter nedenstående Feynman-regler. Derefter adderes værdierne for hvert diagram, og resultatet er T-matrikselementet

$$i\langle f|T|i\rangle$$

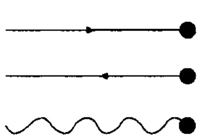
Hvert linjeelement i Feynman-diagrammet tildeles en 4-impuls. For de ydre linjer giver tilordningen sig selv. For de indre vælges en orienteringsretning, og deres 4-impuls udregnes, idet der forlanges 4-impulsbevarelse i hvert vertex. For fermioner er det ofte bekvemt at lade fermionpilen angive den retning, 4-impulsen flyder. Men bemærk herved, at en antifermion med 4-impuls p^μ $(p^0 > 0)$ har en 4-impuls af størrelsen $-p^\mu$ langs pilens retning.

Desuden tildeles hvert vertex et græsk bogstav - et Lorentz-indeks mellem 0 og 3, samt to Dirac-indices mellem 1 og 4, nemlig ét før vertexet og ét efter (regnet i fermionpilens retning).

Herved kan vi nedskrive samtlige diagramelementer samt deres tilordnede symbolværdi. Dernæst skal vi forklare, hvorledes elementerne sammensættes i et forelagt Feynman-diagram:

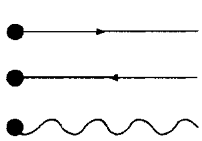
$(a = 1, 2, 3, 4 =$ Dirac-indeks, $\rho =$ polarisations-indeks, $\mu =$ Lorentz-indeks$)$

I. Ydre linjer i $|i\rangle$:



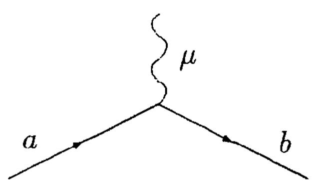
$$= u_a(\vec{p}, s) \quad \text{(indkommende fermion)}$$
$$= \overline{v}(\vec{p}, s) \quad \text{(indkommende antifermion)}$$
$$= \epsilon^\mu_\rho(\vec{k}) \quad \text{(indkommende foton)} \tag{5.77}$$

II. Ydre linjer i $|f\rangle$:



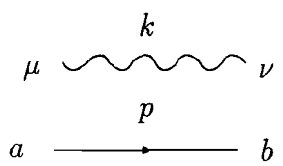
$$= \overline{u}_a(\vec{p}, s) \quad \text{(udgående fermion)}$$
$$= v_a(\vec{p}, s) \quad \text{(udgående antifermion)}$$
$$= -\epsilon^{\mu\rho^*}(\vec{k}) \quad \text{(udgående foton)} \tag{5.78}$$

III. Vertexet:



$$= -ie(\gamma_\mu)_{ba} \tag{5.79}$$

IV. Propagatorer:



$$= -ig^{\mu\nu}\frac{1}{k^2 + i\epsilon} \quad \text{(fotonpropagator)}$$
$$= \left(\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}\right)_{ba} = \frac{i(\not{p} + m)_{ba}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$
$$\text{(fermionpropagator)} \tag{5.80}$$

Værdien af et Feynman-diagram er nu simpelthen produktet af alle diagramelementernes værdier, summeret over indre Lorentz-, Dirac- og polarisations-indices. Det er ofte bekvemt at undlade at nedskrive Dirac-indices, men i stedet bruge matriksprodukt skrivemåden. Fx skrev vi i (5.76) $\overline{v}\gamma^\mu u$ i stedet for $(\overline{v})_a(\gamma^\mu)_{ab}(u)_b$.

Reglen er her som følger:

Hver fermionlinje giver anledning til et komplekst tal af form som et "lukket" matriksprodukt, dvs et udtryk af formen

$$\text{(adjungeret spinorrække)(diverse } \gamma\text{-matricer)(spinorsøjle).}$$

Produktet findes ved at følge fermionlinjen fra dens slutning til dens begyndelse *imod* pilens retning og nedskrive diagramelementerne efterhånden. Alle andre diagramelementer er c-tal, og deres placering er underordnet.

Pga fermionoperatorens *anti*-kommutationsegenskaber gælder særlige regler om ekstra fortegn, når der er flere ydre fermionlinjer. Der gælder følgende regel, idet vi forlanger at i alle diagrammer hørende til samme proces skal de ydre fermionlinjer forekomme i samme rækkefølge regnet fra oven og nedefter (denne rækkefølge kan naturligt være rækkefølgen for fermionerne i $|i\rangle$ og $|f\rangle$):

V. Ekstra fortegn:

For hver gang to fermionlinjer krydser hinanden, multipliceres amplituden med -1.
For hver *antifermion*, der passerer kontinuert fra begyndelses- til sluttilstanden, multipliceres amplituden med -1.

Fermionloops giver også en ekstra faktor -1, men vi vil næsten ikke her beskæftige os med dem i dette kursus.

Det ses nu umiddelbart, at Feynman-diagrammet (5.1) vil give anledning til amplituden (5.76). Det er også klart, at der ikke er andre mulige diagrammer med blot to vertexer.

Af diagrammer med fire vertexer er der mange (hvorfor er der ingen med tre?). Vi givet et par eksempler i fig.(5.3) Det første diagram viser en sk vacuumfluktuation. Ifølge vores regler skal det ikke tælles med. Det fortæller os noget om, at det fysiske vacuum - i forhold til hvilket vi regner - er mere indviklet end som så, men man kan vise, at dette "fysiske" vacuum i perturbationsteorien stort set blot afviger med en fase fra det simple vacuum.

De andre diagrammer indeholder allesammen lukkede løkker (closed loops). Dette giver anledning til 4-impulsværdier i disse, som *ikke* er specificeret af de ydre 4-impulser. Reglen er, at der skal integreres over sådanne uspecificerede 4-impulser l^μ med vægten

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}$$

Desværre viser det sig, at visse sådanne bidrag giver anledning til divergente integraler! Imidlertid er det muligt at give en fuldstændig entydig omfortolkning af teorien.

Det kan nemlig vises, at teorien sådan som vi har formuleret den, indeholder størrelser, som principielt ikke kan observeres, fx forholdet mellem den ladning, "elektronen virkeligt observeres at have", og den ladning, "den ville have haft, hvis der ingen elektromagnetiske vekselvirkninger havde været". Som følge af disse vekselvirkninger vil jo nemlig elektronen omgive sig med en sky af ladning hidrørende fra, at de virtuelle elektroner i vacuum frastødes, medens positronerne tiltrækkes (vacuumpolarisation). Det er muligt eksperimentelt at trænge delvist ind i denne ekstra ladningssky, og effekten heraf kan måles og beregnes. Men det er ikke muligt helt af fjerne effekten.

Det kan vise, at alle divergerende integraler kan skjules konsistent i sådanne størrelser. som principielt ikke kan observeres. Bedre: ved omhyggeligt at formulere teorien så den kun refererer til observerbare størrelser, forsvinder "problemet" med de "divergente integraler" helt. Denne omformulering af teorien kaldes *renormering.* Den spiller kun en rolle i højere ordener, og vi skal ikke beskæftige os med den i nogen detalje i dette kursus.

Om fermionpropagatoren

$$\frac{i}{(\not{p} - m + i\epsilon)}$$

nævner vi blot, dels at den fås som den Fourier-transformerede af

$$\langle 0|T\{\psi_b(x)\overline{\psi}_a(0)\}|0\rangle$$

i analogi til den måde fotonpropagatoren opstod på, dels at vi kan tænke på den som den inverse Dirac-operator i impulsrummet. I x-rummet er Dirac-operatoren

$$(i\not{\partial} - m)$$

og i impulsrummet

$$(\not{p} - m)$$

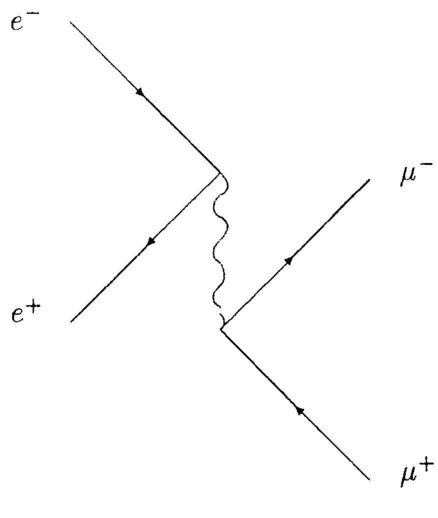
Propagatoren er (på nær faktoren i) den inverse hertil. Singulariteten ved $p^2 = m^2$ skal undgås vha den anførte $+i\epsilon$-forskrift. Tilsvarende kan vi opfatte fotonpropagatoren: I Lorentz-gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$ lyder de klassiske bevægelsesligninger:

$$\Box A^\mu = -j^\mu$$

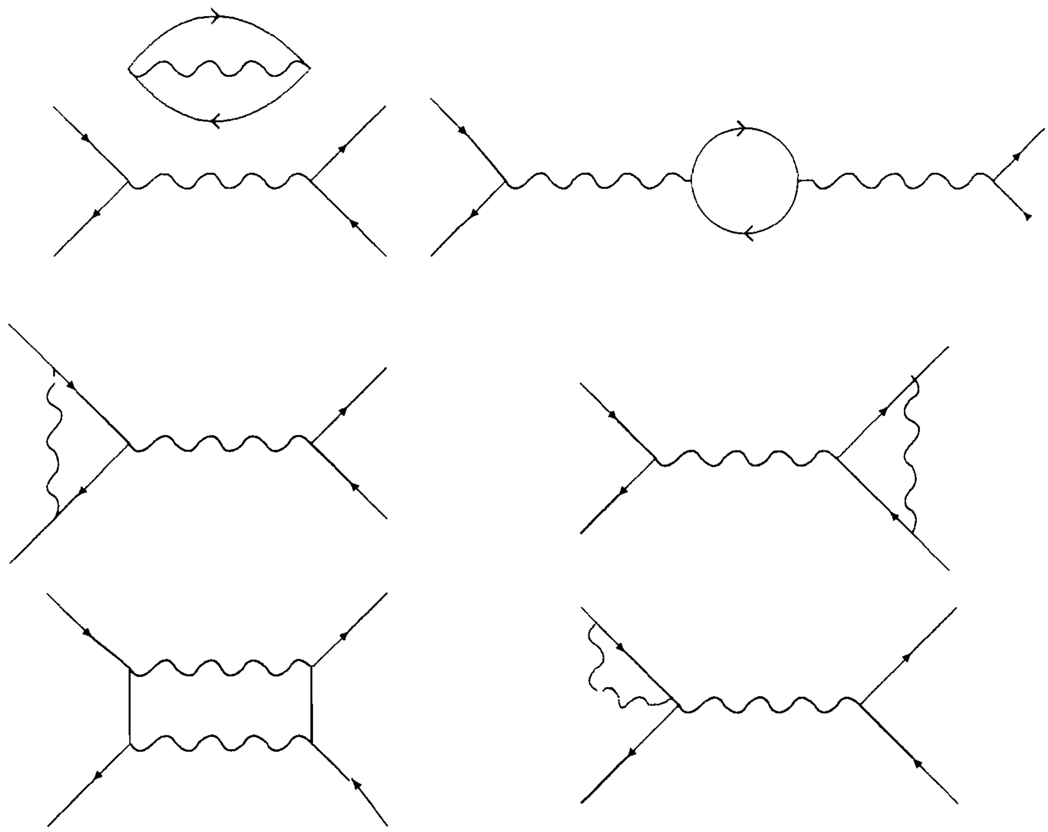
($\Box \equiv \vec{\nabla}^2 - \partial_t^2 = -\partial^2$) eller i p-rummet

$$p^2 A^\mu = -j^\mu$$

Den til p^2 inverse operator er netop fotonpropagatoren (igen på nær i).



Figur 5.2: Topologisk ækvivalent version af foregående diagram.



Figur 5.3: Eksempler på Feynmandiagrammer med 4 vertekser.

5.8 Regler for beregning af tværsnit

I alle de situationer, som vi skal interessere os for, har vi at gøre med upolariserede partikler i begyndelsestilstanden. I sådanne tilfælde er vi derfor kun interesserede i *gennemsnitsværdien* af $|\langle f|T|i\rangle|^2$ midlet over alle begyndelsesværdier af spin. Tilsvarende interesserer vi os kun for eksperimenter, hvor tælle-detektoren giver signal uanset slutpartiklernes spin. Vi er derfor kun interesserede i *summen* af alle $|\langle f|T|i\rangle|^2$-værdier, hørende til forskellige slutspintilstande.

Det viser sig nu, at udtryk af formen

$$\sum_{s,s'}(\overline{u}_s\Gamma_1 u_{s'})(\overline{u}_s\Gamma_2 u_{s'})^* \tag{5.81}$$

samt tilsvarende udtryk, hvor det ene eller begge u'er er erstattet af v'er, kan udregnes efter en række simple regler, som vi nu skal skitsere udledelsen af.

Vi kan omskrive (5.81) som følger:

$$\sum_{s,s'}(\overline{u}_s\Gamma_1 u_{s'})(\overline{u}_s\Gamma_2 u_{s'})^* = \sum_{s,s'}(\overline{u}_s\Gamma_1 u_{s'})(u_{s'}^\dagger\Gamma_2^\dagger(\gamma_0)^\dagger u_s) = \sum_{s,s'}(\overline{u}_s\Gamma_1 u_{s'})(\overline{u}_{s'}\overline{\Gamma}_2 u_s)$$

hvor

$$\overline{\Gamma}_2 \equiv \gamma_0\Gamma_2^\dagger\gamma_0$$

(jfr. (3.73)), og hvor der gælder

$$\overline{\gamma}^\mu = \gamma^\mu \quad , \quad \overline{\sigma}_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} \quad , \quad \overline{\gamma}_5 = -\gamma_5 \quad , \quad \overline{i\gamma_5} = i\gamma_5 \tag{5.82}$$

Videre har vi så for (5.81)

$$\sum_{s,s'}(\overline{u}_s)_a[\Gamma_1]_{ab}(u_{s'})_b(\overline{u}_{s'})_c[\overline{\Gamma}_2]_{cd}(u_s)_d = \mathrm{Tr}\{(\sum_s u_s\overline{u}_s)\Gamma_1(\sum_{s'} u_{s'}\overline{u}_{s'})\overline{\Gamma}_2\} \tag{5.83}$$

hvor vi har underforstået summation over Dirac-indices, og hvor sporet af en matriks er defineret ved

$$Tr\{A\} \equiv \sum_i A_{ii} \tag{5.84}$$

Det viser sig m.a.o. nyttigt at udregne spinsummerne

$$\Lambda_+(p) \equiv \sum_s u_s(p)\overline{u}_s(p) \quad \text{og} \quad \Lambda_-(p) \equiv -\sum_s v_s(p)\overline{v}_s(p) \tag{5.85}$$

(bemærk at disse er 4×4-matricer: søjle $\times$ række).

Der gælder nu

$$\Lambda_+(p) = \not{p} + m \quad , \quad \Lambda_-(p) = -\not{p} + m \tag{5.86}$$

Disse ligninger vises let ved at bemærke, at der for både venstre- og højre-siderne gælder

$$\begin{aligned} \Lambda_+(p)u_s(p) = 2m\ u_s(p) \quad &; \quad \overline{u}_s(p)\Lambda_+(p) = 2m\ \overline{u}_s(p) \\ \Lambda_+(p)v_s(p) = 0 \quad &; \quad \overline{v}_s(p)\Lambda_+(p) = 0 \end{aligned} \tag{5.87}$$

samt $\Lambda_+(p)^2 = 2m\Lambda_+(p)$ (dvs Λ_+ er en projektionsoperator). For at bevise dette skal man ganske enkelt anvende Dirac-ligningen og normeringen af spinorer

$$\overline{u}_s(p)u_{s'}(p) = 2m\delta_{ss'}.$$

Tilsvarende for $\Lambda_-(p)$.

Vi er nu i stand til at nedskrive et simpelt udtryk for absolutkvadrater af vores amplitude for $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (5.76):

$$i\langle\mu^-\mu^+|T|e^-e^+\rangle = +\frac{ie^2}{s}[\overline{v}_{s_+}(\vec{p}_+)\gamma^\mu u_{s_-}(\vec{p}_-)][\overline{u}_{\sigma_-}(\vec{q}_-)\gamma_\mu v_{\sigma_+}(\vec{q}_+)]$$

$(s \equiv P_i^2 = P_f^2 = k^2)$ eller, idet $Tr(AB) = Tr(BA)$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{s_+s_-\\ \sigma_+\sigma_-}} |\langle\mu^-\mu^+|T|e^-e^+\rangle|^2 &= \frac{e^4}{s^2}Tr\{(\not{p}_- + m_e)\gamma^\mu(\not{p}_+ - m_e)\gamma^\nu\} \\ &\times \; Tr\{(\not{q}_+ - m_\mu)\gamma_\mu(\not{q}_- + m_\mu)\gamma_\nu\} \qquad (5.88)\end{aligned}$$

5.8.1 Feynmanregler for amplitudekvadrater

Inden vi angiver reglerne for beregning af disse spor, angiver vi en simpel regel, hvorefter udtrykket (5.88) direkte kan nedskrives *uden* først at nedskrive amplituden efter Feynmanreglerne:

I almindelighed vil T være givet som en sum af bidrag hørende til forskellige diagrammer:

$$T = T_1 + T_2 + \cdots$$

og

$$|T|^2 = (T_1 + T_2 + \cdots)(T_1^* + T_2^* + \cdots) = |T_1|^2 + 2Re(T_1T_2^*) + \cdots$$

Vi angiver en regel for at nedskrive realdelen af $T_1T_2^*$:

Tegn Feynman-diagrammet hørende til T_1. Tegn en lodret linje til højre for det. Tegn det *spejlvendte* diagram af det, som hører til T_2 og vend herunder alle fermionpile og 4-impulsretninger. Forbind de to diagrammers linjer, således at linjer med samme 4-impuls hænger sammen over den lodrette streg.

Værdien $\sum_{spin} Re(T_1T_2^*)$ fås så ved at bruge Feynman-reglerne på dette sammensatte diagram, idet der gælder flg. ekstraregler:

$$\begin{aligned} &= (\not{p} + m)_{ab} \\ &= -\epsilon_\mu^{\rho^*}\epsilon_{\rho\nu} = -g_{\mu\nu} \qquad (5.89)\end{aligned}$$

Hver fermionloop bidrager med en faktor -1. Krydsende fermionlinjer bidrager ekstra faktorer -1. Alle $\pm i$ faktorer udelades fra Feynman-reglerne (eller om man vil: de optræder i det spejlede diagram i komplekst konjugeret skikkelse).

Lad os illustrere processen på $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (fig. (5.4)). Myonloopen giver os en faktor

$$-Tr\{\gamma_{\mu'}(\not{q}_- + m_\mu)\gamma_\mu(-\not{q}_+ + m_\mu)\}e^2$$

elektronloopen giver faktoren

$$-Tr\{\gamma_\nu(\not{p}_- + m_e)\gamma_{\nu'}(-\not{p}_+ + m_e)\}e^2$$

og de to fotonpropagatorer giver faktorerne

$$\frac{g^{\mu\nu}}{s} \quad \text{og} \quad \frac{g^{\mu'\nu'}}{s}$$

hvorved (5.88) pÅny reproduceres.

Denne metode skal vi vise et par eksempler på i det følgende. Det er dog ofte næsten lige så nemt at "udlede" reglen i hvert enkelt tilfælde.

5.8.2 Regler for beregning af spor af gamma-matricer

Vi angiver nu en række regneregler for spor og for γ-matricer. Beviserne henvises til øvelserne:

$$\begin{aligned} Tr(A_1A_2\ldots A_n) &= Tr(A_2A_3\ldots A_nA_1) = \ldots \\ &\quad \text{(cyklisk invarians)} \\ Tr(I) &= 4 \\ Tr(\not a \not b) &= 4a\cdot b \\ Tr(\not a_1 \not a_2 \not a_3 \not a_4) &= 4[(a_1\cdot a_2)(a_3\cdot a_4) - (a_1\cdot a_3)(a_2\cdot a_4) + (a_1\cdot a_4)(a_2\cdot a_3)] \end{aligned} \quad (5.90)$$

hvor a_i^μ er 4-vektorer.

$$Tr\{\gamma^{\mu_1}\cdot\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_n}\} = 0 \quad \text{for} \quad n \quad \text{ulige} \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \not a \gamma^\mu &= -2\not a \\ \gamma_\mu \not a \not b \gamma^\mu &= 4a\cdot b \\ \gamma_\mu \not a \not b \not c \gamma^\mu &= -2\not c \not b \not a \end{aligned} \quad (5.92)$$

5.8.3 Det endelige udtryk for tværsnittet for $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ til laveste orden

Vi vender nu tilbage til beregningen af $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Det er bekvemt at indføre den totale c.m. 4-impuls

$$k^\mu = p_+{}^\mu + p_-{}^\mu = q_+{}^\mu + q_-{}^\mu = (\sqrt{s},\vec{0}) \quad \text{i c.m.} \quad (5.93)$$

til fordel for $p_+{}^\mu$ og $q_+{}^\mu$. Vi får så for myonsporet

$$Tr\{\gamma_\mu(\not q_- + m_\mu)\gamma_\nu(\not k - \not q_- - m_\mu)\} = Tr\{\not\eta_\mu(\not q_- + m_\mu)\not\eta_\nu(\not k - \not q_- - m_\mu)\} \equiv w_{\mu\nu}\,\text{(myon)}$$

hvor η_ν er en 4-vektor, hvis ν-komponent = 1, alle andre = 0 i det aktuelle inertialsystem.

Vi bruger nu sporreglerne (5.90) og (5.91)

$$\begin{aligned} w_{\mu\nu}(\text{muon}) &= Tr\{\not\eta_\mu \not q_- \not\eta_\nu \not k\} - Tr\{\not\eta_\mu \not q_- \not\eta_\nu \not q_-\} - m_\mu^2 Tr\{\not\eta_\mu \not\eta_\nu\} \\ &= 4[(q_-)_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k\cdot q_- + (q_-)_\nu k_\mu - (q_-)_\mu(q_-)_\nu + g_{\mu\nu}q_-^2 \\ &- (q_-)_\mu(q_-)_\nu - m_\mu^2 g_{\mu\nu}] \\ &= 4[(q_-)_\mu k_\nu + (q_-)_\nu k_\mu - 2(q_-)_\mu(q_-)_\nu - g_{\mu\nu}k\cdot q_-] \end{aligned} \quad (5.94)$$

På tilsvarende måde findes elektronsporet

$$\begin{aligned} w^{\mu\nu}(\text{elektron}) &= Tr\{\gamma^\mu(\not p_- + m_e)\gamma^\nu(\not p_+ - m_e)\} \\ &= 4[p_-^\mu k^\nu + p_-^\nu k^\mu - 2p_-^\mu p_-^\nu - g^{\mu\nu}k\cdot p_-]; \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$
\begin{aligned}
w_{\mu\nu}(\text{myon})w^{\mu\nu}(\text{elektron}) &= 16[2(p_-\cdot q_-)k^2 \\
&+ 2(q_-\cdot k)(p_-\cdot k) - 4(p_-\cdot q_-)(p_-\cdot k) - 2(q_-\cdot k)(p_-\cdot k) \\
&- 4(p_-\cdot q_-)(q_-\cdot k) + 4(q_-\cdot p_-)^2 + 2q_-^2(k\cdot p_-) \\
&- 2(p_-\cdot k)(q_-\cdot k) + 2p_-^2(k\cdot q_-) + 4(k\cdot q_-)(p_-\cdot k)] \\
&= 16[2s(p_-\cdot q_-) + 2(p_-\cdot k)(q_-\cdot k) \\
&- 4(p_-\cdot q_-)(p_-\cdot k + q_-\cdot k) + 4(q_-\cdot p_-)^2 \\
&+ 2m_\mu^2(k\cdot p_-) + 2m_e^2(k\cdot q^-)] \qquad (5.96)
\end{aligned}
$$

Vi udregner dette i c.m. systemet, hvor vi sætter (se fig. (5.5))

$$
\begin{aligned}
p_-{}^\mu = (E,0,0,p_{(e)}) \quad &, \quad p_+{}^\mu = (E,0,0,-p_{(e)}) \\
q_-{}^\mu = (E,0,p_{(\mu)}\sin\theta, p_{(\mu)}\cos\theta) \quad &, \quad q_+{}^\mu = (E,0,-p_{(\mu)}\sin\theta,-p_{(\mu)}\cos\theta) \\
k^\mu = (2E,\vec{0}) \equiv (\sqrt{s},\vec{0}) \quad &, \quad p_{(e)} = E\cdot\beta_e, \qquad p_{(\mu)} = E\cdot\beta_\mu \qquad (5.97)
\end{aligned}
$$

Her står β for hastighed i enheder af lyshastigheden og indices (e) og (μ) refererer til partikelnavne og må ikke forveksles med Lorentz-indices. Heraf fås

$$
\begin{aligned}
p_-\cdot q_- &= E^2(1-\beta_e\beta_\mu\cos\theta) = \tfrac{1}{4}\, s(1-\beta_e\beta_\mu\cos\theta) \\
p_-\cdot k &= \tfrac{1}{2}s = q_-\cdot k
\end{aligned}
$$

Herefter fås

$$
w_{\mu\nu}(\text{myon})w^{\mu\nu}(\text{elektron}) = 4s^2[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta + \frac{4}{s}(m_\mu^2+m_e^2)]
$$

Hvis vi derefter midler over de fire mulige spintilstande for $|e^+e^-\rangle$ og summerer over de fire mulige spintilstande for $|\mu^+\mu^-\rangle$, får vi

$$
\overline{\sum_{spin}}|\langle\mu^+\mu^-|T|e^+e^-\rangle|^2 = e^4[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta + \frac{4}{s}(m_\mu^2+m_e^2)]
$$

Vi indsætter dette udtryk i formlen for det differentielle tværsnit (5.61)

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega_{c.m}} &= \frac{\beta_\mu}{\beta_e}\frac{e^4}{64\pi^2 s}\left(1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta + \frac{4}{s}(m_\mu^2+m_e^2)\right) \\
&= \frac{\alpha^2}{4s}\frac{\beta_\mu}{\beta_e}\left(1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta + \frac{4}{s}(m_\mu^2+m_e^2)\right) \qquad (5.98)
\end{aligned}
$$

Vi kan let finde det totale tværsnit

$$
\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}
$$

idet

$$
d\Omega = d\phi d\cos\theta
$$

Udtrykket for $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ er uafhængigt af ϕ, så vi får

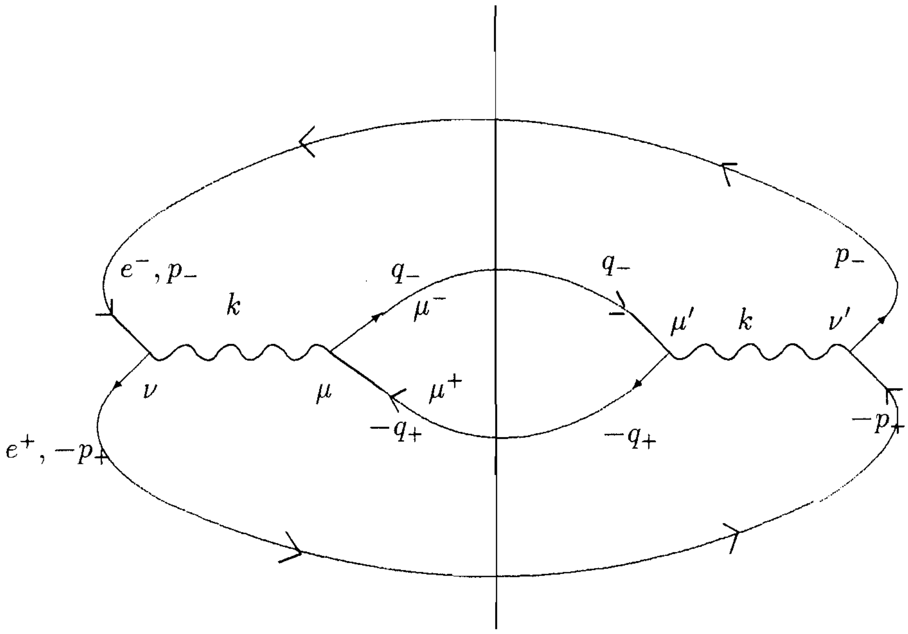
$$
\sigma = \frac{\alpha^2\pi}{s}\frac{\beta_\mu}{\beta_e}\left(1+\frac{1}{3}\beta_e^2\beta_\mu^2 + \frac{4}{s}(m_\mu^2+m_e^2)\right) \qquad (5.99)
$$

For højenergetiske eksperimenter, hvor $E = \frac{1}{2}\sqrt{s} \gg m_\mu, m_e$ kan vi negligere sidste led og sætte $\beta_e = \beta_\mu = 1$. Vi får så

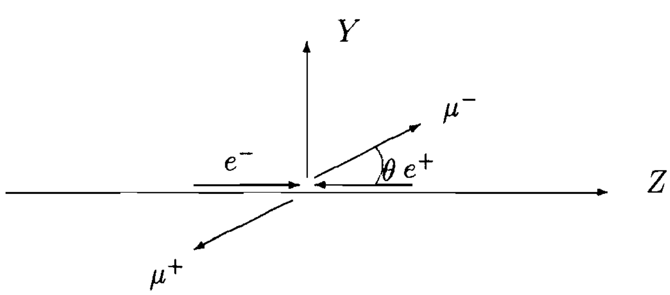
$$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) \simeq \sigma_{pt} \equiv \frac{4\alpha^2\pi}{3s} = \frac{87nb}{s/(GeV)^2} \tag{5.100}$$

hvor vi brugte $\alpha \simeq \frac{1}{137}$ til sidst og indførte GeV-enheder. Index, *pt* står for *point cross section*, og refererer til en approksimation i hvilken ingen længde (eller masse) indgår.

(**Øvelse**: - enheden nb = nanobarn betyder $10^{-37}m^2$).



Figur 5.4: "Feynman-diagram" for kvadratet på amplituden for $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ til laveste orden.



Figur 5.5: Koordinatvalg for spredningsprocessen, $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

5.9 Bhabha-spredning

Som et sidste eksempel til illustration af hele vores nyerhvervede formalisme betragter vi $e^+e^- \to e^+e^-$ i laveste ikke-trivielle orden. Denne proces kaldes Bhabha-spredning. Den har den principielle interesse, at den er velforstået og rimeligt bekvem at måle, hvorfor den kan bruges til at måle den "effektive" luminositet (et mål for hvor mange partikler, der har mulighed for at støde sammen hver gang de to "bunches" af henholdsvis elektroner og positroner passerer igennem hinanden) i en e^+e^--accelerator som f.eks. LEP ved CERN. Der er to Feynman-diagrammer, se fig. (5.6). Vi indfører sædvanlige Mandelstam-variable (jfr. kap. 1):

$$\begin{aligned} s &= (p_1+p_2)^2 = (p_1'+p_2')^2 \\ t &= (p_1-p_1')^2 = (p_2'-p_2)^2 \quad , \quad s+t+u = 4m_e^2 \\ u &= (p_1-p_2')^2 = (p_2-p_1')^2 \end{aligned} \tag{5.101}$$

Vi vil kun interessere os for den højenergetiske grænse $s \gg m_e^2$, så $s+t+u \sim 0$.

Det spinsummerede amplitudekvadrat er så givet ved

$$\begin{aligned} \overline{\sum}_{spin} |\langle e^+e^-|T|e^+e^-\rangle|^2 &= \frac{1}{4}\{\text{"fig. (5.7)"}\} \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{e^4}{t^2}(-1)^2 Tr\{\not p_1'\gamma_\mu \not p_1\gamma_\nu\} Tr\{(-\not p_2)\gamma^\mu(-\not p_2')\gamma^\nu\}\right. && (A) \\ &+ \frac{e^4}{s^2}(-1)^2 Tr\{\not p_1'\gamma_\mu(-\not p_2')\gamma_\nu\} Tr\{(-\not p_2)\gamma^\mu \not p_1\gamma^\nu\} && (B) \\ &+ \left. 2\frac{e^4}{s\cdot t}(-1) Tr\{\not p_1'\gamma_\mu \not p_1\gamma^\nu(-\not p_2)\gamma^\mu(-\not p_2')\gamma_\nu\}\right] && (C) \end{aligned} \tag{5.102}$$

Vi får så :

$$\begin{aligned} A \;&:\; Tr\{\not p_1'\gamma_\mu \not p_1\gamma_\nu\} Tr\{\not p_2\gamma^\mu \not p_2'\gamma^\nu\} \\ &= 16[p_{1\mu}'p_{1\nu} + p_{1\nu}'p_{1\mu} - p_1'\cdot p_1 g_{\mu\nu}][p_2^\mu p_2'^\nu + p_2^\nu p_2'^\mu - p_2\cdot p_2' g^{\mu\nu}] \\ &= 32\,((p_1'\cdot p_2)(p_1\cdot p_2') + (p_1'\cdot p_2')(p_1\cdot p_2)) \\ &= 8(u^2+s^2) \\ B \;&:\; Tr\{\not p_1'\gamma_\mu \not p_2'\gamma_\nu\} Tr\{\not p_2\gamma^\mu \not p_1\gamma^\nu\} \\ &= 16[p_{1\mu}'p_{2\nu}' + p_{1\nu}'p_{2\mu}' - p_1'\cdot p_2' g_{\mu\nu}][p_2^\mu p_1^\nu + p_2^\nu p_1^\mu - p_1\cdot p_2 g^{\mu\nu}] \\ &= 32\,((p_1'\cdot p_2)(p_1\cdot p_2') + (p_1'\cdot p_1)(p_2'\cdot p_2)) \\ &= 8(u^2+t^2) \\ C \;&:\; Tr\{\not p_1'\gamma_\mu \not p_1\gamma^\nu \not p_2\gamma^\mu \not p_2'\gamma_\nu\} \\ &\quad (\text{brug}(5.92)) \\ &= -2Tr\{\not p_1' \not p_2\gamma^\nu \not p_1 \not p_2'\gamma_\nu\} = -8p_1\cdot p_2' Tr\{\not p_1' \not p_2\} \\ &= -32(p_1\cdot p_2')(p_1'\cdot p_2) \\ &= -8u^2 \end{aligned} \tag{5.103}$$

Heraf fås, idet $u = -s-t$ medfører $u^2 = s^2+t^2+2st$:

$$\overline{\sum}_{spin} |\langle e^+e^-|T|e^+e^-\rangle|^2 = 2e^4\left[\frac{u^2+s^2}{t^2} + \frac{u^2+t^2}{s^2} + \frac{2u^2}{st}\right]$$

$$\begin{aligned} &= 4e^2\left[\frac{s^2}{t^2}+\frac{s}{t}+\frac{1}{2}+\frac{t^2}{s^2}+\frac{t}{s}+\frac{1}{2}+\frac{s}{t}+\frac{t}{s}+2\right] \\ &= 4e^4\left(\frac{s}{t}+\frac{t}{s}+1\right)^2 \end{aligned} \tag{5.104}$$

og

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{c.m.} = \frac{\alpha^2}{s}\left(\frac{s}{t}+\frac{t}{s}+1\right)^2 \tag{5.105}$$

I c.m. systemet kan vi sætte

$$\begin{aligned} p_1^\mu &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1,0,0,1) \quad , \quad p_2^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1,0,0,-1) \\ p_1'^\mu &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1,0,\sin\theta,\cos\theta) \quad , \quad p_2'^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1,0,-\sin\theta,-\cos\theta) \end{aligned} \tag{5.106}$$

Så er

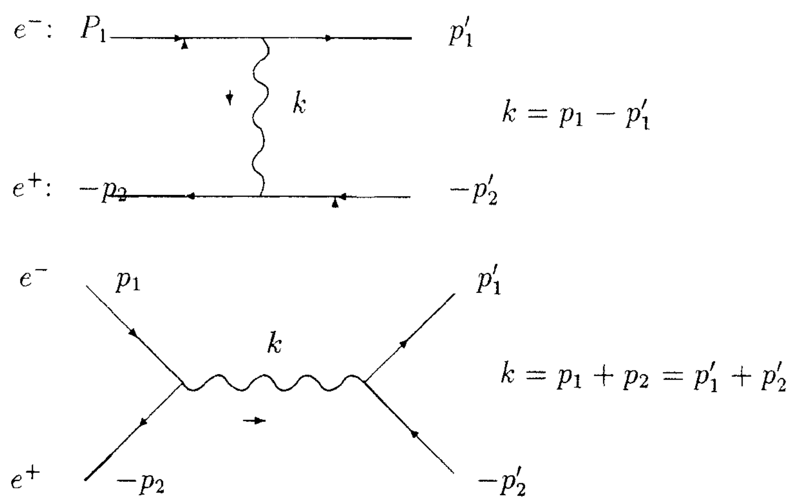
$$t = \frac{s}{4}\left[-\sin^2\theta-(1-\cos\theta)^2\right] = -\frac{s}{2}(1-\cos\theta) = -s\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Og

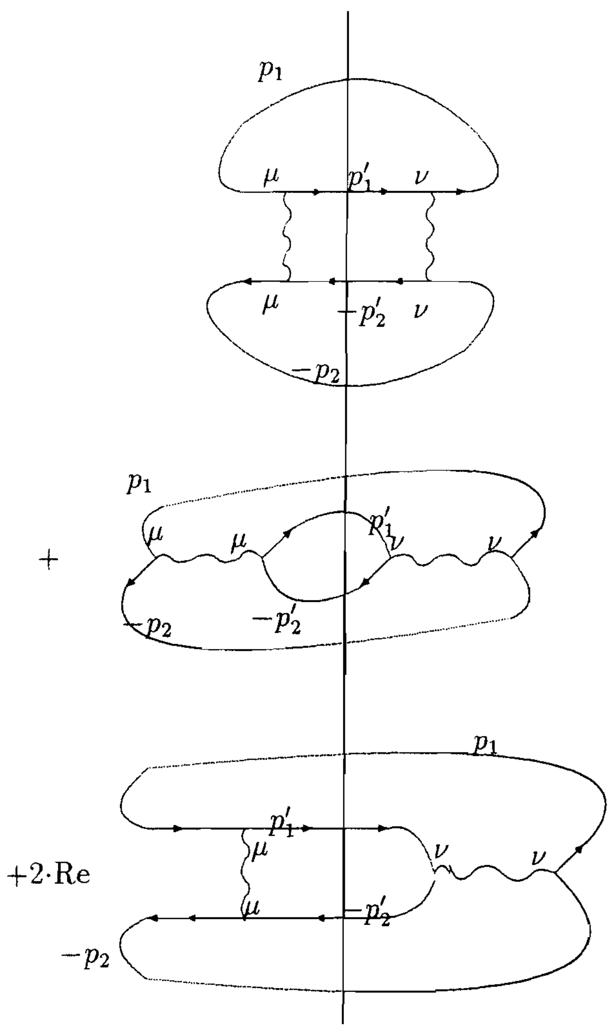
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{c.m.} = \frac{\alpha^2}{s}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\sin^2\frac{\theta}{2}-1\right)^2 \tag{5.107}$$

der viser den fra Rutherford-tværsnittet bekendte divergens ved $\theta \to 0$ af formen

$$\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}.$$



Figur 5.6: De to Feynman-diagrammer for Bhabha-spredning til laveste orden.



Figur 5.7: "Feynman-diagrammer" for amplitudekvadrat-bidragene til laveste ordens Bhabha-spredning.

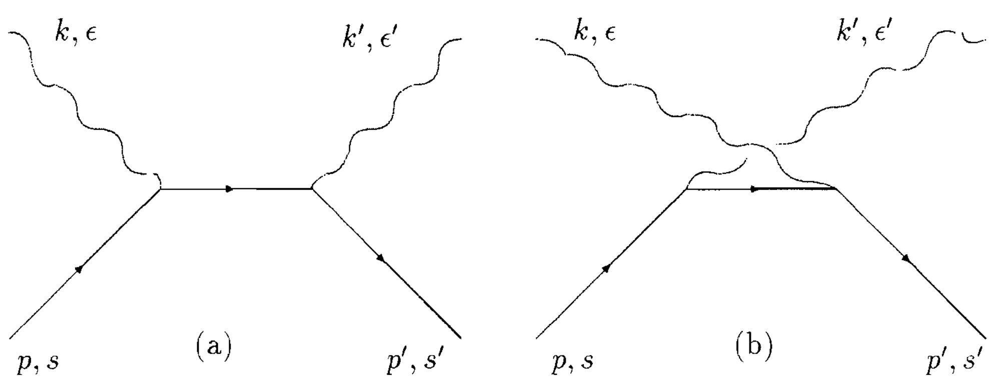
5.10 Gaugeinvarians

Vi vender nu tilbage til en kort diskussion af kravet (5.35) til en amplitude for produktion af en foton med 4-impuls k_μ og polarisationsvektor ϵ_μ. Vi påstod i afsn. 5.4, at en sådan amplitude ville være lineær i ϵ_μ med koefficienter M^μ uafhængige af fotonens polarisation. Dette er en direkte følge af Feynman-reglerne (5.78). Endvidere påstod vi, at $M_\mu k^\mu \equiv 0$, og vi antydede, at denne betingelse ville sikre, at vores ejendommelige behandling af ufysiske fotoner ville blive konsistent.

Vi betragter nu et simpelt eksempel på en proces, hvor en foton bliver produceret: Comptonspredning

$$\gamma(k,\epsilon) + e^-(p,s) \to \gamma(k',\epsilon') + e^-(p',s').$$

Der er to Feynman-diagrammer til laveste orden, fig. (5.8). Og amplituden er efter



Figur 5.8: De to Feynman-diagrammer for Compton-spredning i laveste orden. Ingen af diagrammerne er gauge-invariante, men summen er!

Feynman-reglerne

$$iT_{fi} = ie^2 \overline{u}_{s'}(\vec{p}\,') \left[\not{\epsilon}' \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m} \not{\epsilon} + \not{\epsilon} \frac{1}{\not{p} - \not{k}' - m} \not{\epsilon}' \right] u_s(\vec{p}) \tag{5.108}$$

hvor de to led i parentesen hidrører fra de to Feynman-diagrammer.

Påstanden er nu, at hvis vi erstatter ϵ' med k', så bliver resultatet 0. Dette gælder *ikke* for hvert diagram taget for sig; det gælder kun for summen. Vi udtrykker det på den måde, at de individuelle Feynman-diagrammer i almindelighed *ikke* er gaugeinvariante. Det har altså ingen stringent fysisk mening at spørge om, hvor meget af amplituden for $\gamma + e^- \to \gamma + e^-$, der hidrører fra det første Feynman-diagram: Svaret vil afhænge af, hvilken gauge vi arbejder i. I Feynman-gauge (som vi bruger) er svaret givet ved første led i (5.108).

Idet vi bruger $k' = p + k - p'$ i første led og derfor

$$\not{k}' = \not{p} + \not{k} - m - (\not{p}' - m),$$

samt $k' = p - (p - k')$ i andet led og derfor

$$\not{k}' = \not{p} - m - (\not{p} - \not{k}' - m),$$

får vi for parentesen i (5.108) (når $\not{\epsilon}'$ erstattes af $\not{k}'$):

$$
\begin{aligned}
& [\not{p}+\not{k}-m-(\not{p}'-m)]\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}\not{\epsilon} \\
+ \quad & \not{\epsilon}\frac{1}{\not{p}-\not{k}'-m}[\not{p}-m-(\not{p}-\not{k}'-m)] \\
= \quad & \not{\epsilon}-(\not{p}'-m)\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}\not{\epsilon}+\not{\epsilon}\frac{1}{\not{p}-\not{k}'-m}(\not{p}-m)-\not{\epsilon}
\end{aligned}
\tag{5.109}
$$

Her hæver $\not{\epsilon}$-leddene hinanden. Desuden giver $(\not{p}'-m)$ nul til venstre pga Dirac-ligningen for $\overline{u}_{s'}(\vec{p}\,')$, og $(\not{p}-m)$ giver nul til højre pga Dirac-ligningen for $u_s(\vec{p})$.

Hermed har vi vist, at amplituden (5.108) tilfredsstiller gaugeinvarians-betingelsen, at $\epsilon' \rightarrow k'$ giver 0. Tilsvarende vises, at $\epsilon \rightarrow k$ giver 0.

Kapitel 6

GAUGETEORIER; KVANTECHROMODYNAMIK (QCD)

6.1 QED som Abelsk gaugeteori

I dette kapitel skal vi formulere det såkaldte gaugeprincip [1] og se, hvorledes det fører til en ejendommelig "udledelse" af QED-Lagrange-funktionen og af den moderne teori for de stærke vekselvirkninger, QCD. Vi betragter først Lagrange-tætheden for et frit fermionfelt, som vi tænker os har en elektrisk ladning på $Q \cdot e$ (e = protonladningen):

$$\mathcal{L}_0 = \overline{\psi}(x)(i\,\not\partial - m)\psi(x) \tag{6.1}$$

Denne Lagrange-tæthed besidder en invarians, som er nært beslægtet med ladningsbevarelse. Ladningsbevarelse betyder, at hver gang, der skabes en fermion af noget uladet, må der også skabes en antifermion. Dette betyder igen, at ψ og $\overline{\psi}$ må forekomme sammen i $\mathcal{L}$. Den heraf følgende formelle invarians er, at hvis vi erstatter $\psi(x)$ med $\psi(x)$ multipliceret med en fasefaktor $e^{i\chi}$, så vil $\mathcal{L}_0$ være uændret. Dette er naturligvis præcist korrekt, når ψ og $\overline{\psi}$ altid optræder sammen, thi så har man

$$\overline{\psi} \longrightarrow \overline{\psi}\, e^{-i\chi}$$

og følgelig af (6.1)

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \overline{\psi}\, e^{-i\chi}(i\,\not\partial - m)\, e^{i\chi}\psi = \overline{\psi}(i\,\not\partial - m)\psi = \mathcal{L}_0$$

Vi forsøger nu at forklare det, som synes at være den basale pointe i **gaugeprincippet**. Faktisk virker det som om en af de vigtigste opdagelser overhovedet i partikelfysikken, er erkendesen af at alle vekselvirkninger beskrives ved *gauge-teorier*, eller teorier, hvor frihedsgraderne er geometriske. Den første teori, der blev erkendt at høre til denne klasse var Einsteins berømte almene relativitetsteori: en teori for gravitationskræfterne. At frihedsgraderne (nemlig rum-tidens geometri) er geometriske, udtrykkes derved, at det fysiske indhold skal være invariant under en ændring af koordinatsystemet. "Geometrien" i Alperne (f. eks.) har intet at gøre med den måde, vi eventuelt vælger at lægge et koordinatnet ud over bjergkæden: det geometriske indhold er det, der bliver tilbage i beskrivelsen som invariant under sådanne koordinatskift. Det er en generalisering af denne idé om koordinatinvarians, som betegnes med ordet: *gauge-invarians*.

I vores tilfælde af elektrodynamik (vi ser først på den klassiske feltteori) er det fasen af elektronfeltet vi på analog måde vil behandle som blot en koordinat for en mere geometrisk frihedsgrad. I overensstemmelse hermed vil vi påstulere, at teoriens fysiske indhold skal være invariant under tilhørende koordinatskift, altså her fase-skift, vel at mærke endog sådanne, som varierer fra sted til sted i rummet og tiden.

Baseret på overvejelser af denne art fremsætter vi *gaugeprincippet* i følgende formulering:

Hvis vores teori (Lagrange-funktion) er fuldstændig invariant under et sæt transformationer af felterne beskrevet ved en Lie-gruppe med parametre $\{\theta_i\}$, så siger vi, at vi *gauger* denne invarians hvis vi forlanger, at teorien også skal være invariant under sådanne transformationer, hvor gruppeparametrene tillades at være vilkårlige funktioner af rum-tids-argumentet (x) for felterne.

I Lagrange-funktionen (6.1) er invariansgruppen simpelthen gruppen af komplekse fasefaktorer med multiplikation som kompositionsforskrift:

$$\mathcal{G} = (\{e^{i\chi} | \chi \in \mathbf{R}\}, \cdot) \tag{6.2}$$

[1] eng.: gauge = justering; forklaring: se lidt senere i dette afsnit

Denne gruppe betegnes som $U(1)$: Gruppen af unitære "1×1 matricer". Den er et eksempel på en Lie-gruppe: En gruppe, som kan forsynes med en topologi, og hvori man lokalt kan indføre koordinater, hvorefter gruppeelementerne kan differentieres. Disse koordinater benævnes *Lie-gruppens parametre.*

I $U(1)$ kan vi lokalt bruge fasen, χ, selv som koordinat (den kan ikke bruges globalt, da $e^{i(\chi+2\pi)} = e^{i\chi}$). Vi kan også differentiere efter χ:

$$\frac{\partial}{\partial\chi}(e^{i\chi}) = ie^{i\chi}$$

Gruppen $U(1)$ er desuden kommutativ, dvs den er en *Abelsk* gruppe:

$$e^{i\chi_1}e^{i\chi_2} = e^{i(\chi_1+\chi_2)} = e^{i\chi_2}e^{i\chi_1}$$

Alle grupper indeholder det identiske element. I en infinitesimal omegn af det identiske element kan vi (pga differentiabilitet) skrive et generelt gruppeelement

$$U(\{\theta_i\}) = 1 + i\sum_i \theta_i T_i \tag{6.3}$$

Operatorerne $\{T_i\}$ (differentialkvotienter i 1) benævnes Lie-*algebraens* generatorer, og vektorrummet bestående af alle linearkombinationer af disse benævnes Lie-*algebraen*. Som en basis i denne kan vi åbenbart benytte $\{T_i\}$ selv. Vi skal kun interessere os for Lie-algebraer af endelig dimension. Denne dimension kaldes også dimensionen af Lie-gruppen.

I $U(1)$ er Lie-algebraen mængden af reelle tal med addition som kompositionsforskrift, og gruppens generator er en konstant, her, $\{1\}$:

$$e^{i\chi} = 1 + i\chi \cdot 1 \quad \text{for } \chi \text{ infinitesimal}$$

Efter dette sidespring vender vi tilbage til $\mathcal{L}_0$ i (6.1). Vi postulerer altså, at vores teori skal være invariant under transformationerne

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow e^{i\chi(x)}\psi(x) \\ \overline{\psi}(x) &\rightarrow e^{-i\chi(x)}\overline{\psi}(x) \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

hvor $\chi(x)$ er en arbitrær reel funktion.

Men det er klart, at $\mathcal{L}_0$ i (6.1) *ikke* er invariant under (6.4). Vi har nemlig

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x) &\equiv \overline{\psi}(x)(i\not{\partial} - m)\psi(x) \\ &\rightarrow i\overline{\psi}(x)\, e^{-i\chi(x)}\, \not{\partial}[e^{i\chi(x)}\psi(x)] - m\overline{\psi}(x)e^{-i\chi(x)}\psi(x)e^{i\chi(x)} \\ &= i\overline{\psi}(x)e^{-i\chi(x)}[i(\not{\partial}\chi(x)) \cdot e^{i\chi(x)}\psi(x) + e^{i\chi(x)}\,\not{\partial}\psi(x)] - m\overline{\psi}(x)\psi(x) \\ &= i\overline{\psi}(x)\,\not{\partial}\psi(x) - \overline{\psi}(x)\,\not{\partial}\chi(x)\psi(x) - m\overline{\psi}(x)\psi(x) \\ &= \mathcal{L}_0(x) - \overline{\psi}(x)\,\not{\partial}\chi(x)\psi(x) \neq \mathcal{L}_0(x) \end{aligned} \tag{6.5}$$

Vi konkluderer, at hvis gaugeprincippet er korrekt, så kan $\mathcal{L}_0$ givet ved (6.1) ikke være *hele* den tilsvarende Lagrange-tæthed.

Misren er, at differentialoperatoren ikke transformerer *gauge-kovariant* under en gaugetransformation. At en operator D_μ transformerer gauge-kovariant betyder, at under en gaugetransformation gælder

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = e^{i\chi(x)}D_\mu\, e^{-i\chi(x)} \tag{6.6}$$

Hvis der findes en passende sådan operator, kunne vi bruge den i stedet for ∂_μ til at "reparere" vores teori beskrevet ved $\mathcal{L}_0$. Vi ville så have

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(x) &= \overline{\psi}(x)(i\,\not{D} - m)\psi(x)\\ &\rightarrow \overline{\psi}'(x)(i\,\not{D}' - m)\psi'(x)\\ &= \overline{\psi}(x)\,e^{-i\chi(x)}(i\,e^{i\chi(x)}\,\not{D}\,e^{-i\chi(x)} - m)\,e^{i\chi(x)}\psi(x)\\ &= \mathcal{L}_1(x)\end{aligned} \tag{6.7}$$

Vi forsøger nu at konstruere den gauge-kovariante afledede (eller blot: Kovariante afledede) som

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathcal{A}_\mu(x) \tag{6.8}$$

hvor $\mathcal{A}_\mu(x)$ er et vist nyt felt, der må have sin egen opførsel under gaugetransformationer, som vi kan finde af (6.6)

$$\begin{aligned}D_\mu\psi(x) \rightarrow D'_\mu\psi'(x) &= e^{i\chi(x)}D_\mu e^{-i\chi(x)}e^{i\chi(x)}\psi(x)\\ &= e^{i\chi(x)}D_\mu\psi(x)\\ &= e^{i\chi(x)}[\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu(x)]\psi(x)\end{aligned} \tag{6.9}$$

men også:

$$\begin{aligned}D'_\mu\psi'(x) &= (\partial_\mu + \mathcal{A}'_\mu(x))e^{i\chi(x)}\psi(x)\\ &= i\partial_\mu\chi(x)e^{i\chi(x)}\psi(x) + e^{i\chi(x)}\partial_\mu\psi(x) + e^{i\chi(x)}\mathcal{A}'_\mu(x)\psi(x)\\ &= e^{i\chi(x)}[\partial_\mu + \mathcal{A}'_\mu(x) + i\partial_\mu\chi(x)]\psi(x)\end{aligned} \tag{6.10}$$

Altså må vi forlange

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_\mu(x) + i\partial_\mu\chi(x) &= \mathcal{A}_\mu(x) \quad \text{eller}\\ \mathcal{A}'_\mu(x) &= \mathcal{A}_\mu(x) - i\partial_\mu\chi(x)\end{aligned} \tag{6.11}$$

der stort set netop er de velkendte gaugetransformationer i elektrodynamikken!

Vi har herved udvidet Lagrange-tætheden fra $\mathcal{L}_0$ (som *ikke* var gaugeinvariant) til $\mathcal{L}_1$, der beskriver et fermionfelt i vekselvirkning med et vist andet felt $\mathcal{A}_\mu(x)$. Men hvad er dynamikken for dette A_μ-felt ? Vi forventer, at det må være beskrevet ved et bidrag til $\mathcal{L}$, som er (a) gaugeinvariant og Lorentz-invariant, og (b) indeholder 1. ordens afledede af $\mathcal{A}_\mu$.

Vi søger først det simplest mulige bidrag med disse egenskaber. Lad os definere udtrykket

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv [D_\mu, D_\nu] \tag{6.12}$$

som åbenbart er en gauge-kovariant differentialoperator:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{F}'_{\mu\nu} &= [D'_\mu, D'_\nu] = D'_\mu D'_\nu - D'_\nu D'_\mu\\ &= e^{i\chi(x)}D_\mu\,e^{-i\chi(x)}\,e^{i\chi(x)}D_\nu\,e^{-i\chi(x)}\\ &- e^{i\chi(x)}D_\nu\,e^{-i\chi(x)}\,e^{i\chi(x)}D_\mu\,e^{-i\chi(x)}\\ &= e^{i\chi(x)}[D_\mu, D_\nu]\,e^{-i\chi(x)} = e^{i\chi(x)}\mathcal{F}_{\mu\nu}\,e^{-i\chi(x)}\end{aligned} \tag{6.13}$$

Vi kan også finde et simpelt udtryk for $\mathcal{F}_{\mu\nu}$. Hertil der det bekvemt først, at bevise følgende Lemma, som vil spare mange små regninger:

Lemma: Lad $f(x)$ være en funktion af en eller flere variable, x, og lad ∂ betegne den partielle afledede (mht en af dem). Så er

$$[\partial, f] = (\partial f) \tag{6.14}$$

Meningen er her, at på venstre side betegner ∂ en differentialoperator, der virker på alt til højre for den, mens den på højre side kun virker på funktionen, f.

Bevis: Vi virker på en vilkårlig ny funktion, h med udtrykket og får:

$$[\partial, f]h = \partial(fh) - f(\partial h) = (\partial f)h$$

qed.

Herefter kan vi udregne

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mu\nu} &= [D_\mu, D_\nu] \\
&= [(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu(x)), (\partial_\nu + \mathcal{A}_\nu(x))] \\
&= [\partial_\mu, \partial_\nu] + [\partial_\mu, \mathcal{A}_\nu] + [\mathcal{A}_\mu, \partial_\nu] + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \\
&= 0 + \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + 0
\end{aligned} \tag{6.15}$$

altså

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu(x) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu(x) \tag{6.16}$$

der viser, at $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ simpelthen blot er et sædvanligt multiplikativt felt, der minder os om Maxwell-feltet. Heraf følger også, at $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ ikke alene er gauge-kovariant, men gauge*in*variant:

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu} \tag{6.17}$$

Vi kan så trivielt konstruere et Lorentz-invariant, gaugeinvariant bidrag til $\mathcal{L}$ og herved få vores endelige resultat

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)(i \not{D} - m)\psi(x) + \gamma \mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} \tag{6.18}$$

Leddet $\gamma \mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}$ er det "minimale" bidrag til den mulige dynamiske udvikling af $\mathcal{A}_\mu$-feltet. Der findes selvfølgelig uendeligt mange andre muligheder, som både er Lorentz-invariante og gaugeinvarianter. Fx kunne vi bruge enhver *funktion* af $\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}$, og vi kunne tænke på at rækkeudvikle den, så det næste (ikke-trivielle) bidrag blev på formen

$$\gamma'(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu})^2 \tag{6.19}$$

Der findes imidlertid meget alvorlige indvendinger mod (6.19) og højere potenser af $(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu})$. Vi kan her blot antyde baggrunden for disse.

Lad os starte med at give en dimensionsanalyse af de enkelte bidrag til (6.18). Vi betegner dimensionen af en funktion f med $[f]$ og angiver hermed den potens af energien som enheder af f regnes i. Fx

$$[m] = 1 \quad , \quad [dx] = [dt] = -1 \tag{6.20}$$

idet jo $c = \hbar = 1$. Da nu virkningsintegralet $= \int dtL = \int d^4x\mathcal{L}$ har samme dimension som $\hbar$ (som også er en virkning) og altså regnes dimensionsløst i vores enheder, gælder

$$[\mathcal{L}] = +4 \quad , \quad [\psi] = 3/2 \tag{6.21}$$

$$[\mathcal{A}_\mu] = [\partial_\mu] = +1 \Rightarrow [\mathcal{F}_{\mu\nu}] = 2 \Rightarrow [\mathcal{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] = 4 \Rightarrow [\gamma] = 0 \tag{6.22}$$

Dette viser også, at hvis vi tillader et led af formen

$$\gamma'(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu})^2$$

må $[\gamma'] = -4$. Men dette betyder, at teorien ikke kan renormeres, eller m.a.o. der kendes ikke nogen enkel metode til konsistent at beregne højere ordens kvanteeffekter: Teorien er temmelig ubrugelig. Vi skal om lidt antyde grunden til misren.

Lad os først omskrive teorien i en mere bekvem notation. Konstanten γ styrer den relative styrke af den måde, de 2 felter vekselvirker på. Lad os kalde denne konstant

$$\gamma = +\frac{\varepsilon_0}{4e^2Q^2} \tag{6.23}$$

og lad os "omscale" vores $\mathcal{A}_\mu$-felt til

$$\mathcal{A}_\mu(x) \equiv +ieQA_\mu(x) \tag{6.24}$$

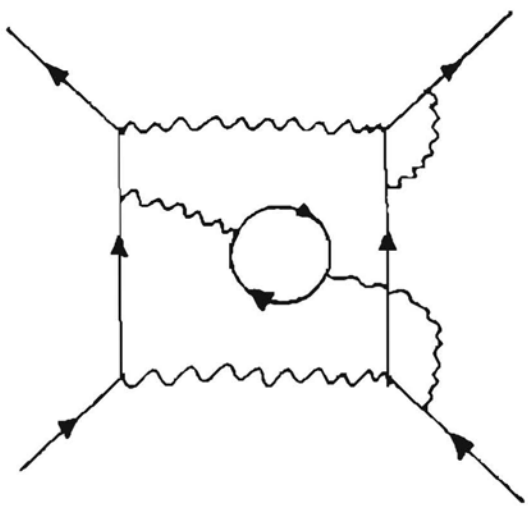
hvor Q er fermionens ladning. Idet vi definerer $F_{\mu\nu}$ ved

$$+ieQF_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu}$$

kan vi så skrive

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \overline{\psi}(x)(i\,\not{D} - m)\psi(m) - \frac{\varepsilon_0}{4}\,F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \\ &= \overline{\psi}(x)(i\,\not{\partial} - m)\psi(x) - \frac{\varepsilon_0}{4}\,F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - eQ\overline{\psi}(x)\,\not{A}\psi(x) \end{aligned} \tag{6.25}$$

som er den sædvanlige form af QED-Lagrange-funktion.



Figur 6.1:

Lad os nu betragte et Feynman-diagram af høj orden fig. (6.1). Værdien af diagrammet er et integral over $d^4l^{(1)}, d^{(4)}l^{(2)} \ldots d^{(4)}l^{(n)}$, hvor n er antallet af uafhængige loops i integralet. Propagatorerne bidrager negative potenser af disse loop-variable: n for fermionpropagatorer og to for fotonpropagatorer. Man kan herved vise, at skønt mere og mere indviklede diagrammer indeholder flere og flere loops, så vil det forøgede antal potenser af loop-variable i nævneren (propagatorerne) bevirke, at der "kun" findes 3 typer af divergente diagramdele i selv det mest indviklede Feynman-diagram, fig. (6.2). Her kan divergenserne af (b) og (c) absorberes i en såkaldt renormering af hhv fermionmassen og fermionladningen, medens divergensen af (a) fikseres af gaugeinvarians. Efter denne sk renormeringsprocedure er alle teoriens Feynman-diagrammer veldefinerede funktioner af teoriens parametre: m og $Q \cdot e$.

Hvis derimod vi tillod led af formen (6.19) med $[\gamma'] = -4$, ville vi få diagrammer med høje potenser af γ', der divergerede vilkårlig stærkt. Diagrammets dimension er jo nemlig amplitudens dimension (dvs uafhængig af antallet af vertexer), men mange potenser af γ' må så modvirkes af tilsvarende mange potenser af loop-variable *i tælleren*! Herved bliver der ingen mulighed for at absorbere disse divergente integraler i et endeligt antal renormerede fysiske parametre.

Konklusionen er overordentlig bemærkelsesværdig: Kravet om Lorentz-invarians og *gaugeinvarians* under fasetransformationer samt kravet om, at teorien skal være renormerbar, har ***éntydigt*** fastlagt hele kvanteelektrodynamikken, inclusive (som specialtilfælde!) hele den klassiske Maxwell-teori!

6.2 Ikke-Abelsk Yang-Mills theory (QCD)

Vi har tidligere set, at en forståelse af baryonerne som 3-kvark-tilstande førte til en formodning om, at alle kvarker optræder med et colour-kvantetal, der transformerer som en $SU(3)$-triplet. Vi skal nu udbygge denne antagelse samt forlange, at vores Lagrangefunktion for kvarker er eksakt invariant under $SU(3)_C$-transformationer, idet disse transformationer i overensstemmelse med gaugeprincippet tillades at variere fra begivenhed til begivenhed. Indeks, C, sættes undertiden på for at minde om, at vi tænker på colourgruppen og ikke flavourgruppen.

Vi betegner kvarkfeltet med $q(x)$ eller $q^i(x)$, hvor $i = 1, 2, 3$ er colour-index. Desuden er der naturligvis de sædvanlige 4 Dirac-indices:

$$(q) = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \left(q^i_\alpha(x)\right)$$

Altså, idet vi sætter colour-indeks for oven og Dirac-indeks for neden:

$$q^1 = \begin{pmatrix} q^1_1 \\ q^1_2 \\ q^1_3 \\ q^1_4 \end{pmatrix} \quad ; \quad q^2 = \begin{pmatrix} q^2_1 \\ q^2_2 \\ q^2_3 \\ q^2_4 \end{pmatrix} \quad ; \quad q^3 = \begin{pmatrix} q^3_1 \\ q^3_2 \\ q^3_3 \\ q^3_4 \end{pmatrix} \quad ;$$

Så transformerer kvarkfeltet under $SU(3)_C$ som

$$q^i \to U_{ij} q^j \quad \text{eller} \quad q \to \mathbf{U} q \tag{6.26}$$

og

$$\bar{q} \to \bar{q} \mathbf{U}^\dagger$$

hvor $\mathbf{U}$ er en 3×3 matrix, som er unitær og har determinant $= 1$.

Vi betragter dernæst udtrykket for den "frie" kvark-Lagrange-(tætheds)funktion

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}(i\,\partial\!\!\!/ - m)q \tag{6.27}$$

Vi tænker her på én kvarkflavour med masse m for kvarken. Alle andre kvarkflavours behandles analogt. Hvis vi for Ún gangs skyld udskriver alle indices, lyder (6.27)

$$\mathcal{L}_q = i\bar{q}^i_\alpha(x)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\mu}q^i_\beta(x) - m\bar{q}^i_\alpha(x)q^i_\alpha(x)$$

Under en gaugetransformation

$$q(x) \rightarrow \mathbf{U}(x)q(x) \quad , \quad \bar{q}(x) \rightarrow \bar{q}(x)\mathbf{U}^\dagger(x)$$

hvor transformationen er stedafhængig, er (6.27) *ikke* invariant:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_q \rightarrow \bar{q}'(i\,\partial\!\!\!/ - m)q' &= \bar{q}\mathbf{U}^\dagger(i\,\partial\!\!\!/ - m)\mathbf{U}q \\ &= \bar{q}\mathbf{U}^\dagger[i(\partial\!\!\!/\mathbf{U})q + \mathbf{U}(i\,\partial\!\!\!/ q)] - m\bar{q}\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}q \\ &= \mathcal{L}_q + i\bar{q}\mathbf{U}^\dagger(\partial\!\!\!/\mathbf{U})q \end{aligned} \tag{6.28}$$

Som i det Abelske tilfælde søger vi at udvide teorien ved at erstatte den afledede ∂_μ med en gauge-kovariant afledet:

$$\mathbf{D}_\mu = \partial_\mu + \mathcal{A}_\mu(x) \tag{6.29}$$

hvor $\mathcal{A}_\mu(x)$ er et 3×3 matrixfelt, og hvor vi vil forlange, at $\mathbf{D}_\mu$ transformerer gauge-kovariant:

$$\mathbf{D}_\mu \rightarrow \mathbf{D}'_\mu = \mathbf{U}\mathbf{D}_\mu\mathbf{U}^\dagger \tag{6.30}$$

Så har vi nemlig

$$\mathcal{L}_1 \equiv \bar{q}(i\,\mathbf{D}\!\!\!\!/ - m)q \rightarrow \bar{q}'(i\,\mathbf{D}\!\!\!\!/' - m)q = \bar{q}\mathbf{U}^\dagger(i\mathbf{U}\,\mathbf{D}\!\!\!\!/\,\mathbf{U}^\dagger - m)\mathbf{U}q = \mathcal{L}_1 \tag{6.31}$$

(6.30) fastlægger gauge-transformationsegenskaberne for $\mathcal{A}_\mu(x)$:

$$\mathbf{D}_\mu q \rightarrow \mathbf{D}'_\mu q' = \mathbf{U}\mathbf{D}_\mu\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}q = \mathbf{U}\mathbf{D}_\mu q = \mathbf{U}(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu)q$$

men også

$$\begin{aligned}\mathbf{D}'_\mu q' = (\partial_\mu + \mathcal{A}'_\mu(x))\mathbf{U}q &= (\partial_\mu\mathbf{U})q + \mathcal{A}'_\mu\mathbf{U}q + \mathbf{U}\partial_\mu q \\ &= \mathbf{U}[\mathbf{U}^\dagger(\partial_\mu\mathbf{U}) + \mathbf{U}^\dagger\mathcal{A}'_\mu\mathbf{U} + \partial_\mu]q \end{aligned} \tag{6.32}$$

Ved sammenligning fås så

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\mu &= \mathbf{U}^\dagger\mathcal{A}'_\mu\mathbf{U} + \mathbf{U}^\dagger(\partial_\mu\mathbf{U}) \\ \text{eller}\quad \mathcal{A}'_\mu &= \mathbf{U}\mathcal{A}_\mu\mathbf{U}^\dagger - (\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger \end{aligned} \tag{6.33}$$

Bemærk, at hvis matricerne er 1×1, dvs $\mathbf{U} = e^{i\chi}$, så er $\mathbf{U}\mathcal{A}_\mu\mathbf{U}^\dagger = \mathcal{A}_\mu$, og (6.33) er den sædvanlige opførsel for et Abelsk gaugefelt (6.11).

Vi søger nu som før et bidrag til $\mathcal{L}$, der kan beskrive dynamikken af $\mathcal{A}_\mu$-feltet. Hertil dannes først feltstyrkematricen[2]

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \equiv [\mathrm{D}_\mu, \mathrm{D}_\nu] \tag{6.34}$$

og vi finder ved at undersøge denne differentialoperators virkning på et kvarkfelt, at de rene differentialoperatorled hæver hinanden, og vi får

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu(x) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu(x) + [\mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{A}_\nu(x)] \tag{6.35}$$

I den Abelske teori er kommutatoren 0, men her er den $\neq 0$. Det er dette ikke-Abelske led, som gør teoriens fysiske indhold afgørende forskelligt fra QED.

Af (6.34) er det klart, at $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ transformerer gauge-*kovariant* :

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \to \mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathrm{U}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathrm{U}^\dagger \tag{6.36}$$

men i modsætning til det Abelske tilfælde er $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ *ikke* gauge-*invariant* ("kun" *ko*variant). Imidlertid kan vi danne et gauge*invariant* bidrag til $\mathcal{L}$ i nøje analogi til vores QED-bidrag. Vi bruger formen

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\not{D} - m)q + \gamma\, Tr\{\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\} \tag{6.37}$$

hvor Tr betyder sporet af matricernes produkt. At dette led er gaugeinvariant følger af det simple teorem om sporet af et produkt af 2 matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$:

$$Tr(\mathbf{AB}) = Tr(\mathbf{BA})$$

(**Bevis**: $Tr\mathbf{AB} = A_{ij}B_{ji} = B_{ji}A_{ij} = Tr(\mathbf{BA})$; summation over i og j underforstået).

Heraf følger, at under en gaugetransformation opfører sidste led i (6.37) sig som:

$$\begin{aligned} Tr\{\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\} \to Tr\{\mathcal{F}'_{\mu\nu}\mathcal{F}'^{\mu\nu}\} &= Tr\{\mathrm{U}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathrm{U}^\dagger\mathrm{U}\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathrm{U}^\dagger\} \\ &= Tr\{\mathrm{U}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathrm{U}^\dagger\} = Tr\{\mathrm{U}^\dagger\mathrm{U}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\} \\ &= Tr\{\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\} \end{aligned} \tag{6.38}$$

(6.37) er den endelige Yang-Mills Lagrange-funktion. Den er entydigt fastlagt af kravene: Lorentz-invarians, gaugeinvarians, renormerbarhed samt kravet om, at den kun skal involvere felterne $q(x)$ og $\mathcal{A}_\mu(x)$. Vi har ikke på noget sted eksplicit brugt, at gaugegruppen var $SU(3)_C$. QCD-teorien består blot i at vælge denne gaugegruppe og bruge (6.37). De moderne teorier for de svage vekselvirkninger benytter en lignende form, men dels baseret på en anden gruppe, hvorved QED optræder som *en del* af teorien (!), dels med ekstra vekselvirkninger til visse skalare felter (Higgs-felter), som "bryder gaugesymmetrien spontant". Herom skal vi lære i kap. 8.

I den resterende del af dette kapitel skal vi omtale enkelte fysiske konsekvenser af QCD. Hertil behøver vi først lidt gruppeteoretisk værktøj.

---

[2]Bemærk, at vi stadig tænker på teoriens klassiske udgave således at kommutatoren kun vedrører colourmatricernes matrix-egenskaber, men derimod ikke feltstyrkernes Hilbertrums-operatoregenskaber. Faktisk er det for ikke-Abelske gauge-teorier bekvemt at udføre kvantiseringen i path-integral formuleringen, hvor man undgår at tale om operatorer.

6.3 Elementer af teorien for kompakte, simple Lie-grupper

Som allerede nævnt er en Lie-gruppe en topologisk gruppe, som lokalt kan forsynes med koordinater, efter hvilke der kan differentieres. Hvis gruppen, betragtet som topologisk rum, er kompakt, taler vi om en kompakt Lie-gruppe.

Eksempel:
$U(1) = \{e^{i\chi}|\chi \in \mathbf{R}\}$ er en kompakt Lie-gruppe; dens elementer kan afbildes på den komplekse enhedscirkel, som er kompakt.

Eksempel:
Gruppen af specielle Lorentz-transformationer uden rotation, med hastighed langs x-aksen, er en *ikke*-kompakt Lie-gruppe. Som koordinat kan vi bruge hastigheden β for Lorentz-transformationen. Da $-1 < \beta < 1$, ligger β i et åbent, ikke kompakt interval.

Mængden af alle parametriserede kurver i gruppen gennem enhedselementet definerer en tilsvarende mængde tangenter i enhedselementet. Mængden af disse tangenter danner et vektorrum (tangentrummet), kaldet *Lie-algebraen.* Vi antager vektorrummets dimension endelig og kalder den både dimensionen af Lie-algebraen og dimensionen af Lie-gruppen.

Mængden af de gruppeelementer h, som kommuterer med *alle* gruppens elementer, kaldes gruppens *centrum.* De udgør en kommutativ, dvs *Abelsk*, undergruppe. Hvis centrum er diskret, siges gruppen at være *semi-simpel.*.

Eksempel
$U(1)$ er en Abelsk gruppe med en kontinuert mængde af elementer. Den er sit eget ikke-trivielle centrum. Den er altså *ikke* semi-simpel.

Eksempel
$SU(2)$ har centrum= $\{+I, -I\}$, hvor I er 2×2 enhedsmatricen. Centret er diskret og gruppen er semi-simpel (endda simpel, se nedenf.).

Man kan vise, at enhver endelig dimensional, kompakt Lie-gruppe $\mathcal{G}$ kan skrives som det direkte produkt af undergrupper, som følger

$$\mathcal{G} = U(1)_{(1)} \otimes U(1)_{(2)} \otimes \ldots \otimes U(1)_{(n)} \otimes \mathcal{G}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{G}_{(m)} \tag{6.39}$$

Her er grupperne $U(1)_{(i)}$ undergrupper, der alle er isomorfe med $U(1)$, og hvis elementer alle kommuterer med *alle* gruppens elementer. Undergrupperne $\mathcal{G}_i$ har flg. egenskaber: De kan *ikke* på nogen måde deles i to dele $g_i \otimes h_i$, hvor g_i er en undergruppe, og hvor alle elementer i mængden h_i kommuterer med alle elementer i g_i. Sådanne grupper $\mathcal{G}_i$ kaldes *simple*. Alle elementer i $\mathcal{G}_i$ kommuterer med alle elementer i $\mathcal{G}_j$ for $i \neq j$. Undergruppen $\mathcal{G}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{G}_m$ kaldes den *semi-simple* del af $\mathcal{G}$.

Hele vores Yang-Mills konstruktion er uafhængig af, om gaugegruppen er simpel, semi-simpel eller ikke-semi-simpel. I QCD er den $SU(3)_C$, som er simpel.

I området omkring enhedselementet 1 kan vi skrive vores gruppeelementer som

$$\mathcal{U}(\bar{\theta}) = 1 + i\bar{\theta}\cdot\bar{\mathcal{T}} \tag{6.40}$$

hvor $\bar{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_d)$ er d reelle, infinitesimale tal, når gruppens dimension er d, og hvor $\bar{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_d)$ er de d generatorer af Lie-algebraen: basisvektorer i tangentrummet. Ved at sammensætte elementer af formen (6.40) kan vi vise, at

$$\exp\{i\bar{\theta}\cdot\bar{\mathcal{T}}\} \tag{6.41}$$

er et gruppeelement, også når $\bar{\theta}$ er en endelig vektor.

Lad

$$\mathcal{U}_1 = e^{i\theta\mathcal{T}} \quad \text{og} \quad \mathcal{U}_2 = e^{i\tau\mathcal{S}}$$

være 2 gruppeelementer, idet θ og τ er reelle, og $\mathcal{T}$ og $\mathcal{S}$ er elementer i Lie-algebraen. Så er også

$$\mathcal{U}_1^{-1}\mathcal{U}_2^{-2}\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2$$

et gruppeelement. Ved at udvikle til 2. orden i θ og τ kan man vise, at dette element (for θ, τ små) er på formen (t afhænger af θ og τ)

$$1 + it[\mathcal{T}, \mathcal{S}] \tag{6.42}$$

som viser, at hvis $\mathcal{T}$ og $\mathcal{S}$ tilhører Lie-algebraen, så gør (i multipliceret med) deres kommutator det også.

Lad os nu betragte den ved (6.40) definerede *basis* til Lie-algebraen $\{\mathcal{T}_i\}$. Da kommutatoren $i[\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j]$ er et element i Lie-algebraen, må den kunne skrives som en linearkombination af basiselementerne

$$[\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j] = iC_{ij}^k\mathcal{T}_k \tag{6.43}$$

hvor vi har underforstået summation over k fra 1 til d, og hvor sættet $\{C_{ij}^k\}$ kaldes algebraens *strukturkoefficienter*. De er klart antisymmetriske i i og j (venstre side). Det kan endvidere altid lade sig gøre at vælge nye linearkombinationer af $\mathcal{T}_i$'erne, så at de tilsvarende nye strukturkoefficienter bliver antisymmetriske i alle 3 indices. Vi bruger så skrivemåden

$$[\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j] = if_{ijk}\mathcal{T}_k \tag{6.44}$$

Normalt vil vi interessere os for unitære transformationer. Så er - efter (6.40) - generatorerne hermiteske og strukturkoefficienterne reelle.

Vi kan forme en vigtig *invariant* operator C, kaldet Casimir-operatoren. Den er invariant i den forstand, at den kommuterer med alle generatorerne og derfor kommuterer med alle gruppeelementer. Vi definerer den ved

$$C = \mathcal{T}_i\mathcal{T}_i \tag{6.45}$$

[3] For at bevise at den er invariant, bemærker vi først den meget nyttige egenskab ved kommutatorer:

$$[C, AB] = [C, A]B + A[C, B]$$

---

[3]Strengt taget kan denne definition først siges at have mening i en matriksrepræsentation (se nedenfor), fordi *produktet* af to generatorer ikke a priori er defineret i algebraen: det er kun kommutatoren. Men når så Casimiroperatoren er defineret i alle matriksrepræsentationer, er den de facto defineret generelt.

der viser hvordan reglen fungerer ganske som differentiation af et produkt. Så er

$$\begin{aligned}[\mathcal{C}, \mathcal{T}_j] &= [\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j]\mathcal{T}_i + \mathcal{T}_i[\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j] \\ &= i f_{ijk}\mathcal{T}_k\mathcal{T}_i + i\mathcal{T}_i f_{ijk}\mathcal{T}_k \\ &= i f_{ijk}(\mathcal{T}_k\mathcal{T}_i + \mathcal{T}_i\mathcal{T}_k) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.46}$$

da f_{ijk} er antisymmetrisk i i, k medens koefficienten er symmetrisk.

Ved en *matriksrepræsentation* af Lie-algebraen forstås et sæt af d matricer $\mathbf{T}_i$, for hvilke

$$[\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j] = i f_{ijk}\mathbf{T}_k \tag{6.47}$$

Disse genererer en matriksrepræsentation af gruppeelementerne:

$$\mathcal{U}(\vec{\theta}) = \exp(i\vec{\theta}\cdot\vec{\mathcal{T}}) \rightarrow \mathbf{U}(\vec{\theta}) = \exp(i\vec{\theta}\cdot\vec{T}) \tag{6.48}$$

Det er klart, at hvis $\mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbf{U}_1$ og $\mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbf{U}_2$, så gælder

$$\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbf{U}_1\mathbf{U}_2 \quad \text{etc.}$$

Ud fra strukturkoefficienterne kan vi danne en særlig vigtig matriksrepræsentation: den *adjungerede* repræsentation. Først bruger vi den trivielle identitet

$$[\mathcal{T}_i, [\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k]] + [\mathcal{T}_j, [\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_i]] + [\mathcal{T}_k, [\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j]] = 0$$

til at bevise den sk Jacobi-identitet for strukturkoefficienterne

$$f_{ijk}f_{klm} + f_{jlk}f_{kim} + f_{lik}f_{kjm} = 0 \tag{6.49}$$

Heraf følger, at $d\times d$-matricerne (af hvilke der er d)

$$(\theta_a)_{bc} = -i f_{abc} \tag{6.50}$$

tilfredsstiller algebraens ombytningsrelationer:

$$[\theta_a, \theta_b] = i f_{abc}\,\theta_c \tag{6.51}$$

Vi vil nu særlig koncentrere os om $SU(N)$: Grupperne af specielle (det $\equiv 1$), unitære $N\times N$ matricer. Sådanne matricer danner selv en repræsentation af gruppen, som kaldes den *fundamentale* repræsentation. At determinanten af en unitær $N\times N$ matrix er $= 1$, er ensbetydende med at sporet af generatoren er 0:

Lad $\mathbf{U}$ være en $N\times N$ matrix tæt ved $\mathbf{1}$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{1} + i\varepsilon\cdot\mathbf{T}$$

hvor $\mathbf{T}$ er den hermiteske matriksgenerator, og ε er lille. Så er

$$\begin{aligned}\det\mathbf{U} &= \det(\mathbf{1} + i\varepsilon\mathbf{T}) = (1 + i\varepsilon T_{11})(1 + i\varepsilon T_{22})\cdot\ \ldots\ \cdot(1 + i\varepsilon T_{NN}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2T^2) \\ &= 1 + i\varepsilon\sum_i T_{ii} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{6.52}$$

der viser, at sporet af $\mathbf{T}$ er 0.

Den mest generelle. komplekse $N \times N$-matriks indeholder $2 \times N^2$ reelle parametre. en hermitesk $N \times N$ matriks har reelle diagonalelementer og indeholder $\frac{1}{2} \times 2 \times (N^2 - N) + N = N^2$ reelle parametre. Er endelig sporet 0, er der tilbage $N^2 - 1$ reelle parametre.

Heraf følger. at $SU(N)$ har dimension $N^2 - 1$: Der er $(N^2 - 1)$ generatorer. For generatorerne i den fundamentale repræsentation kan $N - 1$ vælges diagonale, fx

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

der alle har spor 0. I $SU(N)$ findes med andre ord $N - 1$ generatorer, som kommuterer.

Eksempel:
SU(2)

Som en velkendt repræsentation af generatorerne i den fundamentale repræsentation tager vi de $2^2 - 1 = 3$ Pauli-matricer

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

idet σ_3 er diagonal, σ_1 symmetrisk og reel, samt σ_2 antisymmetrisk og imaginær. Der gælder

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\, \sigma_k$$

Vælges i stedet $\tau_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ fås

$$[\tau_i, \tau_j] = i\varepsilon_{ijk}\tau_k$$

Betegnes de abstrakte generatorer $\bar{\mathcal{I}}$, er Casimir-operatoren

$$\bar{\mathcal{I}}^2 \equiv \mathcal{I}_i\mathcal{I}_i$$

der som velkendt er en $SU(2)$ invariant, der har værdien $j(j+1)$ i en irreducibel repræsentation svarende til spin j (j heltallig eller halvtallig).

I den adjungerede repræsentation er

$$(\theta_a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc}$$

eller

$$\theta_1 = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \theta_2 = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \theta_3 = -i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.53}$$

for hvilke

$$[\theta_i, \theta_j] = i\varepsilon_{ijk}\, \theta_k$$

I $SU(N)$ indfører vi en tilsvarende notation og skriver i den fundamentale repræsentation ($N \times N$ matricer)

$$\mathbf{T}_a = \frac{1}{2}\lambda_a \quad , \quad a = 1, \ldots, N^2 - 1$$

og normerer disse, så

$$Tr(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab} \tag{6.54}$$

I den fundamentale repræsentation er antikommutatoren $\{\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b\}$ hermitesk og kan følgelig skrives som en linearkombination af $\mathbf{T}_a$'erne selv *plus* enhedsmatricen $\mathbf{1}$. Altså gælder

$$\{\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b\} = d_{abc}\mathbf{T}_c + \frac{1}{N}\delta_{ab}\mathbf{1} \tag{6.55}$$

hvor d_{abc} er reelle koefficienter, og hvor koefficienten til $\mathbf{1}$ er en følge af (6.54).

Vi finder så for Casimir-operatoren i den fundamentale repræsentation

$$(T_a)_{ij}(T_a)_{jk} = C_F \delta_{ik} \tag{6.56}$$

idet $\mathbf{1} = \{\delta_{ik}\}$ er den eneste matriks,der kommuterer med alle T'erne. Af (6.55) fås (ved at tage sporet)

$$C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}$$

Videre er det muligt at vælge strukturkoefficienterne, så

$$f_{abc} f_{dbc} = N\delta_{ad} \tag{6.57}$$

Eksempel:
SU(3)
Vi har $3^2 - 1 = 8$ generatorer, af hvilke 2 samtidigt kan være på diagonalform. Vi bruger Gell-Mann's notation og sætter

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
\lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.58}$$

for hvilke der klart gælder

$$Tr(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab} \tag{6.59}$$

Vi sætter $[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c$ og får $8^3 = 512$ strukturkoefficienter, af hvilke langt de fleste er 0. De øvrige falder i sæt, hvor indices er permutationer af hinanden. Idet vi kort betegner f_{abc} ved (abc), kan vi så sammenfattende skrive

$$\begin{aligned}(123) &= 1, \\ (458) &= (678) = \sqrt{3}/2 \\ (147) &= -(156) = (246) = (257) = (345) = -(367) = \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{6.60}$$

$$\sum_a \frac{1}{4}\lambda_a^2 = \frac{8}{6}\mathbf{1} = \frac{4}{3}\mathbf{1} \tag{6.61}$$

$$\sum_{a,b,c}(f_{abc})^2 = 24 \qquad (= 8\cdot 3)$$

$$\sum_{c,d} f_{acd} f_{bcd} = 3\delta_{ab} \tag{6.62}$$

6.4 Gluoner, Feynman-regler

Vi omskriver nu QCD Lagrange-funktionen (6.37), idet vi bruger en notation baseret på, hvad vi har lært i forrige afsnit.

Først udvikler vi 3×3 matriksfeltet $\mathcal{A}_\mu$ på de 8 hermiteske matricer

$$\mathbf{T}^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad , \quad a = 1,\ldots,8 \tag{6.63}$$

$$\mathcal{A}_\mu(x) \equiv -ig\mathbf{T}^a A_\mu^a(x) \tag{6.64}$$

(summation over a underforstået). Hertil bemærkes:

Da $i\,\not{D}$ er hermitesk,[4] er $\mathbf{T}^a$ i (6.64) nødvendigvis en hermitesk matrix, og A_μ^a et hermitesk felt. Der findes $3\times 3 = 9$ uafhængige 3×3 matricer, men som Ún af dem kan vælges enhedsmatricen, der kommuterer med alle andre og svarer til et sædvanligt Abelsk gaugefelt. Dette er vi ikke interesserede i, så længe vi kun ønsker at studere QCD baseret på den simple gruppe $SU(3)_C$. Altså er sættet $\mathbf{T}^a$ tilstrækkeligt. Parameteren g skal vi om et øjeblik fiksere i termer af γ.

På tilsvarende måde definerer vi 8 feltstyrketensorer $F_{\mu\nu}^a(x)$ ved

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = -ig\mathbf{T}^a F_{\mu\nu}^a(x) \tag{6.65}$$

Der gælder så

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu} &= -ig\mathbf{T}^a F_{\mu\nu}^a = -ig[\mathbf{T}^a\partial_\mu A_\nu^a(x) - \mathbf{T}^a\partial_\nu A_\mu^a(x)] - g^2 A_\mu^a A_\nu^b[\mathbf{T}^a,\mathbf{T}^b] \\ &= -ig\mathbf{T}^a(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) - ig^2 f_{abc}A_\mu^a A_\nu^b \mathbf{T}^c \\ &= -ig\mathbf{T}^a(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) - ig^2 f_{bca}\mathbf{T}^a A_\mu^b A_\nu^c\end{aligned} \tag{6.66}$$

eller

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \tag{6.67}$$

[4] Hamiltonfunktionen er hermitesk, dvs i forbindelse med integration over rummet; ($i\,\not{D}$ er dog ikke hermitesk som simpel matriks i Dirac-rummet).

Videre

$$Tr\{\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\} = -g^2 F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu b} Tr\{\mathbf{T}^a\mathbf{T}^b\} = -\frac{g^2}{2} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu b}\delta_{ab} = -\frac{1}{2} g^2 F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}$$

Vi sætter nu

$$\gamma \equiv \frac{1}{2g^2} \tag{6.68}$$

og får så

$$\mathcal{L}_{QCD} = \overline{q}(i\,\not{D} - m)q - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} = \overline{q}(i\,\not{\partial} - m)q + g\overline{q}\,\mathbf{T}^a \not{A}^a q - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} \tag{6.69}$$

Dette udtryk, som minder utroligt om vores QED-Lagrange-funktion, viser otte gluonfelter A^a_μ, der vekselvirker med kvarkerne *samt med hinanden*. Dette sidste følger af formen af sidste led:

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} &= [\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu][\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a} + g f_{ab'c'} A^{\mu b'} A^{\nu c'}] \\ &= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) + 2g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu (\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) \\ &\quad + g^2 f_{abc} f_{ab'c'} A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu b'} A^{\nu c'} \end{aligned} \tag{6.70}$$

Her er første led præcist af QED-formen og giver som denne anledning til en gluonpropagator. Andet led viser en tre-gluonkobling (tre A-faktorer) af styrken g, medens tredje led viser en fire-gluonkobling af styrken g^2.

Under en gaugetransformation gælder (6.33)

$$\mathcal{A}'_\mu = \mathbf{U}\mathcal{A}_\mu \mathbf{U}^\dagger - (\partial_\mu \mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger$$

Lad os omskrive dette i vores nye notation og bruge det på en infinitesimal gaugetransformation

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = e^{-i\theta^a(x)\mathbf{T}^a} &\simeq (1 - i\theta^a(x)\mathbf{T}^a)\,: \\ -ig\mathbf{T}^a(A'_\mu)^a(x) &= [1 - i\theta^a(x)\mathbf{T}^a](-ig\mathbf{T}^{a'} A^{a'}_\mu(x))(1 + i\theta^a(x)\mathbf{T}^a) + i\partial_\mu\theta^a(x)\mathbf{T}^a \\ &= -ig\mathbf{T}^a A^a_\mu(x) - g A^{a'}_\mu(x)\theta^a(x)[\mathbf{T}^a, \mathbf{T}^{a'}] + i\partial_\mu\theta^a(x)\mathbf{T}^a \\ &= -ig\mathbf{T}^a A^a_\mu(x) - ig A^{a'}_\mu(x)\theta^a(x) f_{aa'c}\mathbf{T}^c + i\partial_\mu\theta^a(x)\mathbf{T}^a \end{aligned} \tag{6.71}$$

eller

$$A'^a_\mu(x) = A^a_\mu(x) + A^b_\mu(x)\theta^c(x) f_{cba} - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) \tag{6.72}$$

Lad os specielt betragte en *global* gaugetransformation, hvor $\theta^a(x)$ er uafhængig af x. Så har vi

$$A'^a_\mu(x) = [\delta_{ab} - \theta^c f_{abc}]A^b_\mu(x) = [\delta_{ab} - i\theta^c[-if_{abc}]]A^b_\mu(x) = [\mathbf{1} - i\theta^c\tilde{\mathbf{T}}^c]_{ab} A^b_\mu(x) \tag{6.73}$$

hvor

$$(\tilde{\mathbf{T}}^c)_{ab} = -if_{cab}$$

er $SU(3)$ generatoren i den adjungerede repræsentation, som er 8-dimensional fordi der er 8 generatorer og alle indices derfor løber over 8 værdier.

Altså:

Søjlen bestående af de 8 elementer, $A_\mu^a(x)$ for $a = 1,2,3,4,5,6,7,8$ transformerer over i lgn.(6.73), som er den a'te række af en matriksligning: på højre side står matriksproduktet af (i) 8×8 matricen

$$[1 - i\sum_{c=1}^{8} \theta^c \check{\mathrm{T}}^c]$$

med matrikselementer

$$[1 - i\theta^c \check{\mathrm{T}}^c]_{ab}$$

og (ii) 8-søjlen med elementer $A_\mu^b(x)$, for $b = 1,2,3,4,5,6,7,8$. Som regel underforstår vi summationer over dobbeltforekommende indices.

Hermed har vi vist, at under en global $SU(3)$ colour transformation transformeres de 8 gluonfelter som en *colour-oktet*.

Lad os opsummere, hvad vi har fundet:

Antagelsen om eksakt $SU(3)_C$-invarians i en teori med kvarker, der transformerer efter den fundamentale triplet-repræsentation, har ført os via gaugeprincippet til en éntydig minimal teori (QCD ≡ quantum chromodynamics) for de stærke vekselvirkninger. Teorien indeholder 8 masseløse gluonfelter, der tilhører den adjungerede oktetrepræsentation. Gluonerne vekselvirker ikke blot med kvarkerne, men også med hinanden.

Vi fremhæver nu følgende fundamentale resultat, som gælder for alle ikke-Abelske gauge-teorier:

Alle kvarkflavours kobler til gluonerne med samme koblingskonstant, g!

Dette kommer af, at denne kobling ifølge ovenstående er givet Úntydigt ved gluonernes selvkobling.

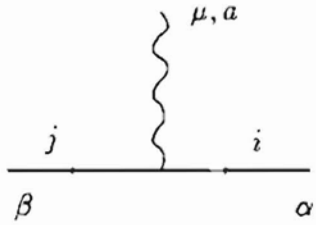
Heraf følger straks, at hvis vi adderer led til $\mathcal{L}_{QCD}$ svarende til N_f kvarkflavours:

$$\mathcal{L}_{QCD}(N_f) = \sum_{i=1}^{N_f} \overline{q}^{(i)}(i\not{D} - m_i)q^{(i)} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$$

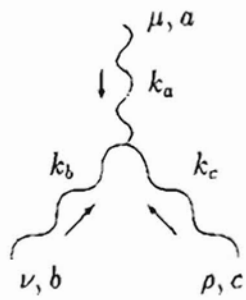
så får vi en Lagrange-funktion, hvor alle led - undtagen masseledet - er invariant under $SU(N_f)$ mellem flavourindices. Under sådanne transformationer erstattes et kvark-felt af en vis flavour med en linearkombination af kvark-felter med forskellige flavours. Alle disse kobler nu ens, og derfor kobler også linearkombinationen på samme måde. Vi har her nøglen til en forståelse af både isospin-invarians og af den approksimative $SU(3)$ flavour-invarians, vi mødte under omtalen af kvarkmodellen. Disse symmetrier er brudt på grund af kvarkernes masser. Symmetribruddet er ringe hvis kvarkmasserne ikke spiller nogen stor rolle. Det vil dels være tilfældet hvis kvarkmasserne ligger tæt på hinanden (hvad de fleste ikke gør) eller hvis der er en anden masse-parameter i problemet, hvis betydning er dominerende.

Som vi skal se i næste paragraf, er der netop en ny parameter (Λ), som optræder i den *kvantiserede teori*, og som specificerer teorien og $SU(N_f)$-bruddet.

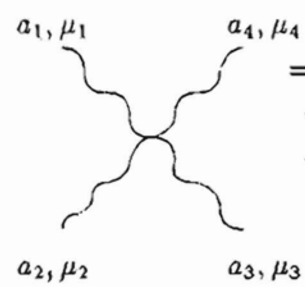
Vi afslutter dette afsnit med uden bevis at nedskrive Feynman-reglerne for QCD-teoriens vertexer; propagatorerne er diagonale i colourindices og har ellers det fra QED velkendte udseende.



$$= ig(T_a)_{ij}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \tag{6.74}$$



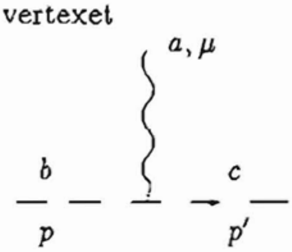
$$= g f_{abc}[g^{\mu\rho}(k_c - k_a)^\nu + g^{\mu\nu}(k_a - k_b)^\rho + g^{\nu\rho}(k_b - k_c)^\mu] \tag{6.75}$$



$$\begin{aligned} = & -ig^2[f_{a_1a_2b}f_{ba_3a_4}(g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4} - g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}) \\ & + f_{a_1a_3b}f_{ba_2a_4}(g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} - g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}) \\ & + f_{a_1a_4b}f_{ba_2a_3}(g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} - g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4})] \end{aligned} \tag{6.76}$$

Her er indices a, b, c etc. $SU(3)$-oktet indices, i, j etc. er triplet indices, μ, ν, ρ er Lorentz-indices, og α, β er Dirac-indices.

Disse vertexer og deres form kommer ret direkte fra (6.69) og (6.70). En præcis udledelse er imidlertid meget uigennemskuelig ved anvendelse af de kvantiseringsmetoder, vi brugte i kap. 3 og 5. Der er udviklet betydeligt mere slagkraftige og elegante metoder baseret på Feynman's formulering af kvantemekanikken vha "path-integraler" eller "funktionalintegraler". Vi skal ikke komme nærmere ind herpå, men blot nævne at man i ikke-Abelske gaugeteorier får brug for at indføre gauge-afhængige ekstra frihedsgrader, som så at sige subtraherer de ufysiske frihedsgrader væk igen. I en vigtig klasse af kovariante gauges indføres således "skalære spøgelser med Fermi-statistik (!)", som kobler til gluoner (men ikke til kvarker) efter vertexet



$$= -g f_{cba} p'_\mu \tag{6.77}$$

Disse såkaldte Fadeev-Popov spøgelser er $SU(3)_c$-oktetter. Vi får ikke brug for dem i dette kursus.

6.5 Renormering. "The Running Coupling Constant". Asymptotisk frihed

QCD-teoriens renormaliserbarhed beror (som det var tilfældet i QED) på det forhold, at koblingskonstanten g er dimensionsløs.

Lad os et øjeblik betragte $\mathcal{L}_{QCD}$ i den tilnærmelse, hvor vi ser bort fra alle andre kvarker end u- og d-kvarker, og hvor vi endvidere ser bort fra disse kvarkers masser. I denne approksimation er teorien fuldstændig *"skalainvariant"*: Omdefinerer vi enheden for længde og (hvad der er det samme) energi ser vi, at teorien forbliver invariant, når felterne tilsvarende omnormeres. Dette ville ikke være tilfældet med masseleddet, og det ville ikke være tilfældet med en teori indeholdende en koblingskonstant med en dimension.

En sådan teori *uden* parameter med en dimension synes at være en yderst dårlig kandidat til en teori for de stærke vekselvirkninger. Det er velkendt, at de stærke vekselvirkninger netop så at sige peger på en karakteristisk længde eller energi. Vi nævner eksempler på karakteristiske parametre - alle af samme størrelsesorden - som må antages at være nært forbundet:

Hadronernes dimension	$\sim 1fm \sim 5GeV^{-1}$
totale hadrontværsnit	$\sim (1fm)^2$
den universelle Regge-hældning	$\alpha' \sim 1GeV^{-2}$
middelværdien $\langle p_\perp \rangle$ af transversalimpulsen af sekundære partikler i højenergetiske stød:	$\langle p_\perp \rangle \sim .2 - .4GeV$
de laveste hadronmultipletters masser	$\sim 1GeV$.

"Heldigvis" viser det sig at en *kvante*-feltteori baseret på vores Lagrange-funktion $\mathcal{L}_{QCD}$ (6.69) kræver en ikke-triviel omfortolkning af betydningen af alle teoriens parametre. Denne omfortolkning betegnes som en *renormering* af teorien.

Ganske som i tilfældet af QED, synes en simpel fortolkning af teoriens loop-diagrammer at give anledning til divergente integraler. Men via renormeringsproceduren absorberes disse i en redefinition af de fysiske parametre i teorien. Dette er netop muligt, fordi koblingskonstanten g *ikke* indeholder en dimensioneret skala. Men under denne renormering skifter teorien i virkeligheden karakter på en temmelig radikal måde: *Der indføres en ny parameter med en dimension til erstatning for g!* Man taler undertiden lidt jargonagtigt om "dimensional transmutation".

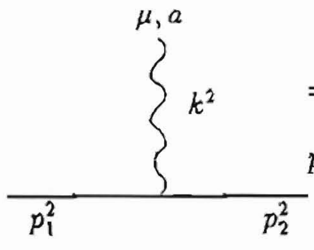
Vi kan her slet ikke gå ind på detaljerne i, hvorledes dette fænomen opstår, men vi skal forsøge kort at beskrive det:

Lad os først forsøge en intuitiv indfaldsvinkel. En koblingskonstant er analog til en elektrisk ladning. Størrelsen er noget, vi kan forsøge at *måle* ved at lade ladningen vekslevirke med passende felter. Den elektriske ladning måler vi ved at lade den vekselvirke med et elektromagnetisk felt. Colour-ladningen, dvs. QCD-koblingskonstanten, måles i princippet på samme måde, bortset fra, at vi ikke har noget "klassisk" felt til rådighed, vi må på en eller anden måde nøjes med de kvante-felt-ekscitationer, der opstår under forskellige kollisioner mellem kvarker og gluoner.

Denne ladning/koblingskonstant har en størrelse, hvis "sande værdi" stort set ikke har nogen mening, og som i hvert fald ikke kan måles. Det eneste, vi kan måle, er den *effektive* værdi, som er resultatet af den *afskærming*, eller *antiafskærmning*, de øvrige felter giver anledning til. Afskærmningen er analog til den polarisation, der forekommer klassisk i et dielektrikum. Her vil atomernes negative ladningsdele tilrækkes af en positiv prøveladning anbragt i dialektriket, mens de positive ladninger i stoffet vil frastødes. Resultatet er, at den totale ladning inden for en vis kugleskal bliver modificeret i forhold til den tilsvarende værdi i vakuum. I kvantefeltteorien optræder et tilsvarende fænomen, selv i vakuum. De elektrisk ladede felter (elektron-positronfelterne) rundt om en prøveladning undergår selv i vakuumtilstanden uundgåeligt kvantefluktuationer analogt til nulpunktsfluktuationen for en enkelt harmonisk oscillator i dens grundtilstand, dens "vakuum". Disse fluktuationer beskrives i et Feynmandiagramsprog ved vakuumdiagrammer, hvor der virtuelt dannes et elektron-positronpar, som kort efter annihilerer. Men prøveladningen vil uvægerligt vekselvirke med disse fluktuationer med det resultat, at prøveladningens *effektive* størrelse, dvs størrelsen inklusive korrektionerne fra feltfluktuationerne, igen afhænger af radius i den kugleskal, man måler indenfor. I et eksperiment, der foregår som et spredningseksperiment karakteriseret ved en vis (invariant) impuloverførsel, vil man på grund af ubestemthedsrelationerne være bundet til en "rumlig opløsningsevne" af størrelse som den inverse impuls. Man kan forestille sig eksperimenter udført ved højere og højere energier og impulser, hvorved vi bliver istand til at skrælle mere og mere af denne korrektionssky hidrørende fra kvantefluktuationerne fra. Det bliver så et spørgsmål, hvordan den effektive ladning – eller i QCD, den effektive koblingskonstant – afhænger af størrelsen af denne uundgåelige korrektionssky.

Det viser sig, at effekten heraf kan beregnes i perturbationsteori under forudsætning af, at den effektive koblingskonstant er passende lille. Det uhyre interessante resultat er, at hvor der for QED finder en vis afskærmning sted, er forholdet for en ikke-Abelsk gaugeteori som QCD helt modsat. Den omstændighed, at ikke blot kvarkerne, men også gluonerne deltager i afskærmningen, viser sig at bevirke, at der effektivt sker en *anti-afskærmning:* Den effektive koblingskonstant bliver ikke mindre jo større prøvekuglen bliver, den bliver større. Modsat når prøvekuglen bliver mindre: ved meget korte afstande er den effektive koblingskonstant lille. Det er dette forhold, der omtales som asymptotisk frihed, og som bevirker, at QCD kvalitativt kan redgøre for, hvorfor kvarker ikke kan fjernes fra hadroner, men alligevel se næsten fri ud inden i hadronerne.

Lad os herefter skitsere en lidt mere formel behandling af problemet. Betragt det fundamentale kvark-gluon-vertex:



$$= ig\mathbf{T}^a\gamma_\mu \qquad p_2 - p_1 = k \tag{6.78}$$

Når hensyn tages til højere ordener i perturbationsudviklingen kan vi forestille os, at der kommer korrektioner til dette vertex. Vi kan kalde det abstrakte vertex, som i princippet er resultatet af at addere alle Feynman-diagrammer med to ydre kvarklinjer og én gluonlinje for

$$i\Gamma_\mu(p_1^2, p_2^2, k^2)\mathbf{T}^a$$

hvor der altså gælder

$$\Gamma_\mu = g\gamma_\mu + \mathcal{O}(g^2)$$

Som sagt er de højere ordeners Feynman-diagrammer udtrykt ved tilsyneladende divergente integraler, hvis divergenser imidlertid forsvinder når de absorberes i "den fysiske koblingskonstant".

Men hvordan er den defineret? Ja, i QED kunne vi tænke os naturligt at definere elektronens ladning ved det klassiske udtryk for tværsnittet for at sprede lavenergetisk elektromagnetisk stråling på en elektron. Når ladningen herved er målt, kan vi bruge formlerne i kvanteelektrodynamikken til at udtrykke de divergente integraler og den urenormaliserede ladning e_0 herved. Derefter kan alle andre observable udtrykkes ved den fysiske ladning alene.

I QCD har vi ikke denne mulighed: Kvarker og gluoner eksisterer kun simpelt i hadronerne, og vi kan ikke tale om den klassiske grænseværdi for kvarkers farve. Hvad vi i stedet kan gøre er at indføre et *navn* for vertexfunktionen (og dermed for den renormerede koblingskonstant), når de invariante p_1^2, p_2^2, k^2 har visse bestemte foreskrevne værdier. Dette *navn* repræsenterer så et endeligt tal, og alle andre observable kan herefter beregnes *udtrykt ved dette tal* (efter renormering). Vi benævner dette tal

$$g_R(Q^2)$$

Den renormerede koblingskonstant (g_R) defineret ved værdien af vertexfunktionen i det punkt, hvor

$$p_1^2 = p_2^2 = k^2 = Q^2$$

Men hvad nu hvis vi en anden dag valgte at renormere for

$$p_1^2 = p_2^2 = k^2 = Q'^2 \quad ?$$

Vi ville så få alle observable udtrykt ved et andet tal $g_R(Q'^2)$; bl.a. kunne vi udtrykke $g_R(Q^2)$ ved $g_R(Q'^2)$. Denne sammenhæng er givet ved den sk renormeringsgruppe. Hvad sammenhængen er i detalje, ved vi ikke, før vi har løst teorien eksakt; men det har været muligt at finde et simpelt udtryk for sammenhængen i den grænse, hvor $Q'^2, Q^2 \to \infty$.

Der gælder, idet vi indfører "den stærke finstrukturkonstant",

$$\alpha_s(Q^2) \equiv \frac{g_R^2(Q^2)}{4\pi} \quad :$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_s^{-1}(Q^2) - \alpha_s^{-1}(Q'^2) & = & b \log \frac{Q^2}{Q'^2} \quad , \quad Q^2, Q'^2 \to \infty \\ \text{hvor} \quad b & \equiv & \frac{1}{12\pi}(33 - 2N_f) \end{array}\right\} \tag{6.79}$$

(N_f = antal kvarkflavours, tallet 33 er specifikt for 3 colours, for N colours fås $11 \cdot N$).

Dette resultat er en streng konsekvens af QCD. Vi kan bringe det på en simplere form ved at differentiere mht $\log Q^2$;

$$\frac{d}{d \log Q^2}(\alpha_s^{-1}(Q^2)) = b$$

Løsningen til denne differentialligning er

$$\alpha_s^{-1}(Q^2) = b \log Q^2 + C$$

og, idet vi kalder integrationskonstanten for $C \equiv -b \log \Lambda^2$, får vi

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{33 - 2N_f} \frac{1}{\log Q^2/\Lambda^2} \tag{6.80}$$

Her ser vi, at der pludselig optræder en konstant Λ med dimension af en energi, samt at den oprindelige (urenormerede) koblingskonstant g er forsvundet (sammen med diverse divergente integraler).

Vi har fået en renormeret koblingskonstant, der varierer med den typiske 4-impuls, der overføres i vertexet. Den kaldes på engelsk "The running coupling constant".

Nedenfor skal vi antyde, hvor udtrykket $(33 - 2N_f)$ kommer fra. Lad os først antage, at det er positivt. Med det antal kvarker, vi kender i dag (5), virker denne antagelse rimelig. Men så gælder

$$\alpha_s(Q^2) \to 0^+ \quad \text{for} \quad Q^2 \to \infty \tag{6.81}$$

Dette helt centrale resultat omtales som asymptotisk frihed ("asymptotic freedom"): Ved høje energier (høje impulsoverførsler) forsvinder de stærke vekselvirkninger !! Dette antages at være baggrunden for den eksperimentelle "scaling" i dybt uelastiske lepton-hadron-stød (kap. 10). Samme resultat betyder, at vi i en sådan grænse med god fornuft burde kunne bruge perturbationsteori.

Sammenligning mellem teori og eksperiment tyder på, at QCD-parameteren Λ har værdien

$$\Lambda \sim 0.1 - 0.2 GeV \tag{6.82}$$

En mere præcis angivelse er dels vanskelig, da Λ kun optræder under logaritme-funktionen, dels kræves en meget nøje specifikation af den præcise definition af den renormerede koblingskonstant. Disse forhold vil vi ikke her kunne gå ind på, men vi skal i kap. 7 komme tilbage til spørgsmålet om den nærmere eksperimentelle bestemmelse af α_s.

Det er også klart, at ved processer, hvor impulsoverførslen er sammenlignelig med denne værdi, kan vi *ikke* bruge perturbationsteori. Af (6.80) følger, at $\alpha_S(Q^2) \to \infty$, når $Q^2 \to \Lambda^2$. Dette resultat kan vi ganske vist ikke stole på, idet formlen blev udledt under antagelsen om, at $\alpha_s(Q^2)$ var lille ($Q^2 \to \infty$), men klart er det, at perturbationsteorien bryder sammen ved små impulsoverførsler.

Små og store impulsoverførsler svarer til hhv store og små afstande efter ubestemthedsrelationerne. Vi kan derfor også sige, at QCD opfører sig

(a) ved *små* afstande som en perturbationsteori baseret på omtrent frie kvarker og gluoner i relativt svag vekselvirkning;

(b) ved *store* afstande på en helt anden måde.

Dette er i kvalitativ overensstemmelse med forestillingen om permanent kvarkconfinement: I store afstande ser vi hverken kvarker eller gluoner, men blot mesoner og baryoner: Verden ligner *ikke* en næsten fri QCD-teori. Det gør den derimod dybt i det indre af hadronerne.

Lad os sluttelig nævne, hvor udtrykket $(33 - 2N_f)$ kommer fra. Det viser sig, at for at beregne opførslen (6.79) er det tilstrækkeligt (i en passende gauge) at studere den måde, gluonfeltet polariserer vacuum: Adskiller "farve" og "antifarve" i analogi med den måde, hvorpå et sædvanligt elektrisk felt adskiller ladninger, de positive fra de negative. Denne effekt beskrives ved følgende Feynman-diagrammer:

(a) (b)

Første diagram giver anledning til leddet "33". Hvis gaugegruppen er $SU(N)$ i stedet for $SU(3)_C$ fås $11 \cdot N$. Diagram (b) giver bidrag af modsat fortegn, og ved meget høje energier, hvor vi kan se bort fra kvarkernes masser, bidrager kvarker med forskellig flavour præcist lige meget. Derfor er bidraget herfra proportionalt med antallet N_f af kvarkflavours. Antallet af kvarkflavours er det antal flavours, der er "åbne" ved den energi, vi betragter. Hermed menes, at kvarker, hvis masser er så store at de ikke kan pardannes ved den pågældende energi, ikke tælles med. Vi bemærker iøvrigt, at nye undersøgelser af Z-mesonens henfald tyder på at der kun findes 3 kvark-lepton-generationer, altså 6 kvark-flavours. Vi sætter ofte $N_f \simeq 3-4$ i praktiske anvendelser af "den løbende koblingskonstant" i de energiområder, vi idag kan studere.

Bemærk, at i QED har vi det analoge fænomen beskrevet udelukkende ved diagram (b). Derfor bliver konstanten b i (6.79) *negativ* i QED, og (6.80) viser så, at formlen i QED kun kan bruges, når også $\log Q^2/\Lambda^2 \to -\infty$, dvs $Q \to 0$. QED opfører sig altså helt modsat QCD. I virkeligheden er QED ikke helt "infrarød fri", idet den endelige værdi af elektronmassen må tages i betragtning. Men det er klart, at for store værdier af Q^2 kan vi formentlig ikke anvende perturbationsteori i QED! Imidlertid kan vi skønne, at vi først kommer i vanskeligheder, når

$$\alpha = \frac{1}{137} \sim \frac{3\pi}{\log Q^2/m_e^2}$$

eller

$$Q \sim m_e e^{\frac{3}{2}\pi \cdot 137} \sim 10^{279} GeV$$

et tal, der ikke har nogen umiddelbar mening, bl.a. da den samlede energi i hele universet anslås til $\sim 10^{82} GeV$.

Det er imidlertid et meget interessant resultat, at de eneste feltteorier (baseret på kvarker), som giver asymptotisk frihed, er ikke-Abelske gaugeteorier som QCD.

6.6 Kvark-confinement. "Bag"-modellen

Hvis vi vil bruge QCD til at beregne, hvorledes kvarker bindes sammen til hadroner, og hvad disse hadroners masser og andre egenskaber er, må vi åbenbart anvende matematiske metoder, som er langt mere generelle end perturbationsteori. Sådanne metoder er i analytisk henseende endnu kun temmelig ufuldstændigt udviklet, ja man ved strengt taget ikke, om QCD kan anses for at være en modsigelsesfri teori ved store afstande, ligesom antagelsen om kvark-confinement ikke er eftervist i detalje. De største forhåbninger om fremskridt i så henseende knytter sig til formuleringer af QCD på et rum-tids-gitter. Dernæst udføres renormeringsproceduren, som betegner overgangen til en kontinuumsteori. Disse skridt kan i princippet udføres med vilkårlig nøjagtighed af en computer. De seneste 10-15 års udvikling har vist betydelige fremskridt, men vi må vente på ny og bedre computere for virkelig at teste teorien i den detalje, vi kunne ønske.

En anden metode består i at supplere teorien med forskellige mere eller mindre plausible "gæt" om, hvordan den opfører sig: Vi kan forsøge at bruge *modeller*. En meget populær model har været den sk MIT bag model (sækmodel) i forskellige udformninger.

Efter denne tænker man sig hadronerne som små "sække", områder, inden for hvilke kvark-gluonfelterne er approksimativt i den asymptotisk frie, perturbative fase. Uden for sækken (hadronen) hersker det "ikke-perturbative vacuum". Dette sidste antages at være en meget indviklet feltkonfiguration med en energitæthed, som er *lavere* end energitætheden i det simple perturbative vacuum. Det "sande" fysiske vacuum er selvfølgelig den felttilstand, der har den allerlaveste energitæthed. Der er gjort visse fremskridt i retning af at påvise eksistensen af komplicerede feltkonfigurationer med en lavere energitæthed end det perturbative vacuum, men det er ikke helt klart hvor realistiske, de er.

Hvis imidlertid der virkelig eksisterer sådan en forskel i energitæthed (som i bagmodellen kaldes bag-konstanten, B), så vil det fysiske vacuum udøve et tryk på overfladen af hadronerne: Der ville kunne vindes energi ved at fjerne det perturbative vacuum inden i hadronerne. Dette tryk tænkes afbalanceret af det modtryk, som kvarkerne og gluonerne udøver ved deres bevægelse inden i hadronerne.

Lad os tænke på en meson som en kugleformet struktur, en boble med radius R. Så er ifølge ubestemthedsrelationerne kvarkernes impuls af størrelsen

$$p \sim \frac{1}{R}$$

Det tryk, kvarkerne udøver på kugleoverfladen, er så lig med bag-konstanten B i ligevægt (hvis vi negligerer gluontrykket):

$$B = \text{geometrisk faktor} \times (\frac{1}{R})^4$$

(tryk = impulsoverførsel/tidsenhed/arealenhed). Herefter er hadronens energi (masse) bestemt:

$$M_{hadron} \propto c \cdot n_q \cdot p + B \cdot V$$

hvor $n_q = 2$ for mesoner og 3 for baryoner, c er en geometrisk konstant, der eventuelt kan forsøges vurderet; $p \sim 1/R \sim V^{-1/3}$, og $V \sim R^3$ volumenet af hadronen (vi har her set bort fra kvarkernes masser).

I en mere raffineret behandling tager man selvfølgelig hensyn til gluonfeltet og til, at kvarkerne er fermioner. Kvark-confinement - eller bedre: Colour confinement - betyder, at der ikke er nogen elektrisk colour flux gennem en Gauss-overflade, der indeholder hadronen (jfr de colour-elektriske feltlinjer, som er antydet på fig. (6.3)).

For hurtigt roterende hadroner bliver ligevægtskonfigurationen som antydet på fig. (6.4). Midt på hadronpølsen er vacuumtrykket udelukkende afbalanceret af et colour-elektromagnetisk felttryk. Dette betyder, at tværsnitsarealet er bestemt af bag konstanten. Men så følger det også, at den colour-elektriske feltstyrke er konstant langs pølsen, og dette betyder igen, at det arbejde, der skal udføres for at strække pølsen et bestemt beløb, er uafhængig af pølsens egen længde. Som tidligere nævnt er denne egenskab karakteristisk for systemer med rotationstilstande på en lineær Regge-trajektorie.

Figurerne antyder hvordan man tænker sig det colourelektriske felt indskrænket til sækkens område, mens det er udlukket fra området udenfor. Situationen minder her påfaldende om Meissner-effekten for superledende metaller. Her er det det magnetiske felt, der ikke kan trænge (ret langt) ind i superlederen. Man taler da også ofte om colour-confinement, som analog til den "duale Meissner-effekt", hvor ordet, dual, refererer til, at der er byttet om på elektricitet og magnetisme. Faktisk besidder Maxwell-ligningerne (og den ikke-Abelske generalisering i QCD) næsten en symmetri mellem elektricitet og magnetisme. Symmetrien (dualiteten) er kun brudt af det forhold, at der ikke findes magnetiske, men kun elektriske ladninger. Der har været fremsat mange spekulationer og forslag gående ud på at lede efter feltkonfigurationer i QCD, som mere eller mindre kunne simulere "colourmagnetiske monopoler" (dvs magnetiske ladninger).

6.6.1 OZI-reglen

Vi kan nu danne os en begyndende forståelse af OZI-reglen (jfr. kap. 4.7). Lad os betragte en tung meson bestående af tunge kvarker $Q\overline{Q}$ og som kan henfalde stærkt til et system bestående af lette kvarker. Så kan vi forestille os henfaldet finde sted i to skridt (jfr. fig. (6.5)):

Først annihilerer Q og $\overline{Q}$ til 2 eller flere gluoner inden i sækken. Hvis massen af mesoner er stor, kan vi bruge perturbationsteori til at vurdere amplituden. Den bliver proportional med

$$\left(g_R(M^2)\right)^n$$

hvor n er antallet af gluoner, og $g_R(M^2)$ er "the running coupling constant". Den fysiske meson er en colour-singlet, så annihilation til Ún enkelt colour-octet-gluon er forbudt. Med andre ord: $n \geq 2$. Vi skal senere se, at for ϕ- og J/ψ-mesonerne er $n \geq 3$. Amplituden for, hvorledes gluonerne omdannes til fysiske hadroner, ved vi ikke, hvordan vi skal beregne, men vi ved, at denne omdannelse finder sted med sandsynlighed = 1. Altså får vi for den totale stærke bredde af den tunge meson:

$$\Gamma \sim \left(\alpha_s(M^2)\right)^n \sim (\log M^2/\Lambda^2)^{-n} \tag{6.83}$$

Når M^2/Λ^2 er så stor, at α_s er væsentlig mindre end 1, giver dette udtryk en lille bredde i overensstemmelse med OZI-reglen. Vi ser også, at reglen bliver bedre og bedre, jo større M^2 er. Den er ekstra god, hvis $n = 2$ er forbudt, så $n \geq 3$. Dette gælder, som vi skal se, når $C = -1$. Den eksperimentelle værdi for α_s ligger i det energiområde, vi for tiden kan undersøge, på omkring

$$\alpha_s \sim 0.1$$

6.7 Hadronernes hyperfinstruktur

I denne paragraf skal vi give et simpelt argument for, at QCD kan forklare masseforskellen mellem singletmesonerne (π, K, η) og tripletmesonerne (ρ, K^*, ω) samt mellem spin-1/2 baryonoctetten $(N, \Lambda, \Sigma, \Xi)$ og spin-3/2 decupletten $(\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega^-)$. Vi skal også se, at vi her får brug for den ikke-Abelske struktur af QCD.

Den pågældende masseforskel må åbenbart bero på en spin-spin vekselvirkning. En sådan kaldes i atomfysikken for en hyperfin vekselvirkning. I hadronfysikken er α_s imidlertid ikke så lille, og det kvantemekaniske overlap mellem kvarker er større end mellem elektroner og kerne, så hadronernes "hyperfin" splitning er ganske betydelig.

Af PDG-tabellerne finder vi:

$$\rho - \pi: \quad 628\text{MeV} \quad , \quad K^* - K: \quad 398\text{MeV} \quad , \quad \omega - \eta: \quad 233\text{MeV};$$

i middel

$$(\Delta M)_{^3S-^1S} = 420\text{MeV}$$

For baryonerne finder vi:

$$\Delta - N:\ 294\ \text{MeV};\quad \Sigma^* - \Sigma:\ 191\ \text{MeV},\quad \Xi^* - \Xi:\ 216\ \text{MeV}; \tag{6.84}$$

i middel

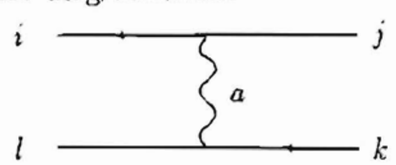
$$\langle \Delta M_{(\frac{3}{2})-(\frac{1}{2})} \rangle = 234\text{MeV}$$

I bag modellen er der ingen forskel på disse masser i den approksimation, hvor vi negligerer kvark-kvark vekselvirkningen inden i sækken. Den første kvark-kvark vekselvirkning i perturbationsteori skyldes gluonudveksling. En god del af denne er igen uafhængig af kvarkspinnenes orientering. Vi er her kun interesseret i den del, der opfører sig som

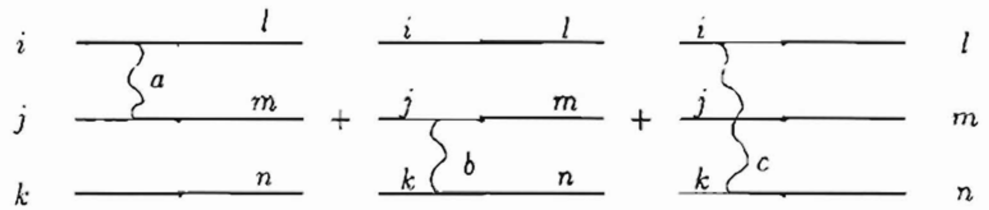
$$\text{konstant} \times \langle \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2 \rangle$$

hvor $\langle \vec{j}_1 \rangle$ og $\langle \vec{j}_2 \rangle$ er matrikselementer af de to kvarkers spin.

Vi ønsker følgelig at analysere diagrammerne



for mesoner, og for baryoner



Vores første opgave bliver at finde sammenhængen mellem energibidraget hidrørende fra disse diagrammer og den invariante Feynman-amplitude svarende til dem.

I den approksimation, hvor kvark-kvark vekselvirkningen er svag, og hvor vi kan antage kvarkerne frie inden i sækken, ved vi, hvorledes vi skal beregne Feynman-amplituden:

$$i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)\langle H|T|H\rangle \tag{6.85}$$

hvor $|H\rangle$ er hadrontilstanden.

Hvis vi på den anden side opfatter gluonudvekslingsprocessen som givet ved en ny slags effektiv Hamilton-funktion $\mathcal{H}_{eff}$, så har vi til første orden (jfr kap. 5.5)

$$i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)\langle H|T|H\rangle = -i \int d^4x \langle H|\mathcal{H}_{eff}(x)|H\rangle$$

Pga translationsinvarians:

$$\mathcal{H}_{eff}(x) = e^{ixP}\mathcal{H}_{eff}(0)e^{-ixP}$$

så er

$$\langle H|T|H\rangle = -\langle H|\mathcal{H}_{eff}(0)|H\rangle$$

Den energiforskel, ΔE, som $\mathcal{H}_{eff}$ giver anledning til, er givet ved

$$\begin{aligned}\Delta E\langle H|H\rangle &= \langle H|H_{eff}|H\rangle = \int d^3x \langle H|\mathcal{H}_{eff}(\vec{x},0)|H\rangle \\ &= (2\pi)^3\delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i)\langle H|\mathcal{H}_{eff}(0)|H\rangle \\ &= \frac{1}{2E_H}\langle H|H\rangle\langle H|\mathcal{H}_{eff}(0)|H\rangle \end{aligned} \tag{6.86}$$

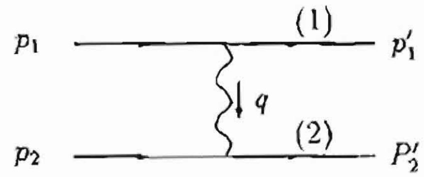
hvor E_H er massen af hadronen, og vi pàny har brugt translationsinvarians. Vi har så for den søgte energiforskel

$$\Delta E = -\frac{1}{2E_H}\langle H|T|H\rangle \tag{6.87}$$

som umiddelbart kan beregnes efter Feynman-reglerne i den omtalte approksimation.

Det er instruktivt at udføre beregningen i to skridt. Kvark-gluon vertexet er identisk med elektron-foton vertexet i QED - bortset fra colour matricen i $\frac{1}{2}\lambda^a_{ij}$. Lad os derfor først gennemføre beregningen uden colour faktorer. Dette svarer til en teori, i hvilken de stærke vekselvirkninger har fuldstændig samme struktur som de elektromagnetiske. Som vi skal se er resultatet i kvalitativ modstrid med (6.84). Dernæst vil vi udregne virkningen af colour faktorerne. Disse vil ændre resultatet og bringe det i smuk kvalitativ overensstemmelse med data.

Lad os først se på "foton"-udveksling mellem 2 ladede fermioner (*ikke* fermion og antifermion):



$$q = p_1 - p'_1 = p'_2 - p_2$$

Feynman-reglerne giver

$$\begin{aligned} iT_{fi} &= \frac{-i}{q^2}(-ie)^2(\overline{u}'_1\gamma^\mu u_1)(\overline{u}'_2\gamma_\mu u_2) \\ -T_{fi} &= -\frac{e^2}{q^2}(\overline{u}'_1\gamma^\mu u_1)(\overline{u}'_2\gamma_\mu u_2) \end{aligned} \tag{6.88}$$

Vi ønsker at evaluere dette udtryk i den urelativistiske approksimation, hvor den udvekslede foton er "blød" (men "hård" nok til at vi kan bruge perturbationsteori i QCD!). I den urelativistiske approksimation er

$$E_1 \sim m \gg |\vec{p}_1| \quad \text{etc.}$$

så

$$q^2 = (E_1 - E'_1\,,\ \vec{p}_1 - \vec{p}\,'_1)^2 \simeq -(\vec{p}_1 - \vec{p}\,'_1)^2 \tag{6.89}$$

Vi bruger nu den eksplicite repræsentation for γ_μ og u og $\overline{u}$

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) \quad ; \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \ , \ \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$u(\vec{p}) = \sqrt{E+m}\begin{bmatrix} \chi \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\chi \end{bmatrix}$$

og

$$\overline{u}'_1\gamma^\mu u_1 = \sqrt{E_1+m}\sqrt{E'_1+m}\left(\chi^\dagger, -\chi^\dagger\frac{\vec{p}'_1\cdot\vec{\sigma}}{E'_1+m}\right)\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix} \chi \\ \frac{\vec{p}_1\cdot\vec{\sigma}}{E_1+m}\chi \end{bmatrix}$$

hvor vi forlanger, at kvarkernes spintilstand er uændret af gluonudvekslingen: u'_1 og u_1 har samme Pauli-spinor χ. For at studere hyperfinbidraget behøver vi kun at isolere det led, som er proportionalt med matrikselementet af $\vec{\sigma}$. Derfor undersøger vi kun $\mu = 1,2,3$-delen. Endvidere sætter vi $E_1 \simeq E'_1 \simeq m$ og får så

$$\overline{u}'_1\vec{\gamma}u_1 \simeq 2m\left(\chi^\dagger, -\chi^\dagger\frac{\vec{p}'_1\cdot\vec{\sigma}}{2m}\right)\begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}(\vec{p}_1\cdot\vec{\sigma})\chi}{2m} \\ -\vec{\sigma}\chi \end{bmatrix} = 2m\chi^\dagger\left\{\frac{\vec{\sigma}(\vec{p}_1\cdot\vec{\sigma})}{2m} + \frac{(\vec{p}'_1\cdot\vec{\sigma})\vec{\sigma}}{2m}\right\}\chi$$

Men

$$\begin{aligned}\sigma_i(p_{1j}\sigma_j) + (p'_{1j}\sigma_j)\sigma_i &= p_{1j}[\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k] + p'_{1j}[\delta_{ji} + i\varepsilon_{jik}\sigma_k] \\ &= (p_1 + p'_1)_i + i\varepsilon_{ijk}(p_1 - p'_1)_j\sigma_k \end{aligned} \qquad (6.90)$$

eller

$$\overline{u}'_1\gamma^i u_1 = \chi^\dagger\chi(p_1 + p'_1)_i + 2i\varepsilon_{ijk}q_j j_k^{(1)}$$

hvor

$$\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}'_1 \quad \text{og} \quad \vec{j}^{(1)} = \chi^\dagger\frac{\vec{\sigma}}{2}\chi \qquad \text{for fermion nr. (1)}$$

Ved at behandle fermion nr. (2) på samme måde får vi af (6.88) og (6.89) for spin-spin delen:

$$-T_{fi} = +\frac{e^2}{(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1)^2}\left[2i\varepsilon_{ijk}q_j j_k^{(1)}\right]\left[2i\varepsilon_{ilm}q_l j_m^{(2)}\right] + \ldots$$

(i den sidste faktor var der 2 ekstra minustegn: $\vec{p}_2 - \vec{p}'_2 = -\vec{q}$, og $\overline{u}'_2\gamma_i u_2 = -\overline{u}'_2\gamma^i u_2$).

Nu er

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

og heraf

$$-T_{fi} = +\frac{e^2}{\vec{q}^{\,2}}(-4)\ \left(\vec{q}^{\,2}(\vec{j}^{(1)}\cdot\vec{j}^{(2)}) - (\vec{q}\cdot\vec{j}^{(2)})(\vec{q}\cdot\vec{j}^{(1)})\right)$$

Vi ønsker at finde middelværdien heraf i en S-tilstand. Hertil omskriver vi i sidste led

$$q_i q_j = [q_i q_j - \frac{1}{3}\vec{q}^{\,2}\delta_{ij}] + \frac{1}{3}\,\vec{q}^{\,2}\delta_{ij}$$

hvor første parentes ikke bidrager til $l = 0$ tilstande. Heraf fås

$$\text{const.} \times \Delta E(Hf) = \frac{-4e^2}{2M} \times \frac{2}{3} \times \vec{j}^{(1)}\cdot\vec{j}^{(2)} = -\kappa\vec{j}^{(1)}\cdot\vec{j}^{(2)} \quad , \quad \kappa > 0 \qquad (6.91)$$

(Bemærk, at (6.91) antyder, at vi har sat $T_{fi} = \langle H|T|H\rangle$, hvilket er forkert. T_{fi} er matrikselementet mellem 2 *kvark*-tilstande, medens $|H\rangle$ er en hadrontilstand. Hvis vi tænker på $|H\rangle$ som en meson opbygget af en kvark-antikvark tilstand, kan vi skrive

$$\langle H|T|H\rangle = \int \frac{d^3p_1}{2E_1(2\pi)^3}\frac{d^3p_2}{2E_1(2\pi)^3}\frac{d^3p'_1}{2E'_1(2\pi)^3}\frac{d^3p'_2}{2E'_2(2\pi)^3}\langle H|p'_1p'_2\rangle\langle p'_1p'_2|T|p_1p_2\rangle\langle p_1p_2|H\rangle$$

hvor så $\langle p_1 p_2 | H\rangle$ er relateret til en modelafhængig bølgefunktion. I vores yderst simple beskrivelse antages disse bølgefunktioner kun at være forskellige fra 0, når $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ og $p_1^0 = p_2^0 = \frac{1}{2}M_H$. Endvidere antages de retningsuafhængige (S-tilstande). Resultatet af disse komplikationer bliver så blot at indføre passende faktorer M_H i ligning (6.91), således at dimensionen kommer til at passe. Imidlertid benyttes ingen steder den faktiske (modelafhængige) *værdi* for κ, så ændringen får ingen praktisk betydning for den efterfølgende diskussion.)

Det vigtigste resultat i (6.91) er, at vi har vist, at *fortegnet* på koefficienten er *negativ*.

Lad os nu betragte et fermion-*anti*-fermion system, som ligger nærmere på vores kvarkmodel for en meson. Så har vi - i stedet for (6.88) -

$$-T_{fi} = +\frac{e^2}{q^2}(\overline{u}'_1\gamma_\mu u_1)(\overline{v}_2\gamma^\mu v'_2) \tag{6.92}$$

hvor det ændrede fortegn hidrører fra, at vi har en *anti*-fermion, der passerer fra begyndelses- til sluttilstanden. Der er da også fysisk set oplagt, at energiændringen må skifte fortegn for et system af to modsatte ladninger i forhold til et system af to ladninger med samme fortegn.

Imidlertid er

$$\overline{v}_2\gamma^\mu v'_2 = (\overline{v}_2\gamma^\mu v'_2)^T = {v'_2}^T\gamma^{\mu T}\overline{v}_2{}^T$$

Men iflg. (3.124), (3.125) og (3.126) er

$${v'_2}^T = \overline{u}'_2 C^T \quad , \quad \overline{v}_2{}^T = C^{-1}u_2 = -Cu_2 \quad \text{og} \quad C^T\gamma^{\mu T}C = -\gamma^\mu$$

hvoraf

$$\begin{aligned} \overline{v}_2\gamma^\mu v'_2 &= -\overline{u}'_2 C^T\gamma^{\mu T}Cu_2 = +\overline{u}'_2\gamma^\mu u_2 \\ \text{og} \quad -T_{fi} &= +\frac{e^2}{q^2}(\overline{u}'_1\gamma_\mu u_1)(\overline{u}'_2\gamma^\mu u_2) \end{aligned} \tag{6.93}$$

for et fermion-*anti*-fermionsystem. Vi har altså

$$\Delta E(Hf) = \mp\kappa\vec{j}^{(1)}\cdot\vec{j}^{(2)} \quad \text{for} \quad \begin{cases} \text{fermion-fermion} \\ \text{fermion-antifermion} \end{cases} \tag{6.94}$$

Lad os derpå udregne $\vec{j}^{(1)}\cdot\vec{j}^{(2)}$ for singlet- og tripletmesoner. Idet $S = 0$ eller 1 er spin-kvantetallet, har vi for matrikselementer

$$\begin{aligned} S(S+1) &= \langle\vec{j}^2\rangle = \langle(\vec{j}^{(1)}+\vec{j}^{(2)})^2\rangle \\ &= \langle(\vec{j}^{(1)})^2\rangle + \langle(\vec{j}^{(2)})^2\rangle + 2\langle\vec{j}^{(1)}\cdot\vec{j}^{(2)}\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) + 2\langle\vec{j}^{(1)}\cdot\vec{j}^{(2)}\rangle \end{aligned} \tag{6.95}$$

eller

$$\Delta E(Hf(\text{mesoner})) = +\frac{1}{2}\kappa(S(S+1) - \frac{3}{2}) = \kappa \times \begin{cases} +\frac{1}{4} & \text{for triplet} \\ -\frac{3}{4} & \text{for singlet} \end{cases} \tag{6.96}$$

Dette resultat er i overensstemmelse med, at triplettilstandene (ρ, K^*, ω) har højere masser end singlettilstandene (π, K, η).

Imidlertid får vi et uheldigt resultat for baryonerne. Summen af de tre diagrammer fra før giver, da vi nu har tre *fermioner:*

$$\Delta E(Hf(\text{baryon})) = -\kappa\left[\vec{j}^{(1)}\cdot\vec{j}^{(2)} + \vec{j}^{(1)}\cdot\vec{j}^{(3)} + \vec{j}^{(2)}\cdot\vec{j}^{(3)}\right]$$

Vi udregner spinprodukterne som før for en baryon med $S = 1/2$ eller $S = 3/2$:

$$\begin{aligned} S(S+1) &= 3\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) + 2\left(\vec{j}^{(1)}\cdot\vec{j}^{(2)} + \vec{j}^{(1)}\cdot\vec{j}^{(3)} + \vec{j}^{(2)}\cdot\vec{j}^{(3)}\right) \Rightarrow \\ \Delta E(Hf(\text{baryon})) &= -\frac{1}{2}\kappa\left(S(S+1) - \frac{9}{4}\right) = \kappa\times\begin{cases} +\frac{3}{4} & \text{for } S = \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \text{for } S = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned} \tag{6.97}$$

altså at $S = 3/2$-tilstandene $(\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega-)$ skulle have *mindre* masser end $S = 1/2$-tilstandene (N, Σ, Δ, Ξ), i skarp modstrid med eksperimenterne. Endvidere siger (6.96) og (6.97), at den numeriske værdi af splitningen er 1.5 gange så stor for baryoner som for mesoner, medens det eksperimentelle split er størst for mesoner (6.84).

Vi skal nu se, at QCD korrigerer udtrykkene (6.96) og (6.97), så de bringes i kvalitativ overensstemmelse med eksperimenterne.

Lad os først betragte mesontilfældet. I notationen på figuren får vi en colourfaktor fra vertexerne

$$\frac{1}{2}\lambda^a_{ji}\frac{1}{2}\lambda^a_{lk}$$

Endvidere er vores meson i en colour-singlet-tilstand, hvorfor vi skal kontrahere med $\frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{il}$ for begyndelsestilstanden og $\frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{jk}$ for sluttilstanden. Endelig skal vi summere alle diagrammer svarende til de forskellige gluonudvekslinger. Vi får så den totale colourfaktor for mesoner

$$\sum_{i,j,k,l,a}\frac{1}{3}\delta_{il}\delta_{jk}\frac{1}{2}\lambda^a_{ji}\frac{1}{2}\lambda^a_{lk} = \frac{1}{12}\sum_a Tr(\lambda^a\lambda^a) = \frac{1}{12}\cdot 2\cdot 8 = \frac{4}{3} \tag{6.98}$$

For baryoner (3-kvark-singlettilstande) får vi tilsvarende (første diagram i figuren)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_{ijk}\frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_{lmk}\frac{1}{2}\lambda^a_{li}\frac{1}{2}\lambda^a_{mj}\delta_{nk} \\ = & \frac{1}{24}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\lambda^a_{li}\lambda^a_{mj} = \frac{1}{24}[\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}]\lambda^a_{li}\lambda^a_{mj} \\ = & \frac{1}{24}\left[\sum_a (Tr\lambda^a)^2 - \sum_a Tr(\lambda^a\lambda^a)\right] \\ = & \frac{1}{24}[0 - 8\cdot 2] = -\frac{2}{3} \end{aligned} \tag{6.99}$$

Vi er meget lykkelige for minustegnet (6.99), idet katastrofen (6.97) herved repareres. Mere præcist får vi i QCD

$$\Delta E(Hf(\text{mesoner})) = \kappa\begin{cases} +\frac{1}{3} & \text{for triplet} \\ -1 & \text{for singlet} \end{cases} \tag{6.100}$$

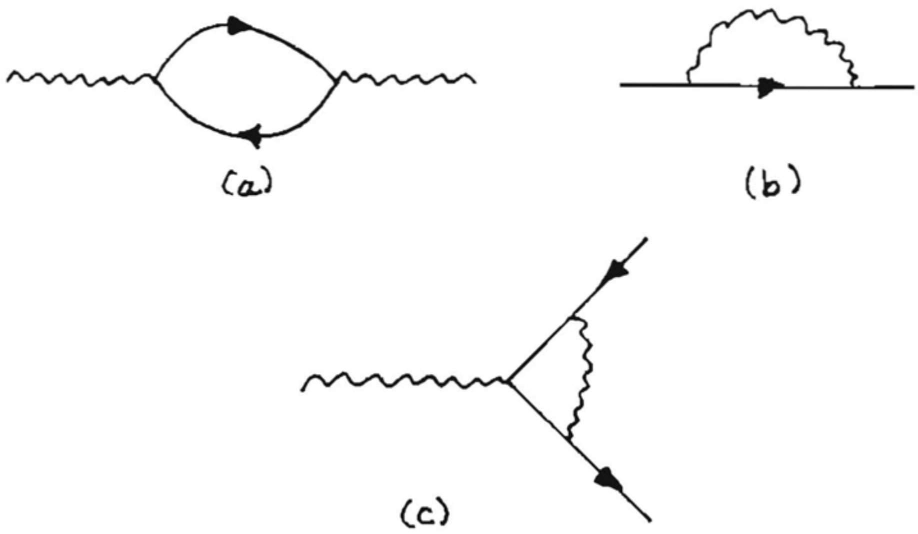
$$\Delta E(Hf(\text{baryoner})) = \kappa\begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{for } S = \frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & \text{for } S = \frac{3}{2} \end{cases} \tag{6.101}$$

Videre har vi så

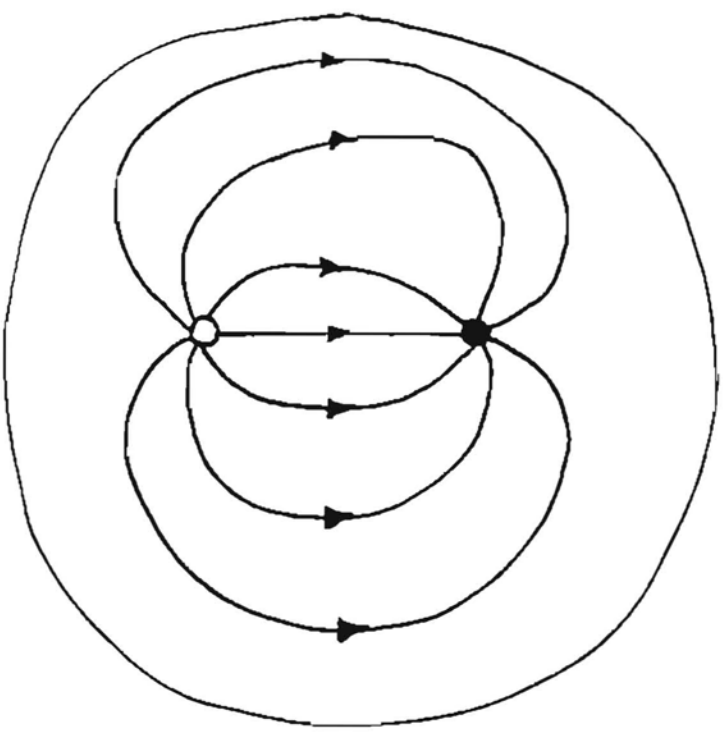
$$\frac{M(\text{triplet-meson}) - M(\text{singlet-meson})}{M(S = 3/2 - \text{baryon}) - M(S = 1/2 - \text{baryon})} = \frac{4/3}{1} = 1.33$$

til sammenligning giver (6.84) værdien 1.8. Det er klart, at vores modelbeskrivelse er grov, men vi forstår dog, hvorfor spin splitningen er større for mesoner end for baryoner. I en mere nøjagtig behandling burde man tage hensyn til, at kvarkerne havde forskellige masser, at der var relativistiske korrektioner, og at kvarkerne i sækken ikke er helt frie.

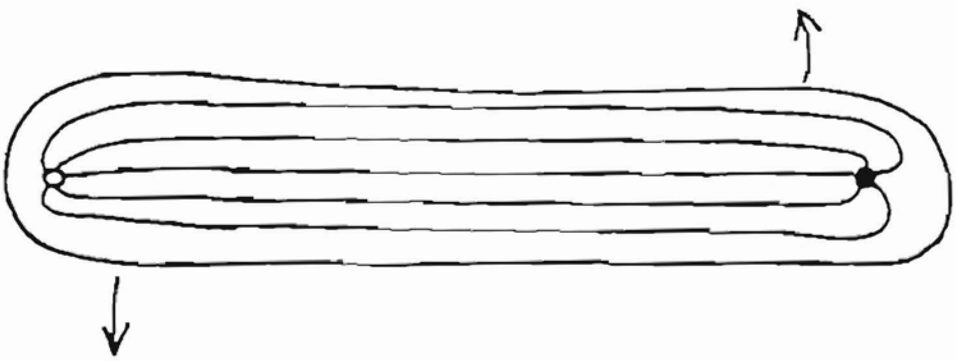
Ikke desto mindre må det betragtes som en betydelig kvalitativ succes for QCD, at vi kan begynde at forstå hadronernes hyperfinstruktur ved en så simpel regning.



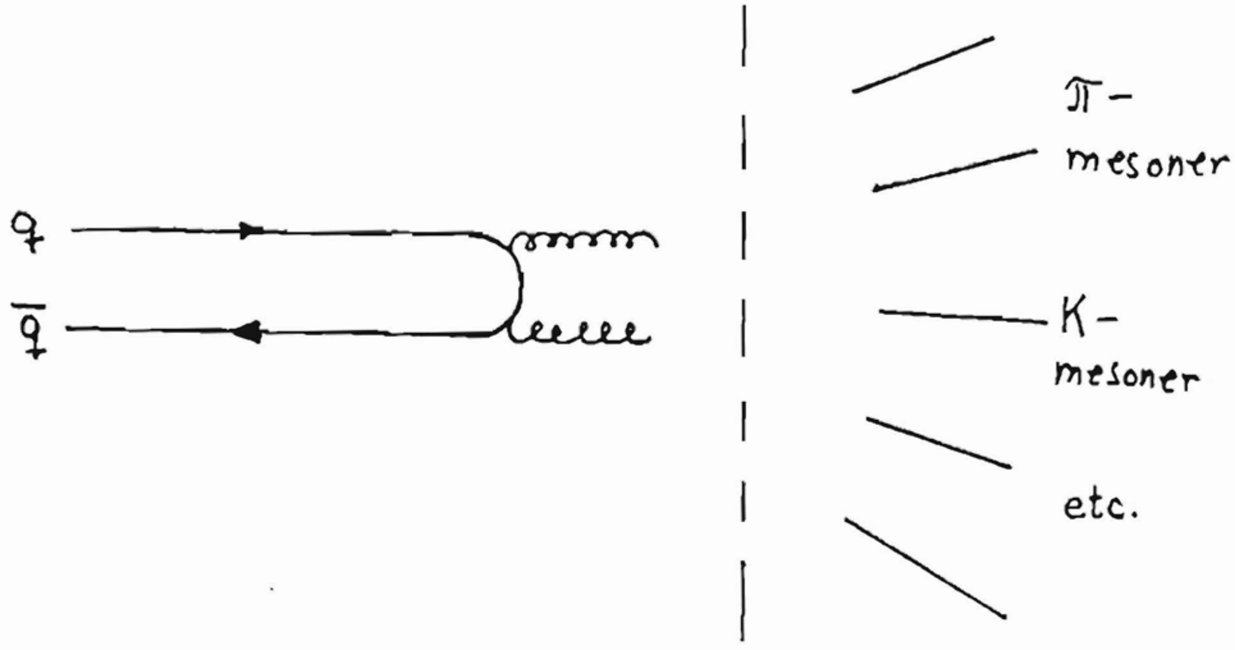
Figur 6.2:



Figur 6.3: Skitse af hvordan omtrent de colourelektriske feltlinjer kunne tænkes at forløbe i en meson.



Figur 6.4: Skitse af hurtigt roterende meson med colourelektriske feltlinjer.



Figur 6.5: Henfald af tungt kvarkoniumsystem via 2 gluoner til hadroner med lette kvarker.

Kapitel 7

e^+e^--STØD UNDER Z^0

7.1 Eksperimentelle anlæg

I løbet af 70'erne blev store e^+e^--lagerringsacceleratorer udviklet. Det drejer sig især om 3 større anlæg: PETRA ved DESY, Hamborg, med $E_{beam} \sim 10-17$ GeV, PEP ved SLAC med en lignende (knap så stor) energi, og CESR ved Cornell med en beamenergi i området omkring 6 GeV. Disse anlæg var stærkt medvirkende til det markante gennembrud, som standardmodellen oplevede i 1970'erne og 1980'erne. Det er denne fysik og dens moderne fortsættelse, vi skal beskæftige os med i dette kapitel. I 1987 kom den japanske accelerator TRISTAN med med en beamenergi på 32 GeV.

I 1989 åbnedes CERNS's ny store LEP accelerator. Med sin omkreds på 27 km og sin beamenergi på 60 GeV (der er under opgradering) er den langt den største. Vi vil i dette kapitel omtale visse resultater fra LEP, men dens hovedopgave har været undersøgelsen af Z^0-resonansen, som vi først omtaler i detalje i kap. 8 og 9.

Den vigtigste parameter for en e^+e^--accelerator udover energien af beamet er maskinens luminositet L. Alle maskiner arbejder med en designluminositet på ca. $L = 10^{32}/\mathrm{cm}^2/$ sek, men i praksis er der ofte vanskeligheder med at nå denne værdi. Som regel ligger den anvendelige luminositet noget under designluminositeten.

Luminositeten er det tal, man skal multiplicere et givet tværsnit med for at få tællehastigheden ved maskinen. Lad os betragte $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, for hvilket tværsnittet ved høje energier er (5.100)

$$\sigma_{pt} = \frac{87nb}{s/(GeV)^2} = \frac{87 \cdot 10^{-33}cm^2}{s/(GeV)^2}$$

Tællehastigheden for $\mu^+\mu^-$ ved $E_{beam} = 15$ GeV og $L = 10^{31}$ bliver så

$$\text{tællehastigheden} = 10^{31}\frac{87 \cdot 10^{-33}}{30^2} sek^{-1} \simeq 10^{-3}/\text{sek} \tag{7.1}$$

Der går ca. 20 minutter mellem hver $\mu^+\mu^-$-begivenhed! ved højere energier er forholdet meget værre pågrund af faktoren $1/s$ i udtrykket for tværsnittet. Dette siger noget om de praktiske vanskeligheder ved at udføre e^+e^--eksperimenter.

Resultatet (7.1) er endda optimistisk. For det første skal "tællehastigheden" multipliceres med detektorens effektivitet. For moderne detektorsystemer er den 90% eller mere. For det andet tager (7.1) ikke hensyn til, at maskinen må standses flere gange pr. døgn for påny at blive fyldt med elektroner og positroner.

I praksis "trigges" detektoren ca. hvert sekund af falske begivenheder, dels kommende fra kosmisk stråling dels fra e^+ eller e^--stød på den tilbageværende gas i det ellers hårdt udpumpede beamrør.

Fig. (7.1) viser en typisk detektor (ALEPH) ved LEP. Man søger så vidt muligt at omgive vekselvirkningspunktet fuldstændigt med højeffektive elektroniske detektorer. Disse detekterer først og fremmest 4-impulsen af de resulterende partikler efter følgende strategi:

1. Ladede partikler detekteres gennem deres ioniseringsspor i et gnistkammer med højspændingstråde (MWPC = Multi Wire Proportional Counter);

2. elektroner og fotoner detekteres gennem deres elektromagnetiske byger (showers) i materialer, der indeholder kerner med store Z (blyglas fx);

3. neutrale hadroner detekteres ved at lade dem vekselvirke med detektorens kernepartikler og derpå måle den afsatte energi (calorimeters, fx flydende Argon). I en elektromagnetisk shower afsættes energien i løbet af få strålingslængder. Hadronshowers adskiller sig herfra ved at energien afsættes mere gradvist;

4. μ-partikler ligner π-partikler til forveksling hvad angår deres spor i MWPC. Men de adskiller sig fra hadroner ved deres evne til (næsten) uhindret at kunne passere store stofmængder, som fx det tykke jernåg (iron yoke), der omgiver detektoren, og i hvilket returmagnetfeltlinierne løber. Derfor anbringes yderst om detektoren et særligt sæt μ-kamre.

De ladede partiklers *impuls* fastlægges via krumningen af deres baner i magnetfeltet. Dette er et aksialt felt (i beamets retning). Det har tendens til at ødelægge acceleratorens beamoptik, så derfor anbringes særlige kompensationsfeltmagneter før og efter detektoren.

Neutrale og elektromagnetiske partiklers *energi* måles via kalorimetrene, og deres retning fastlægges af geometrien. Figur (7.2) og (7.3) viser eksempler på computerrekonstruktioner af begivenheder i ALEPH. I den første figur ses en $e^+e^- \to e^+e^-$ begivenhed, mens den sidste viser en $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ begivenhed. Det ses hvorledes elektronerne giver signal i de elektromagnetiske shower-counters, men ikke trænger gennem jern-åget for magneterne. Det gør til gengæld my-leptonerne, der giver signal i my-kamrene, men ikke i de elektromagnetiske shower-counters.

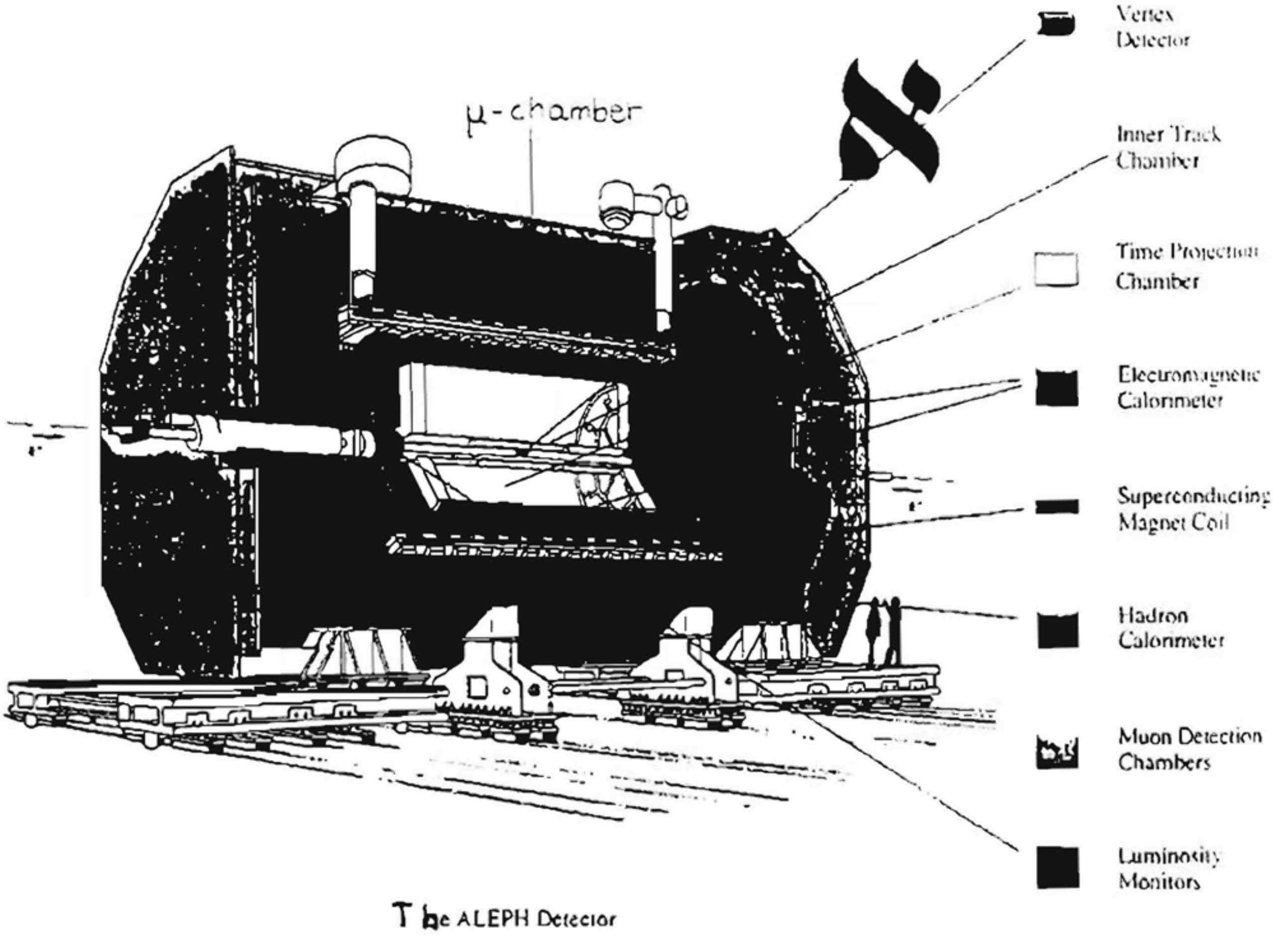
Et sådant detektorsystem har en udmærket 4-impuls og ladningsopløsning, men er dårligt til at skelne fx π-mesoner fra K-mesoner. I mange tilfælde er man heller ikke interesseret i en sådan, men er den ønskelig, må detektoren udvides, fx med Čerenkovkamre til måling af partiklernes hastighed.

På trods af de eksperimentelle vanskeligheder er en række af 70'ernes 80'ernes vigtigste resultater i højenergifysikken opnået med e^+e^--acceleratorer.

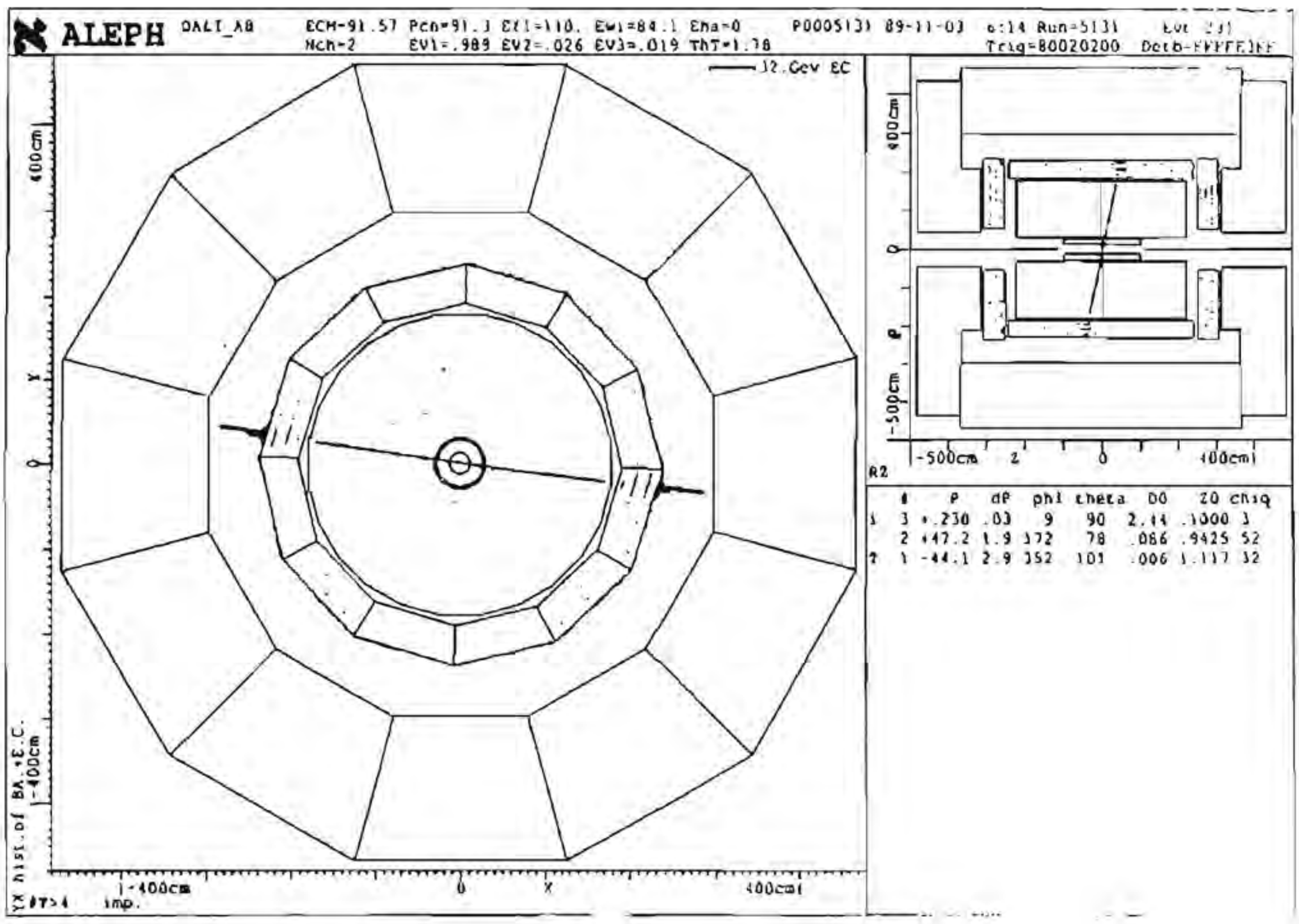
7.2 Verifikation af QED

Den simpleste, rent elektromagnetiske proces i e^+e^--maskiner er $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, for hvilken (5.98)

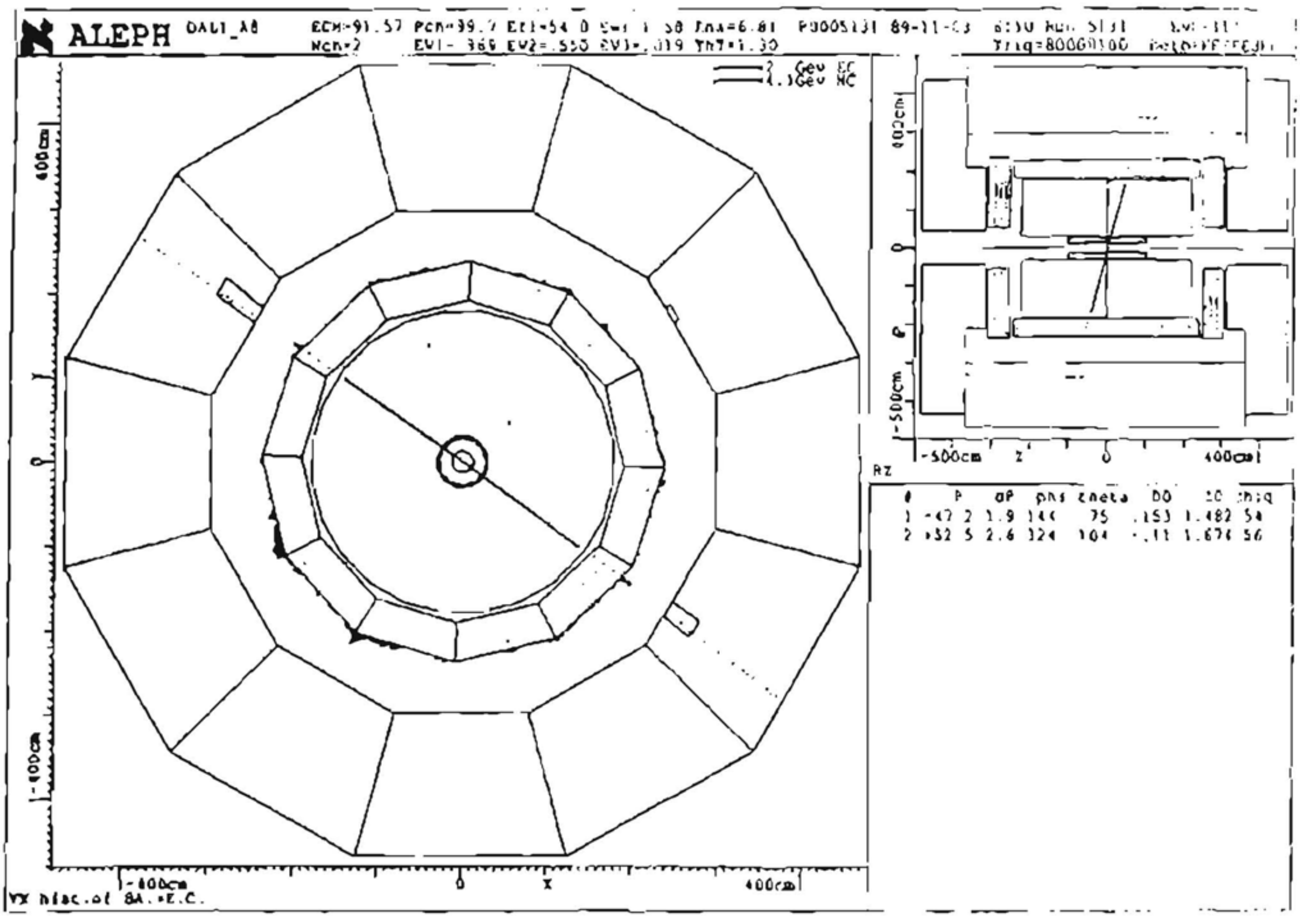
$$s\,\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{2}\,(1+\cos^2\theta) \tag{7.2}$$



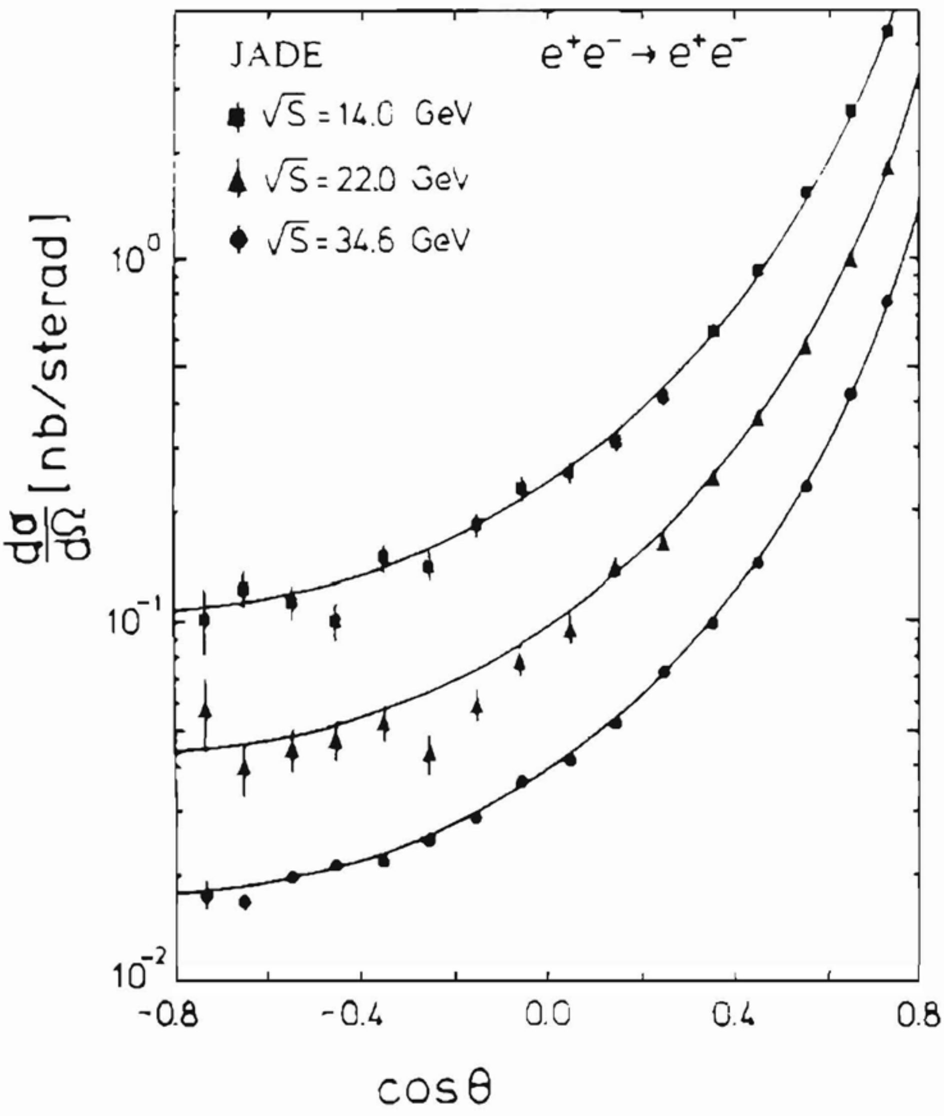
Figur 7.1: ALEPH-detektoren ved e^+e^--acceleratoren LEP ved CERN



Figur 7.2: $e^+e^- \to e^+e^-$ begivenhed i ALEPH



Figur 7.3: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ begivenhed i ALEPH



Figur 7.4: Differentielle tværsnit for Bhabha-spredning fra PETRA

ved høje energier ($s = (2E_{beam})^2$). Eksperimentelt stemmer både vinkelfordeling og den omstændighed, at

$$s\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$$

er uafhængig af s.

Fig.(7.4) viser eksperimentelle resultater for Bhabha-spredning ved forskellige energier. I (5.107) fandt vi

$$s\,\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = 2\pi\alpha^2\left[\sin^{-2}\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} - 1\right]^2 \tag{7.3}$$

ved høje energier, uafhængigt af s. Figuren viser overensstemmelser inden for den eksperimentelle måleusikkerhed.

Ved højere energier ses afvigelser fra QED, som er helt forventet i standardmodellen. De skyldes især tilstedeværelsen af Z^0 resonansen, der bidrager en vældig top til tværsnittet, som skitseret i fig. 7.5 for standardprocessen $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$.

Divergensen i (7.3) for $\theta \to 0$ ligger uden for det praktisk tilgængelige måleområde. For $\theta \to 0$ går den spredte elektron videre inden i beamrøret. Man kan vise, at divergensen forsvinder, når man i stedet spørger (mere fornuftigt) om tværsnittet for $e^+e^- \to e^+e^-$ + et uspecificeret antal fotoner med energi mindre end en vis måleværdi. Sådanne bremsestrålefotoner dannes i stort tal (synchrotronstråling) og er med til at gøre tilværelsen besværlig for e^+e^--eksperimentatorer. Kurverne i (7.4) indeholder visse korrektioner både herfor og for andre QED-strålingskorrektioner.

7.3 "R"

Fig.7.6 viser data for det totale e^+e^- tværsnit. Hovedparten af sluttilstandene består af hadroner. Det ses, at tværsnittet har en slående lighed med tværnittet for $\mu^+\mu^-$ produktion. Bortset fra (lokalt dramatiske!) resonanstoppe (afsn. 7.5), ser vi igen en energiafhængighed som $1/s$. Dette forhold skal vi nu give en yderst simpel fortolkning inden for rammerne af kvarkmodellen.

Hertil indføres den berømte størrelse, R, defineret ved

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadroner})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \tag{7.4}$$

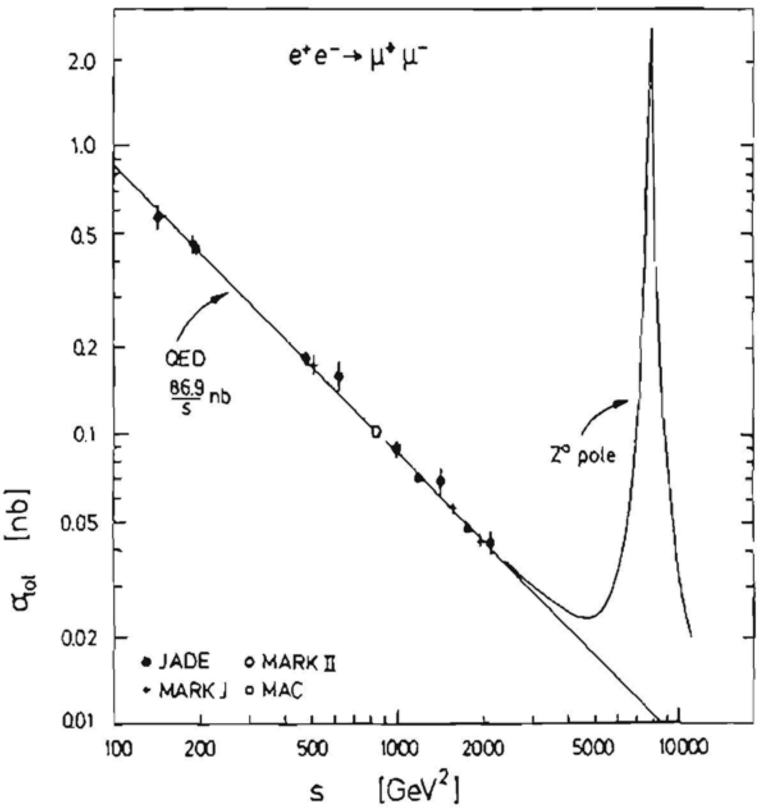
I e^+e^--eksperimenter dividerer man næsten altid tværsnittene med σ_{pt}. Resultatet er så tællehastigheden relativt til tællehastigheden for $\mu^+\mu^-$, som antages bekendt fra QED. Herved omgår man eventuelle maskinusikkerheder vedrørende luminositeten.

Kvarkmodellen suppleret med asymptotisk frihed og med en antagelse om, at hadronisering af kvarkerne er en "venlig" proces, der ikke ændrer resultatet, giver os en uhyre simpel teori for R.

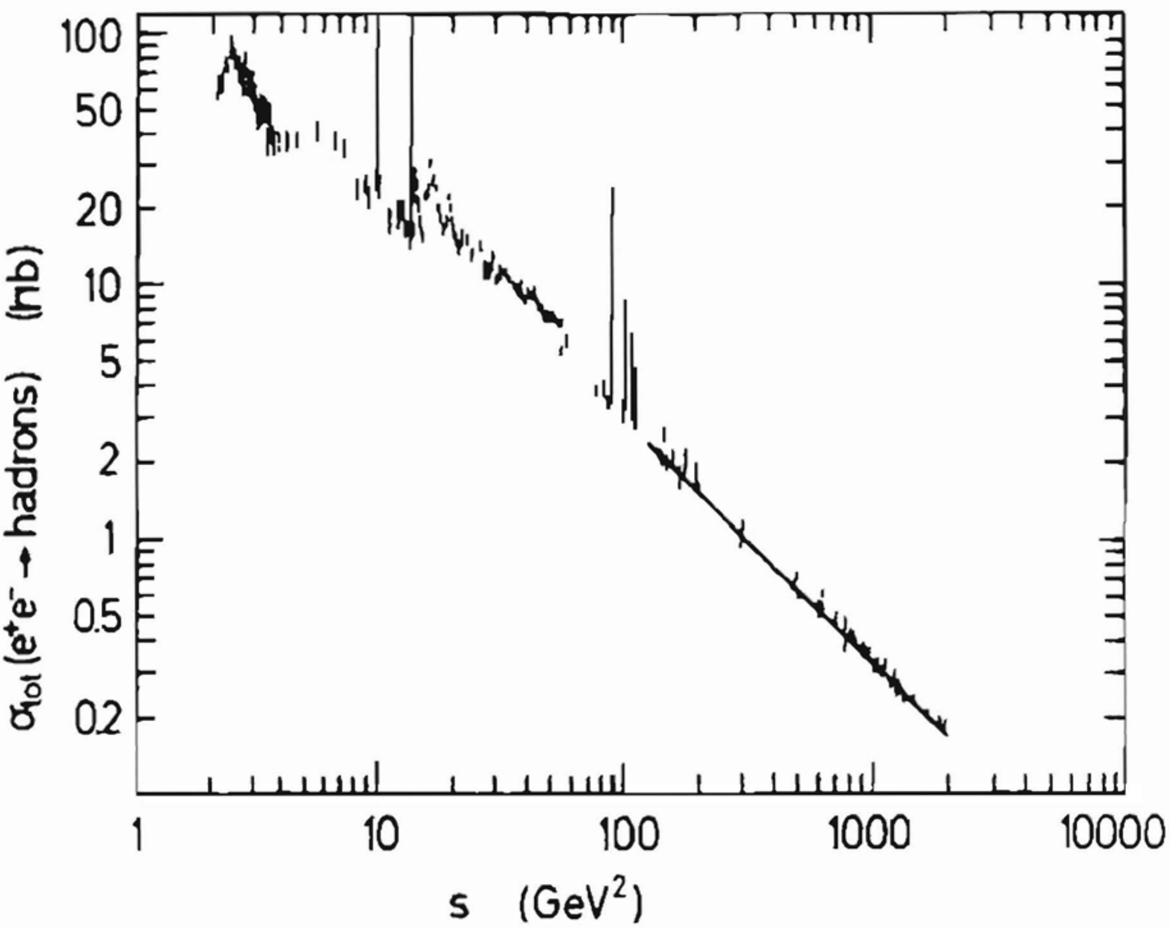
Betragter vi først den hypotetiske proces $e^+e^- \to q\bar{q}$ (q = kvark med ladning $Q_q\cdot e$, e = protonladning), så er trivielt ved energier meget højere end kvarkmassen

$$\frac{\sigma(e^+e^- \to q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = Q_q^2 \tag{7.5}$$

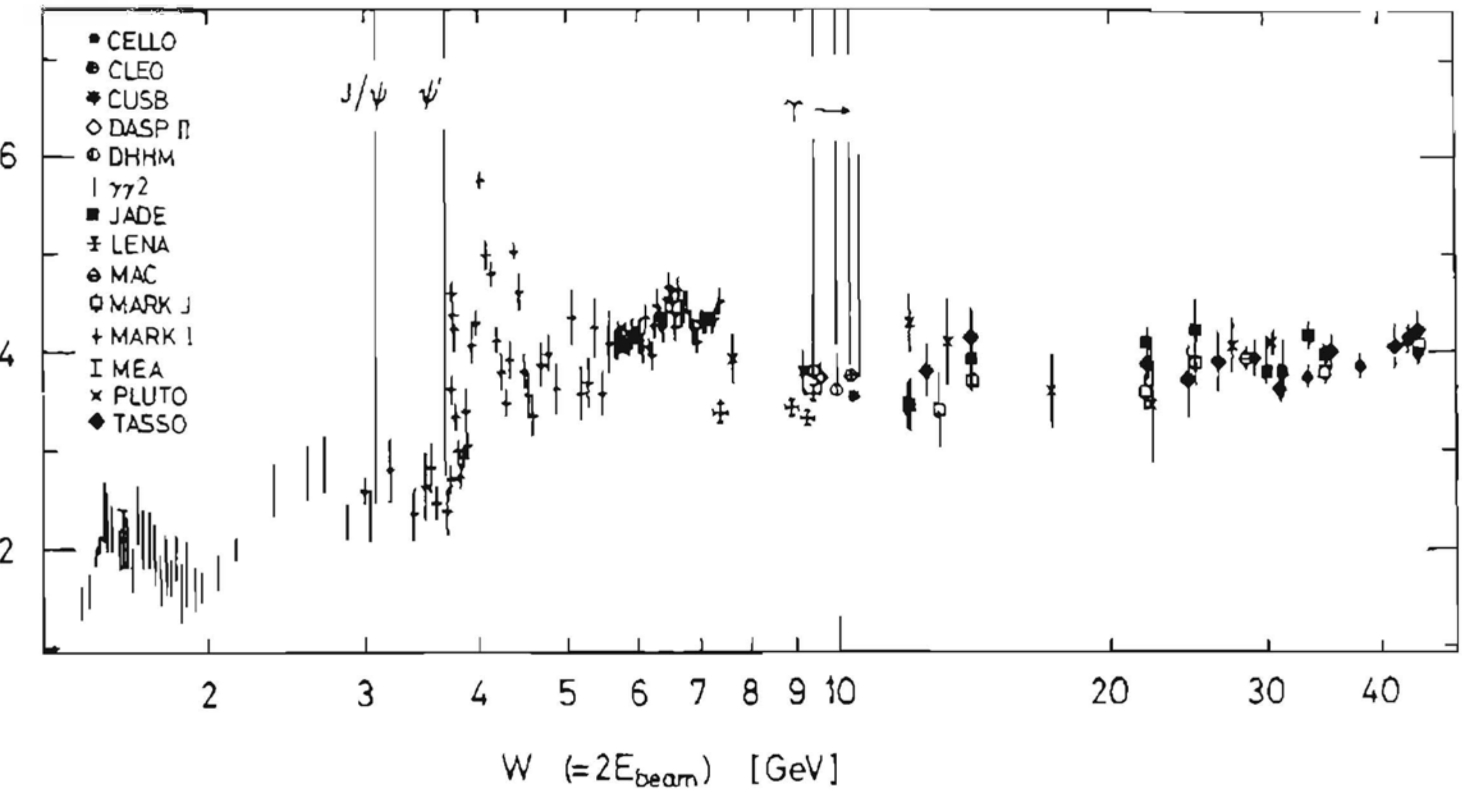
Dette resultat burde være rimeligt ved høje energier, under forudsætning af at vi kunne udføre detektionen af kvarkerne ved meget små afstande. Så ville nemlig – ifølge asymptotisk frihed – QCD-koblingen $\alpha_s(s)$ være så lille, at vi kan se bort fra gluonkorrektioner.



Figur 7.5: $\mu^+\mu^-$-produktion sammenlignet med QED og med det ekstra bidrag fra Z^0-resonansen.



Figur 7.6: Data for det totale e^+e^- tværsnit, med en tydelig gennemsnitlig $1/s$ afhængighed.



Figur 7.7: Måleværdier for R.

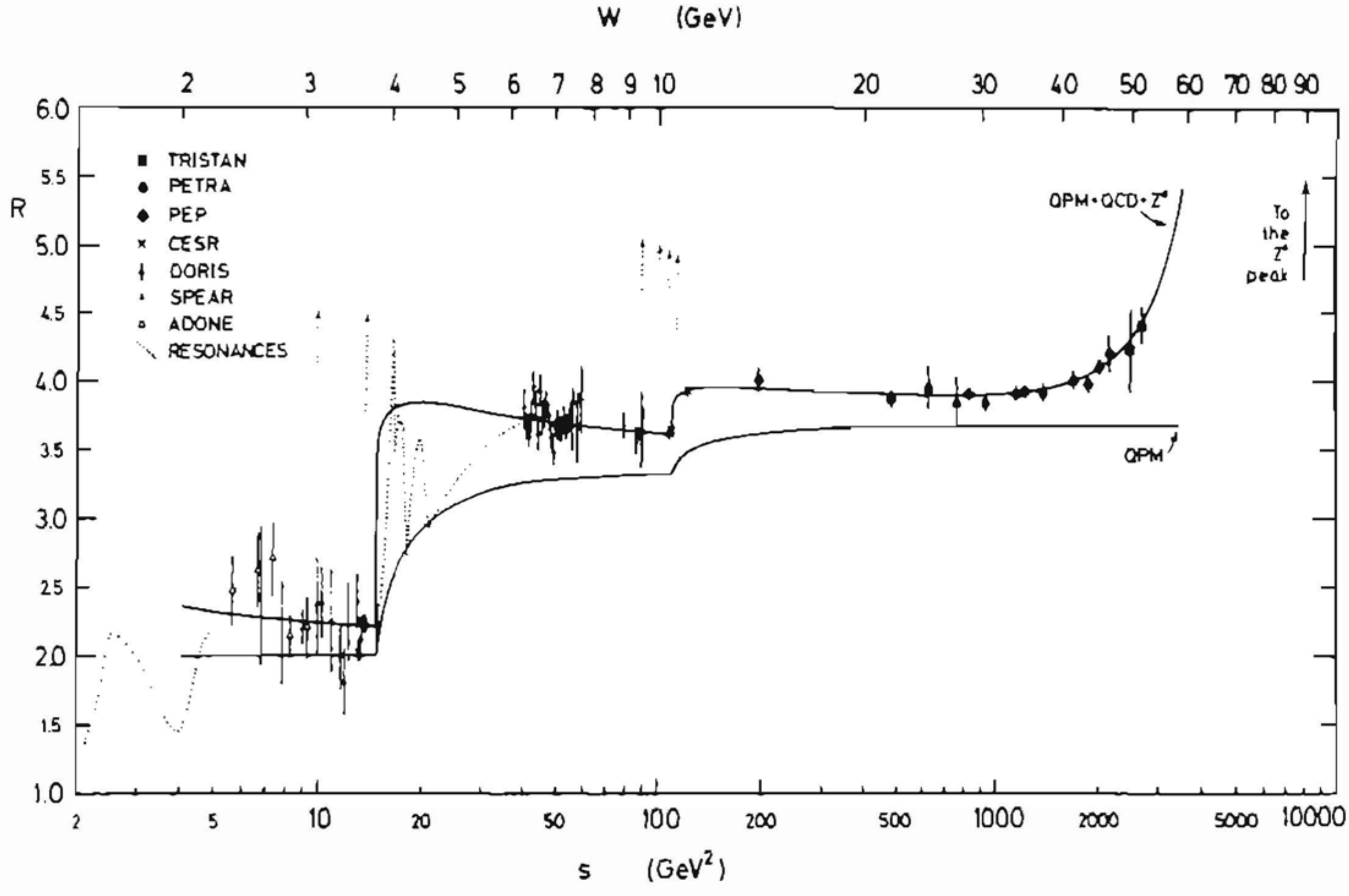
Imidlertid kan vi *ikke* udføre eksperimentet med "detektorer" i en afstand, der er meget mindre end $\Lambda_{QCD}^{-1} \sim 1fm$ (!). Vi *antager* derfor, at forvandlingen af q og $\overline{q}$ til de hadronsystemer, vi *kan* detektere (og som indeholder mange ekstra kvark-antikvarkpar foruden mange gluoner), foregår med sandsynligheden 1. Antagelsen synes nogenlunde rimelig, da vi vUd, at kvarkernes impuls inden i hadronerne er af størrelsesordenen Λ_{QCD}. Ved energier, der er så høje, at denne forstyrrelse kan betragtes som lille, burde argumentet være fornuftigt. Kun i nærheden af resonanser vil vi vente, at udtrykket (7.5) bliver helt forkert, men herom senere.

Vi har derefter følgende simple model for R:

$$R = \sum_i Q_{q_i}^2 \tag{7.6}$$

Her må vi tænke os, at summen skal udstrækkes over de kvarker, q_i, for hvilke den dobbelte masse er mindre end tyngdepunktsenergien. I energiintervallet mellem 2 kvarktærskler forventes R at være konstant.

Fig. (7.7) viser en række eksperimentelle værdier for R. Der ses at være kvalitativ overensstemmelse med et billede for R bestående af plateauer. Vi kan også udregne værdien af disse plateauer. Lad os først betragte området *under* charmtærsklen omkring



Figur 7.8: Måleværdier for R sammenlignet med den simple kvarkmodel (QPM) såvel som med en udvidet, der inkluderer QCD korrektioner og bidrag fra Z^0-resonansen.

3.7 GeV. Så har vi u, d og s-kvarker, hver med 3 farver:

$$R = 3 \times \left[(\frac{2}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2\right] = 3 \times \frac{6}{9} = 2$$

I området mellem c-tærsklen og b-tærsklen får vi yderligere $\Delta R = 3 \cdot 4/9 = 4/3$, og efter b-tærsklen nok en tilvækst på $\Delta R = 3 \times (-1/3)^2 = 1/3$.

Vi ser, at eksperimenterne er i imponerende kvalitativ overensstemmelse med dette yderst simple billede. I fig. (7.8) er vist et par mere sofistikerede forsøg på at fitte data. Kurven markeret QPM (quark parton model) er i det væsentlige ovenstående model med simple beskrivelser af tærskelområdet. Kurven QPM+QCD+Z^0, viser, at små (ret indviklede) QCD (gluon-) korrektioner giver en meget fin overensstemmelse med data, samt at vi ved de højeste energier begynder at se halen af Z^0-resonansen.

Umiddelbart før en ny kvarktærskel forekommer 0, 2 eller 3 meget smalle resonanser (kvarkoniumtilstande). Straks efter tærskelen har R-kurven et meget kompliceret udseende svarende til forekomsten af resonanser med OZI-*tilladte* henfald.

R-kurven ville blive i meget skarp modstrid med data, hvis vi ikke havde colourfaktoren (3) til hjælp. R-kurven er i dag et af de mest direkte beviser, vi har på, at kvarker har colour. Tilsvarende (og faktisk endnu mere numerisk nøjagtige) forhold gør sig gældende ved beskrivelsen af henfaldsbredderne for τ-leptonen og ikke mindst for Z^0 resonansen, men herom senere.

7.4 τ-leptonen

Et af de meget bemærkelsesværdige resultater af e^+e^--fysikken er opdagelsen i 1976 af den ny tunge lepton, kaldet τ med en masse på

$$m_\tau = 1784 \pm 3\ MeV \tag{7.7}$$

Som lepton adskiller τ sig fra andre partikler i e^+e^--stød dels ved sin produktionsmåde dels ved sine henfald. I næste kapitel skal vi studere de svage henfald, mens vi her stort set bare vil studere produktionsmåden.

Signalet for en e^+e^--begivenhed er dog afhængigt af τ-henfaldet. Levetiden for en så tung lepton er for kort til, at dens spor vil kunne detekteres i sædvanlige e^+e^--detektorer. (Dog er den faktisk målt ved en sælig teknik til $(0.308 \pm .008) \times 10^{-12}$ sek., herom i næste kapitel.) Henfaldene (der alle er svage) er dels leptoniske, dels hadroniske:

$$\begin{aligned} \tau^- &\rightarrow \nu_\tau + \text{leptoner} \\ \tau^- &\rightarrow \nu_\tau + \text{hadroner} \end{aligned} \tag{7.8}$$

hvor vi antager, at τ er ledsaget af sin egen neutrino forskellig fra de to til elektronen og myonen hørende neutrinoer. Der findes en lang række evidenser herfor, vi ikke skal komme ind på. Begivenheder af formen

$$\begin{aligned} e^+e^- &\rightarrow \tau^+\tau^- \\ \tau^- &\rightarrow \nu_\tau + e^- + \overline{\nu}_e \\ \tau^+ &\rightarrow \overline{\nu}_\tau + \mu^+ + \nu_\mu \end{aligned} \tag{7.9}$$

vil detekteres som en e^- og en μ^+ i sluttilstanden og intet andet! Sådanne henfald kan, så vidt vi ved, kun komme fra $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$. Når de observeres, er problemet at overbevise sig om, at det ikke bare er detektoren, der har mistet de øvrige partikler. Med moderne detektorer er usikkerheden minimal.

Mere information får man ved at benytte, at de fleste τ-henfald kun giver anledning til én ladet partikel. I fig.(7.9) er vist størrelsen

$$R_{eX}^{2p} \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to e^\pm, 2\text{prong}, X)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \tag{7.10}$$

Sluttilstanden er specificeret ved at indeholde én elektron (eller positron), 2 prongs (dvs 2 ladede partikler, altså én ladet partikel foruden $e^\pm$), samt noget uspecificeret, uladet (X).

Vi kan nemt nedskrive et nyttigt teoretisk udtryk for denne størrelse. Da τ i alle henseender produceres som μ, får vi fra (5.99), idet vi sætter $\beta_e = 1$ for $s \gg m_e^2$:

$$\sigma(e^+e^- \to \tau^+\tau^-) = \frac{\alpha^2\pi}{s}\beta_\tau(1 + \frac{1}{3}\beta_\tau^2 + \frac{4m_\tau^2}{s})$$

hvor

$$\beta_\tau = \frac{p_\tau}{E_\tau} = \frac{1}{E_\tau}\sqrt{E_\tau^2 - m_\tau^2} = \sqrt{1 - \frac{m_\tau^2}{E_\tau^2}} = \sqrt{1 - \frac{4m_\tau^2}{s}}$$

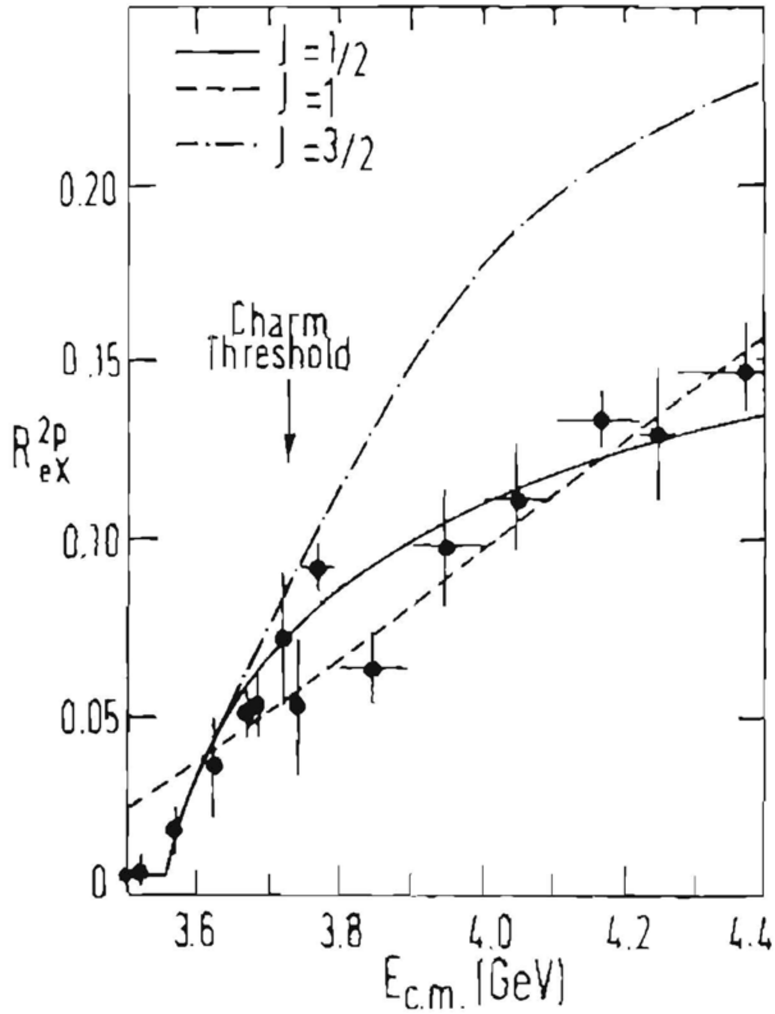
Altså

$$R_\tau \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \tau^+\tau^-)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = \sqrt{1 - \frac{4m_\tau^2}{s}}\,(1 + \frac{2m_\tau^2}{s}) \tag{7.11}$$

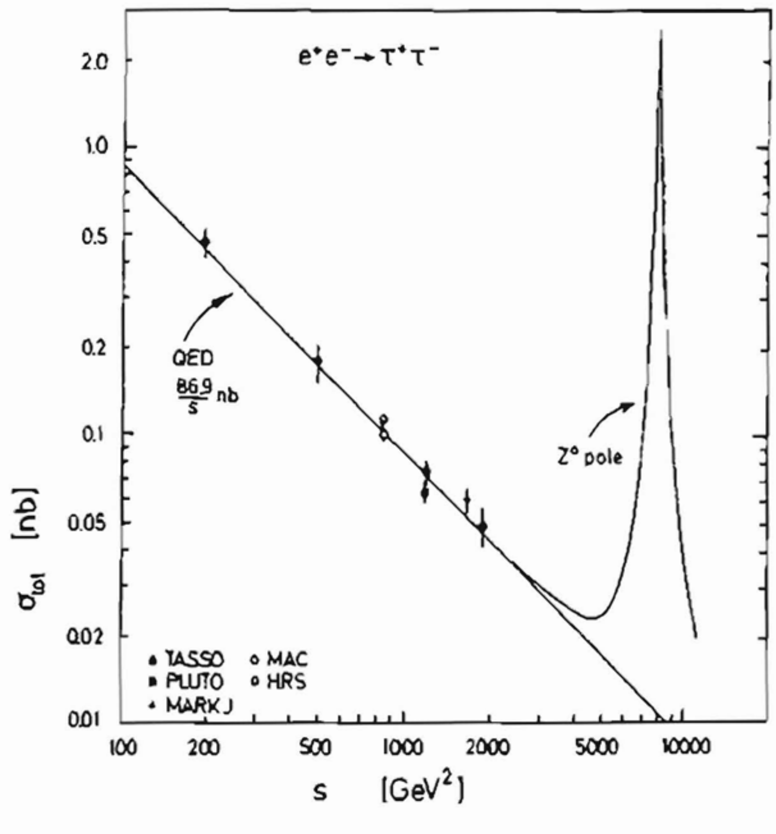
Størrelsen R_{eX}^{2p} er proportional hermed. Proportionalitetsfaktoren er sandsynligheden for, at den ene τ henfalder til en $e^\pm$ og den anden til én ladet partikel (+ uladede).

Afgørende for formen (7.11) er, at τ har spin $\frac{1}{2}$. Dette er vist på fig.(7.9), hvor den fuldt optrukne kurve netop er (7.11) (pånær en konstant faktor). Hvis i stedet det producerede partikelpar havde spin $0, 1$ eller $3/2$, ville man få andre kurver, der ikke fitter data. Datapunkterne på (7.9) beskrives meget smukt af kvadratroden i (7.11) og herfra bestemmes værdien (7.7) for τ-massen. Det er endvidere bemærkelsesværdigt, at ved høje energier stemmer udtrykket (7.11) stadig. Denne meget langsomme, jævnt forløbende energiafhængighed ($R_\tau \to 1, s \gg (2m_\tau)^2$ er i skarp kontrast til den takkede R-kurve, (7.7), og viser, at τ-partiklen ikke deltager i resonansdelen af tværsnittet. Dette er naturligvis i overensstemmelse med, at τ er en lepton - ikke en hadron.

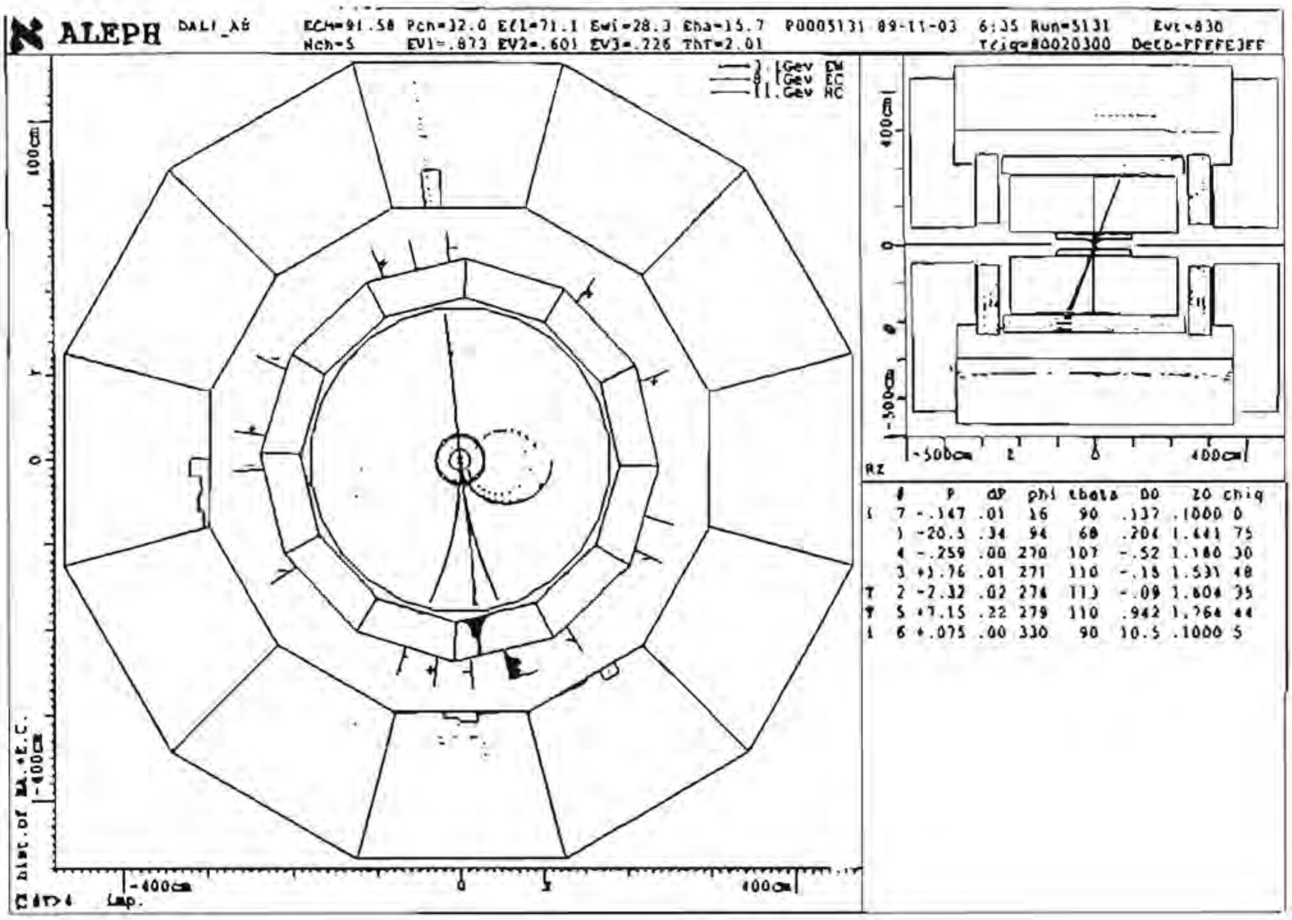
Fig.(7.10) illustrerer netop dette forhold. Fig.(7.11) viser en begivenhed i ALEPH detektoren med både en myon og en elektron i sluttilstanden, foruden to hurtige og nogle langsomme hadroner. Tolkningen i termer af τ-henfald vil blive klarere i næste kapitel. Men den involverer, at der er sket en $\tau^+\tau^-$ produktion, hvor den ene lepton er henfaldet leptonisk til en muon (og to usynlige myon- og τ-neutrinoer) og den anden τ-lepton er henfaldet hadronisk til et kvark-anti-kvark par (samt en usynlig τ-neutrino), der efter hadroniseringen har givet anledning dels til ladede hadroner, dels til en π^0, der har manifesteret sig ved et signal i den elektromagnetiske shower counter.



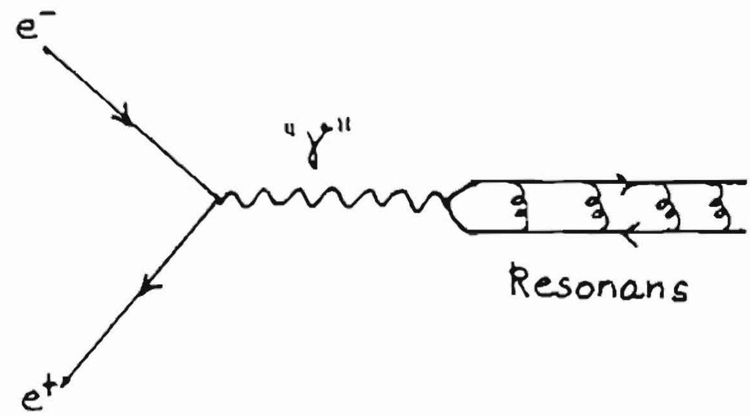
Figur 7.9: To-prong inklusiv elektronproduktion (τ-signal) fra DELCO-detektoren ved e^+e^--acceleratoren SPEAR ved SLAC (ældre data).



Figur 7.10: Den karakteristiske s-afhængighed af τ produktion



Figur 7.11: ALEPH-begivenhed for $\tau^+\tau^-$ produktion med efterfølgende leptonisk og hadronisk henfald af de to τ-leptoner.



Figur 7.12: Resonansproduktion via virtuel foton.

7.5 Resonanser i e^+e^-–stød

Gennembruddet for e^+e^--fysik kom med opdagelsen af charmoniumresonansen J/ψ (3097 MeV) i efteråret 1974 ved SLAC. Her skal vi først studere resonansproduktion i e^+e^--stød så generelt som muligt.

7.5.1 Kvantetal i e^+e^- produktion.

I laveste orden i finstrukturkonstanten $\alpha \sim 1/137$ må resonansproduktion foregå efter et diagram af typen, (7.12). Lad os først se på hvilke mulige kvantetal, der kan komme på tale for en sådan resonans. Da produktionsmetoden er elektromagnetisk, er P og C bevaret (foruden ladning og angulært moment).

Da vi endvidere har en virtuel foton som mellemstand, og fotonen har $Q = 0$, $J^{PC} = 1^{--}$, kunne vi være fristede til at konkludere, at resonansen må have samme kvantetal. Konklusionen er også korrekt, men argumentet er ikke overbevisende, da udledelsen af fotonens kvantetal benyttede fysiske fotoner på masseskallen. Vi vil derfor bruge et andet argument.

Amplituden for processen, (7.12), kan skrives

$$T \propto \bar{v}_{s'}(\vec{p}_{e^+})\gamma_\mu u_s(\vec{p}_{e^-})\ \frac{1}{s}\langle R|J^\mu|0\rangle \tag{7.12}$$

Her kommer faktoren $\bar{v}\gamma_\mu u$ fra $e^+e^-\gamma$–vertexet, og faktoren $1/s$ er fotonpropagatoren, idet $s =$ (totale c.m. energi)^2. Matrikselementet $\langle R|J^\mu|0\rangle$ er, hvad der er tilbage som relativt ukendt. $|R\rangle$ er resonanstilstandsvektoren, og J^μ er den elektromagnetiske strøm, som indeholder resonansdelen. I vores behandling af $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ fandt vi et lignende udtryk med den forskel, at $\langle\mu^+\mu^-|J^\mu|0\rangle$-delen her kunne beregnes.

Imidlertid kender vi transformationsegenskaberne for J^μ: Både J_μ og A^μ transformerer ens, således at $\mathcal{L}_I \propto A_\mu J^\mu$ er invariant:

$$\mathcal{C}J^\mu\mathcal{C}^{-1} = -J^\mu \quad , \quad \mathcal{P}J^\mu\mathcal{P}^\dagger = J_\mu \tag{7.13}$$

og J^μ transformerer som en 4-vektor.

Heraf fås, idet $\mathcal{C}|0\rangle = |0\rangle$ og $\mathcal{P}|0\rangle = |0\rangle$ og $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}^\dagger$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}$

$$\langle R|J^\mu|0\rangle = -\langle R|\mathcal{C}J^\mu\mathcal{C}|0\rangle = -(\langle R|\mathcal{C}^\dagger)J^\mu|0\rangle$$

eller

$$\mathcal{C}|R\rangle = -|R\rangle$$

For paritetstransformationen er argumentet mere indviklet, da $\mu = 0$ synes at give $P = +1$, medens $\mu \neq 0$ synes at give $P = -1$. Imidlertid er jo $\langle R|J^\mu|0\rangle$ kontraheret med $\bar{v}\gamma_\mu u$. Og i e^+e^--systemets c.m. (som er laboratoriesystemet) har vi for $\mu = 0$

$$\bar{v}_{s'}(\vec{p}_{e^+})\gamma_0 u_s(\vec{p}_{e^-}) = v^\dagger_{s'}(-\vec{p}_{e^-})u_s(\vec{p}_{e^-}) = 0$$

jfr. (3.89). Pga formen af $e^+e^-\gamma$ vertexet skal vi altså kun betragte $\mu \neq 0$. Herefter følger det straks, at $|R\rangle$ transformerer under P som $\vec{J}$, og at $|R\rangle$ transformerer under rotationer som $\vec{J}$, altså som en rumlig vektor, og altså har spin 1. Altså i e^+e^--stød har direkte producerede resonanser

$$J^{PC} = 1^{--} \tag{7.14}$$

7.5.2 Måling af resonansers partielle henfaldsbredde til e^+e^-.

Først ser vi på udtrykket for Γ_e : Overgangen $R \to e^+e^-$.

Lad matrikselementet herfor være T, hvor vi undlader at specificere alle impuls- og spinvariable eksplicit. Idet vi tænker os, at vi har produceret et sample af upolariserede spin-1 resonanser, er overgangshyppigheden pr. tidsenhed til e^+e^- givet ved (smlgn. kap. 1)

$$\Gamma_e = 4\pi \frac{\sqrt{\lambda}}{64\pi^2 M^3} \, \frac{1}{3} \sum_{spin} |T|^2 \tag{7.15}$$

Faktoren 4π kommer fra vinkelintegrationen, idet der er isotropi, når vi betragter spinsummen svarende til et upolariseret sample. Faktoren $1/3$ kommer fra, at vi *midler* over alle de tre mulige spintilstande for spin-1 resonansen.

Lad os dernæst se på tværsnittet for processen $e^+e^- \to R$. Af det generelle udtryk i kap. 1 findes

$$\sigma(e^+e^- \to R) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3\, 2E} \, \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \, \frac{1}{4} \sum_{spin} |\tilde{T}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - P)$$

Her er P^μ 4-impulsen for resonansen R med $P_\mu P^\mu = M^2$, hvor M er resonansmassen. $E \equiv P^0$ =resonansens energi for impuls $\vec{P}$; p_a og p_b er 4-impulserne for e^- og e^+ ; $\tilde{T}$ er amplituden for $e^+e^- \to R$.

Hvis der er time reversal invarians og paritetsinvarians,[1] gælder (principle of detailed balance)

$$\sum_{spin} |\tilde{T}|^2 = \sum_{spin} |T|^2$$

[1] Time reversal operationen vender både impulser og spin, medens paritetsoperationen vender impulserne, men ikke spinnene tilbage. Derfor må vi summere over spin for at få lighedstegnet opfyldt.

Når vi betragter stød af upolariserede elektroner og positroner (4 spin tilstande) og udfører d^3P-integrationen i c.m. for e^+e^-, får vi

$$\sigma(e^+e^- \to R) = \frac{1}{8}\frac{\pi}{M\sqrt{\lambda}}\sum_{spin}|T|^2\delta(\sqrt{s}-M) \tag{7.16}$$

hvor igen $\sqrt{s}$ er den totale c.m. energi. Vi ser, at tværsnittet er nul, undtagen når $\sqrt{s}$ har den "rigtige" værdi. Når $\sqrt{s} = M$, udviser σ en uendelig høj top. Dette resultat er naturligvis urealistisk, og det beror på, at vi har negligeret resonansens endelige bredde. Men for de her betragtede resonanser er det faktisk meget fornuftigt at se bort fra den i første omgang. Disse resonanser har nemlig bredder, der er lang mindre end acceleratorbeamets energipræcision. Den observerede bredde i "rå" data er derfor blot et udtryk for maskinens energiudtværing. Hvad vi i praksisk kan måle er derfor kun *integralet* over resonansens top: summen af alle begivenheder med energier hen over toppen.

Inden vi derfor eksplicit indfører den rigtige resonansbredde, omskriver vi (7.16), idet vi eliminerer $\sum_{spin}|T|^2$ fra (7.15) og bruger $\sqrt{\lambda} \simeq M^2$, når $M \gg m_{e^\pm}$:

$$\sigma(e^+e^- \to R) = \frac{6\pi^2\Gamma_e}{M^2}\delta(\sqrt{s}-M) \tag{7.17}$$

Dette udtryk kan vi trivielt generalisere til et udtryk for $\sigma(e^+e^- \to R \to f)$, hvor f repræsenterer en bestemt defineret sluttilstand. Idet nemlig B_f repræsenterer den procentdel af alle R–henfald, som fører til sluttilstanden f (og kaldes forgreningsforholdet), og idet vi indfører partialbredden

$$\Gamma_f \equiv B_f \cdot \Gamma \tag{7.18}$$

i lighed med $\Gamma_e \equiv B_e \cdot \Gamma$, og

$$\Gamma = \sum_f \Gamma_f \quad \text{eller} \quad \sum_f B_f = 1$$

har vi

$$\sigma(e^+e^- \to R \to f) = B_f\frac{6\pi^2\Gamma_e}{M^2}\delta(\sqrt{s}-M) \tag{7.19}$$

Dette er vores søgte nøgleresultat. Vi vil nu anvende det til en eksperimentel bestemmelse af bredden af J/ψ-resonansen. Fig.(7.13) illustrerer situationen og viser de oprindelige målinger for produktion af J/ψ med efterfølgende henfald til hhv hadroner (a), $\mu^+\mu^-$ (b) og e^+e^- (c). Enheden for tværsnittet σ er nanobarn (nb), som er 10^{-33} cm^2. "$|cos\theta| \leq 0,6$" i (b) og (c) henviser til hvilket vinkelområde, detektoren har dækket. Datapunkterne er de historiske fra SPEAR (A.M. Boyarski et al., Phys. Rev. Lett.**34**, 1357, 1975). Man ser pæne resonanstoppe for tværsnittene

$$\sigma(e^+e^- \to \text{hadroner}) \ , \ \sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) \text{ og } \sigma(e^+e^- \to e^+e^-)$$

men bredderne er = maskinens energiopløsning $\sim$ 10 MeV. Dette tal er langt mere end resonansernes virkelige bredde.

Imidlertid viser figuren også, at *integralet* under resonanstoppen kan bestemmes med god nøjagtighed. Indfører vi

$$\sum(e^+e^- \to f) \equiv \int_{\text{resonanstop}} dE\ \sigma(e^+e^- \to f)$$

får vi af (7.19)

$$\sum(e^+e^- \to f) = \frac{6\pi^2}{M^2}\Gamma_e \cdot \Gamma_f/\Gamma$$

Benyttes dette for f = hadroner, $\mu^+\mu^-$ og e^+e^-, findes (jfr PDG, 1989)

$$\Gamma_e \simeq \Gamma_\mu = 4.72 \pm 0.35\text{keV} \quad , \quad B_h = 86.0 \pm 2.0\%$$

svarende til, at

$$\Gamma_{J/\psi} = 68 \pm 10\text{keV}$$

idet andre (elektromagnetiske) henfald kan negligeres i sammenligning hermed.

7.5.3 Breit-Wigner resonansformlen

Selvom den virkelige bredde af J/ψ-resonansen altså ikke direkte kan ses i de aktuelle eksperimenter, vil vi alligevel for fuldstændighedens skyld udlede Breit-Wigner formlen for resonansers form. Vi vil senere få brug for den i forbindelse med Z^0-resonansen, hvis bredde vil vise sig at være langt større end beamets energi-ubestemthed.

Vi ønsker først at argumentere for, at resonanser optræder som komplekse poler i energiplanen for spredningsamplituder. Dette er os ikke ganske ukendt. Vi har set, at propagatorerne for fotoner og elektroner svarer til poler i p^2-planen på den reelle akse. For fotoner er polen ved $p^2 = m_\gamma^2 = 0$, og for elektroner ved $p^2 = m_e^2$.

Lad os nøjes med et heuristisk argument for resonanser (om ikke andet er argumentet godt, når man skal huske fortegn og faktorer):

Bølgefunktionen for en stationær tilstand indeholder tidsfaktoren

$$e^{-iEt}$$

i Schrödinger-billedet. For en partikel i hvile med masse M har alle amplituder derfor faktoren

$$e^{-iMt}$$

Transformeres en sådan amplitude fra tidsvariablen til energivariablen, fås

$$\int_0^\infty dt\; e^{-iMt} \times e^{+iEt} \propto \frac{1}{E-M}$$

idet vi antager, at integranden indeholder passende andre faktorer, som gør integralet konvergent. Integralets grænser har at gøre med, at vi må tænke på en situation, hvor resonansen vides at eksistere til en bestemt tid, her $t = 0$, uden at være henfaldet. Vi ser altså, at der optræder en pol for $E = M$.

En ustabil partikel med levetid τ har en bølgefunktion (bedre: er beskrevet ved amplituder), hvis kvadrat henfalder eksponentielt med faktoren

$$e^{-t/\tau} \simeq e^{-t\Gamma}$$

hvor τ og Γ er henholdsvis levetiden og den totale bredde. For at fremkalde denne opførsel kræves, at M har en imaginærdel:

$$M = M_0 - i\frac{\Gamma}{2}$$

hvor M_0 er resonansens masse. og Γ dens bredde. Så har nemlig bølgefunktionen faktoren

$$e^{-iMt} = e^{-iM_0t} \times e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \quad \text{og} \quad |\psi|^2 \propto e^{-\Gamma \cdot t}$$

Men så har igen den Fourier-transformerede (dvs amplituden som funktion af E) en pol ved

$$E = M = M_0 - i\frac{\Gamma}{2}$$

Vi kan benytte dette resultat til at finde faconen på energiafhængigheden af $\sigma(e^+e^- \to R)$ i omegnen af resonansens masse. Vi ved, at et totalt tværsnit som $\sigma(e^+e^- \to R)$ (summeret over alle mulige henfaldsmåder for R) er nært forbundet til *imaginærdelen* af den forlæns elastiske amplitude (jfr. kap. 1 om den optiske sætning). Men som alle andre amplituder indeholder denne polen $(E-(M_0-i\Gamma/2))^{-1} = (\sqrt{s}-(M_0-i\Gamma/2))^{-1}$, og dens imaginærdel er derfor proportional med

$$\text{Im} \propto \frac{\Gamma/2}{(E-M_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

Vi kan derfor sætte

$$\sigma(e^+e^- \to R) = \text{konstant} \times \frac{\Gamma/2}{(E-M_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

i nærheden af $E = \sqrt{s} = M_0$. Denne form er tæt på en δ-funktion ved $E = M_0$ for små værdier af Γ. Vi kan også finde konstanten ved at forlange, at integralet over resonanstoppen skal stemme overens med (7.17). Nu er

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = [\frac{1}{a}\text{Arc tg}\,\frac{x}{a}]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}$$

Heraf fås Breit–Wigner formen

$$\sigma(e^+e^- \to R) = \frac{3\pi}{M^2}\frac{\Gamma_e \cdot \Gamma}{(\sqrt{s}-M)^2 + \Gamma^2/4} \tag{7.20}$$

(hvor igen M = resonansmassen). Tilsvarende for tværsnittet for resonansproduktion førende til en bestemt specificeret sluttilstand, f:

$$\sigma(e^+e^- \to R \to f) = \frac{3\pi}{M^2}\frac{\Gamma_e \cdot \Gamma_f}{(\sqrt{s}-M)^2 + \Gamma^2/4} \tag{7.21}$$

7.6 Kvarkonium $\to l^+l^-$

Lad os forsøge at konstruere en model for henfald af et kvarkoniumsystem til et leptonpar, m.a.o. for henfaldsbredden Γ_e (og Γ_μ). Vi kan tænke på J/ψ-resonansen, men behandlingen er gyldig for alle næsten urelativistiske kvarkoniumresonanser med $J^{PC} = 1^{--}$.

Vi tænker os, at henfaldet sker på den måde, at kvarken og antikvarken inde i hadronen annihilerer med hinanden under dannelse af et leptonpar. Vores strategi bliver derfor følgende:

1. Beregn tværsnittet for $q\bar{q} \to l^+l^-$ svarende til, at $q\bar{q}$-systemet danner en coloursinglet med $J^{PC} = 1^{--}$.

2. Multiplicer resultatet med fluxen svarende til hyppigheden af "kvarksammenstød" i hadronen. Resultatet er så antallet af annihilationer til l^+l^- pr. tidsenhed. altså netop Γ_l.

Tværsnittet for $q\bar{q} \to l^+l^-$ kan vi næsten aflæse af tværsnittet for $e^+e^- \to l^+l^-$ (5.99)

$$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{\alpha^2\pi}{s}\,\frac{\beta_\mu}{\beta_e}\,(1 + \frac{1}{3}\,\beta_e^2\beta_\mu^2 + \frac{4}{s}\,(m_\mu^2 + m_e^2)) \qquad (7.22)$$

Bortset fra, at vi skriver $q\bar{q}$ i stedet for e^+e^- og l^+l^- i stedet for $\mu^+\mu^-$, skal vi blot huske, (1) at kvarkens ladning er $Q \cdot e$ i stedet for e (dette giver en faktor Q i amplituden og en faktor Q^2 i σ), og (2) at vi betragter den superposition af kvark-antikvark, der svarer til en coloursinglet:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\,[|q_1\bar{q}_1\rangle + |q_2\bar{q}_2\rangle + |q_3\bar{q}_3\rangle]$$

For hver tilstand får vi en amplitude som den, der gav (5.99) *uafhængigt* af kvarkparrets farve. Derfor kommer der en ekstra faktor $\sqrt{3}$ i amplituden. Altså finder vi

$$\sigma(q\bar{q} \to l^+l^-)\Big|_{coloursinglet} = \frac{3Q^2\alpha^2\pi}{s}\,\frac{\beta_l}{\beta_q}\left(1 + \frac{1}{3}\,\beta_q^2\beta_l^2 + \frac{4}{s}\,(m_q^2 + m_l^2)\right) \qquad (7.23)$$

Vi ønsker nu at anvende dette på J/ψ for eksempel og betragte kvarkerne som urelativistiske. Når vi videre negligerer leptonmassen i forhold til kvarkoniummassen samt sætter

$$s = M^2 \simeq (2m_q)^2$$

får vi

$$\sigma(q\bar{q} \to l^+l^-) = \frac{3Q^2\alpha^2\pi}{M^2}\,\frac{2}{\beta_q} \qquad (7.24)$$

Dette er tværsnittet for upolariserede kvarker, dvs vi har summeret over 4 mulige spinkonfigurationer af $q\bar{q}$ og derpå divideret resultatet med 4. Imidlertid ved vi, at kun *triplet* tilstanden kan bidrage til vores behandling af $J^{PC} = 1^{--}$-resonanser. Sagt med andre ord: **Singlettilstanden véd** vi vil give 0. Hvad vi har brug for i beregningen af Γ_l er

$$\frac{1}{3}\sum_{\text{spin af } 1^{--}} |T|^2$$

så følgelig er tværsnittet for $q\bar{q}$ *i en triplet tilstand* (7.24) multipliceret med 4/3.

Endelig: For at beregne henfaldshyppigheden pr. tidsenhed må vi multiplicere tværsnittet med fluxen af $q\bar{q}$ i sammenstødet. Tætheden af kvarker er

$$|\psi(0)|^2$$

hvor $\psi(\vec{x})$ er den urelativistiske bølgefunktion. Den relative hastighed af q og $\bar{q}$ (urelativistisk system) er $2 \cdot \beta_q$. Vi får derfor omsider

$$\Gamma_l = 16\pi\frac{\alpha^2Q^2}{M^2}|\psi(0)|^2 \qquad (7.25)$$

Vi skal senere vurdere $|\psi(0)|^2$, men lad os først bruge de eksperimentelle værdier for Γ_l til at se, hvad de aktuelle værdier af $|\psi(0)|^2/M^2$ er.

For ρ^0 og ω har vi ikke urelativistiske systemer, så det er noget tvivlsomt hvor nyttigt det er at anvende formlen. Alligevel giver en anvendelse gode resultater, så vi forsøger. Dog må vi huske, at vi ikke har en simpel $q\bar{q}$-tilstand, men (jfr. kap. 4)

$$|\rho^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle\right) \quad \text{og} \quad |\omega\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|d\bar{d}\rangle + |u\bar{u}\rangle\right)$$

Det virker derfor, som disse mesoner har effektiv ladning $\overline{Q}(\rho^0)$ og $\overline{Q}(\omega)$ af størrelsen (tænk på amplituderne)

$$\overline{Q}(\rho^0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{og} \quad \overline{Q}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

I nedenstående tabel har vi angivet Γ_l og Γ_l/Q^2 for en række kvarkoniumtilstande med $J^{PC} = 1^{--}$.

Table 7.1

	Q^2	$\Gamma_e(keV)$	$\Gamma_e/\overline{Q}^2(keV)$
ρ^0	1/2	6.8 ± 0.3	$13.6 \pm .6$
ω	1/18	0.60 ± 0.22	10.8 ± 4
ϕ	1/9	$1.37 \pm .05$	$12.3 \pm .5$
J/ψ	4/9	4.72 ± 0.35	$10.6 \pm .8$
Υ	1/9	$1.34 \pm .04$	$12.1 \pm .5$

Vi ser, at der er en slående overensstemmmelse med værdierne for $\Gamma_e/\overline{Q}^2$. Dette er et væsentligt argument for at tillægge b–kvarken en ladning på $-1/3$. Med værdien 2/3 ville vi have fået $\Gamma_e/Q^2 = 3.0\ keV$, som er en faktor 4 mindre end værdien for ϕ og J/ψ.

I tabellen har vi antaget "e–μ-universalitet" : At $\Gamma_e = \Gamma_\mu$. Dette følger af vores teoretiske behandling og er i overensstemmelse med målingerne inden for usikkerheden (omend forholdene for ω og ρ^0 er komplicerede bl.a. af ω–ρ-mixing).

7.7 Potentialmodellen for kvarkonium

Vi betragter nu en model for et potential mellem kvarkerne, q og $\bar{q}$ i en kvarkoniumtilstand med kvarkmasser m_q så store (specielt i forhold til Λ_{QCD}), at en urelativistisk potentialbehandling kan forsvares.

Vores diskussion vil stort set kun blive brugt på charmonium, som er det system, der historisk (i slutningen af '70'erne) kom til at spille en afgørende rolle for vores overbevisning om kvarkmodellens rigtighed. Men en helt tilsvarende analyse kan gennemføres for Υ–familien bestående af $b\bar{b}$. Det fremgår specielt heraf, at ét og samme potential kan beskrive begge systemer. Dette er en bekræftelse af en af QCD teoriens vigtigste forudsigelser: flavour-invarians af kvark-gluon-koblingen.

Det urelativistiske QCD-potential kan i princippet udledes, men som sædvanlig har vi vanskeligheder med præcise beregninger af andet end potentialets form ved små afstande, hvor vi kan benytte perturbationsteori. I de senere år er der dog fremkommet ret troværdige beregninger af potentialets form også ved store afstande på basis af omfattende numeriske undersøgelser af QCD's gitter-formulering. Disse resultater bekræfter stort set de mere modelafhængige gæt, man har gjort. Vi vil her se på den såkaldte Cornell-model for potentialet (mere interessante QCD-inspirerede modeller findes, men det vil her føre for vidt at diskutere dem).

Idet r er afstanden mellem q og $\bar{q}$, ansætter vi

$$V(r) = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s(r)}{r} + \frac{r}{A^2} + \text{nulpunktsenergi} \tag{7.26}$$

Dette potential er inspireret af QCD og fænomenologi på flg. måde:

For små afstande er interkvarkkræfterne domineret af enkeltgluonudveksling med en lille værdi for den stærke finstrukturkonstant α_s. Vi har allerede set, at når $r \to 0$ venter vi, at[2]

$$\alpha_s(r) \sim \frac{1}{\log(r\Lambda)^{-1}} \to 0$$

I praksis behandler vi $\alpha_s(r)$ som en effektiv konstant, hvis værdi er bestemt af de karakteristiske afstande, som er væsentlige for bølgefunktionen. Formen $-\alpha/r$ er den velkendte Coulombs lov for tiltrækningen mellem modsat ladede partikler under udveksling af en foton. I QCD giver enkeltgluonudveksling os en ekstra colourmatrix faktor

$$\frac{\lambda^a_{ij}}{2}\,\frac{\lambda^a_{lm}}{2}$$

Kontraheres med coloursinglet bølgefunktionerne i begyndelses- og sluttilstanden

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{jl} \quad \text{og} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{im}$$

og summeres over alle gluoner $a = 1,\ldots,8$, fås (jfr. (6.59))

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\sum_a Tr(\lambda^a\lambda^a) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

som er den ekstra faktor $\frac{4}{3}$ i (7.26).

For store afstande venter vi, at potentialet skal være approksimativt lineært pga forekomsten af retlinjede Regge–trajektorier.

Energien af et to-kvarksystem med impulser $\vec{p}$ og $-\vec{p}$ i potentialet (7.26) er

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

[2] I (6.80) angav vi α_s som funktion af en typisk impulsoverførsel Q. Iflg. usikkerhedsrelationerne svarer dette til en typisk afstand $r \sim Q^{-1}$.

hvor $m = \frac{1}{2}m_q$ er den reducerede masse. Hvis kvarkerne i det væsentlige er lokaliseret inden for afstanden R, er impulsen af størrelsesorden R^{-1}, og den laveste tilstand er så den, hvor hvilken

$$0 \simeq \frac{d}{dR}\left[\frac{1}{R^2 \cdot 2m} + V(r)\right] \simeq -\frac{1}{R^3 m} + V'(R) > -\frac{1}{R^3 m} + \frac{1}{A^2}$$

eller

$$R \approx \left(\frac{A^2}{m}\right)^{1/3} \tag{7.27}$$

Vi ser, at jo tungere kvarkoniumtilstanden er, jo mindre en del af potentialet er relevant for bølgefunktionen. I modellen (7.26) synes det, som sidste led er det dominerende for charmonium, mens første led er lige så vigtigt for Υ.

Lad os først danne os et skøn over energiniveauerne, når første led i (7.26) negligeres, og lad os straks generalisere behandlingen til et vilkårligt potenspotential, se fig.(7.15),

$$V_p(r) = \frac{1}{A^2}\,\frac{R}{p}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^p - 1\right] \tag{7.28}$$

hvor R er en karakteristisk afstand for separationen i charmonium. Vi bemærker så, at i denne afstand har potentialet (7.28)

$$V_p'(r) = \frac{1}{A^2} \quad \text{for} \quad r = R \quad \text{uafhængigt af } p$$

Endvidere har vi valgt nulpunktsenergien, så $V_p(R) = 0$ for alle p. Skønt vi særligt ønsker at studere spektret for $p = 1$, er det interessant at se på spektrets afhængighed af p. Schrödinger-ligningen kan nemlig ikke løses eksakt for $p = 1$, men for $p = -1$ kender vi resultatet: Spektret er det sædvanlige Balmer-spektrum, der gælder i et Coulomb-potential. For $p = +2$ kender vi også resultatet: Spektret er her niveauerne i en harmonisk oscillator. Vi kan herefter vurdere spektret for $p = +1$ ved at interpolere mellem disse to yderligheder. Hertil bemærkes, at $V_p(r)$ er analytisk i p. Specielt har vi for $p \to 0$

$$X^p \simeq X^0 + p \times \frac{d}{dp}\left(X^p\right)\bigg|_{p=0} = 1 + p \log X$$

altså

$$V_p(r) \to \frac{R}{A^2}\log\frac{r}{R} \quad \text{for} \quad p \to 0$$

I fig.(7.16) viser vi spektret for $p = -1, +1$ og 2. For $l = 0$ tilstandene har vi (på nær nulpunktsenergi)

$$\begin{aligned} E_n &\propto -\frac{1}{n^2} \qquad \text{for} \qquad p = -1 \\ E_n &\propto +n \qquad \text{for} \qquad p = +2 \end{aligned} \tag{7.29}$$

I fig.(7.16) har vi normeret og valgt nulpunktsenergien, så de to laveste S-tilstande har en energiforskel $= M(\psi(3685)) - M\,(J/\psi(3097))$. I Coulomb-potentialet er som bekendt $l > 0$-tilstandene udartede med S-tilstandene (bortset fra, at de laveste mangler). I det harmoniske oscillatorpotential gælder det samme for l lige, medens de ulige l-tilstande ligger midtvejs mellem S-tilstandene.

Lad os specielt betragte den laveste P-tilstand (χ) og den laveste D-tilstand ($\psi(3770)$). Vi sætter $\Delta m = M(\psi(3685)) - M(J/\psi(3097)) = 588 MeV$. For $p = -1$ finder vi så først for S-tilstandene

$$M_n = M_{J/\psi} + \Delta m \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{2^2}}$$

hvoraf

$$\begin{aligned} M_\chi(p = -1) &= M_{J/\psi} + \Delta m = M_{\psi(3685)} &= 3685\ MeV \\ M_{\psi(3770)}(p = -1) &= M_{J/\psi} + \Delta m \frac{1 - \frac{1}{3^2}}{1 - \frac{1}{2^2}} &= 3793\ MeV \end{aligned} \tag{7.30}$$

For $p = +2$ finder vi tilsvarende

$$\begin{aligned} M_\chi(p = +2) &= \frac{1}{2}(M_{J/\psi} + M_{\psi(3685)}) = 3391 MeV \\ M_{\psi(3770)}(p = +2) &= M_{\psi(3685)} = 3685 MeV \end{aligned} \tag{7.31}$$

Disse værdier er så tæt på hinanden, at vi kan bruge lineær interpolation i p for at få værdierne her:

$$M_\chi(p = 1) = 3490 MeV \quad , \quad M_{\psi(3770)}(p = 1) = 3726 MeV \tag{7.32}$$

Som vi snart skal se, vil vi interessere os særligt for triplettilstandene ${}^3P_0, {}^3P_1$ og ${}^3P_2$, der benævnes χ_0, χ_1 og χ_2, samt for ${}^3D_1$, der kaldes $\psi(3770)$. De eksperimentelle masser er her $\chi_0(3415)$, $\chi_1(3510)$, $\chi_2(3556)$ samt $\psi(3770)$ i ret smuk overensstemmelse med (7.32) (se også fig.(7.17)).

Vi kan også få en idé om værdien af hældningen $1/A^2$. Fra det sædvanlige udtryk for et Coulomb-potential og for et harmonisk oscillatorpotential finder vi for afstanden Δm mellem de to første S-tilstande

$$\Delta m(p = +2) = \frac{1}{A\sqrt{Rm}} \quad \text{og} \quad \Delta m(p = -1) = \frac{3}{8}\, m \left(\frac{R}{A}\right)^4 \tag{7.33}$$

Sætter vi her $R = (A^2/m)^{1/3}$ (jfr.(7.27)), får vi henholdsvis

$$\Delta m(p = 2) = \frac{1}{A(Am)^{1/3}} \quad \text{og} \quad \Delta m(p = -1) = \frac{3}{8}\frac{1}{A(Am)^{1/3}}$$

Interpolerer vi igen mellem disse værdier for $p = 1$, fås

$$\Delta m(p = 1) \simeq \frac{19}{24}\, A^{-1}(Am)^{-1/3} \tag{7.34}$$

og med $\Delta m = 0.588 GeV$, $m = \frac{1}{2}m_c \simeq \frac{1}{4}\, m_{J/\psi} \simeq 0.774 GeV$

$$A \simeq 1.3\ GeV^{-1} \tag{7.35}$$

Mere nøjagtige regninger baseret på numerisk løsning af Schrödinger-ligningen giver lidt større værdier.

Vi er nu i stand til at vurdere størrelsen af bølgefunktionen i 0 : $\psi(0)$.

Lad os først give et løst overslag baseret på usikkerhedsrelationerne. Vi forventer den karakteristiske afstand

$$R \simeq (A^2/m)^{1/3}$$

mellem kvarkerne (jfr. (7.27)). Antager vi $|\psi(\vec{x})|^2$ nogenlunde konstant i en kugle med denne radius, men 0 udenfor, og normerer vi integralet over $|\psi|^2$ til 1, får vi

$$|\psi(0)|^2 \simeq \frac{1}{4/3\ \pi R^3} = \frac{3}{4\pi}\frac{m}{A^2} \tag{7.36}$$

Faktisk kan vi finde $|\psi(0)|^2$ eksakt for det lineære potential. Der gælder nemlig helt generelt for en S–tilstand

$$|\psi(0)|^2 = \frac{m}{2\pi}\langle\frac{dV}{dr}\rangle = \frac{1}{2\pi}\frac{m}{A^2} \tag{7.37}$$

hvor $\langle\frac{dV}{dr}\rangle$ er den kvantemekaniske middelværdi af V' i tilstanden, men for det lineære potential fås så trivielt det sidste lighedstegn (7.37). Bemærk den kvalitative overensstemmelse med (7.36).

Første lighedstegn i (7.37) bevises ret let således: Vi indfører på sædvanlig måde den radiale bølgefunktion

$$\chi(r) = \sqrt{4\pi}\ r\psi(r)$$

således at $|\chi(r)|^2dr = 4\pi r^2 dr|\psi(\vec{r})|^2$ = sandsynligheden for, at afstanden ligger mellem r og $r + dr$. Der gælder så

$$\chi(0) = 0, \quad \chi'(0) = \sqrt{4\pi}\ \psi(0) \tag{7.38}$$

og Schrödinger–ligningen for en stationær tilstand med energi E og angulært moment $l = 0(\hbar = 1)$ lyder

$$-\frac{1}{2m}\chi''(r) + V(r)\chi(r) = E\chi(r) \tag{7.39}$$

Vi multiplicerer med $\chi'(r)$ og integrerer over r fra 0 til ∞:

$$\int_0^\infty dr\left[-\frac{1}{2m}\chi''(r)\chi'(r) + V(r)\chi(r)\chi'(r)\right] = E\int_0^\infty dr\chi(r)\chi'(r) \tag{7.40}$$

Integreres partielt og bruges $\chi(0) = \chi(\infty) = 0 = \chi'(\infty)$ fås

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}\chi'(0)\chi'(0) \quad + \quad &\int_0^\infty dr\left[+\frac{1}{2m}\chi'(r)\chi''(r) - V(r)\chi'(r)\chi(r) - V'(r)\chi(r)\chi(r)\right]\\ &= -E\int_0^\infty dr\chi'(r)\chi(r)\end{aligned} \tag{7.41}$$

Adderes dette til (7.40) fås ($\chi(r)$ er reel)

$$\frac{1}{2m}(\chi'(0))^2 = \int_0^\infty dr\chi(r)V'(r)\chi(r) = \langle V'(r)\rangle$$

som iflg. (7.38) er det påståede (7.37).

Lad os nu bruge (7.37) i (7.25) og få en absolut forudsigelse for Γ_e og Γ_μ såfremt A er kendt fra den foregåede analyse. Vi sætter $m = 1/4M$ og får så

$$\Gamma_l(\text{lin.pot.}) = 2\alpha^2 Q^2 \frac{1}{MA^2} \tag{7.42}$$

Vi kan også vælge, at bruge resultatet til endnu en bestemmelse af A ud fra data for Γ_l. Med $\alpha = 1/137$, $Q = 2/3$, $M = 3.1\ GeV$ og $\Gamma_l = 4.7\ keV$ giver dette for J/ψ

$$A = 1.8\ GeV^{-1} \tag{7.43}$$

i god overensstemmelse med den tidligere nævnte overslag. Mere omhyggelige løsninger af Schrödingerligningen giver noget bedre resultater, men det skal nævnes, at der forekommer ret betydelige gluon-korrektioner, som vi her ser bort fra.

Forfølger vi succesen og bruger (7.25) til at sammenligne Γ_l for J/ψ (3097) og $\psi(3685)$, får vi, idet $|\psi(0)|^2$ er uændret iflg. (7.37), for et lineært potential

$$\frac{\Gamma_l(J/\psi)}{\Gamma_l(\psi(3685))} = \left(\frac{M_{\psi(3685)}}{M_{J/\psi}}\right)^2 = 1.4$$

mens den eksperimentelle værdi er 2.2 ± 0.2. Og dette forhold er ret uafhængigt af gluon-korrektioner. Forklaringen på afvigelsen må søges i Coulomb–delen af potentialet, som vi hidtil har negligeret. Det er også forståeligt, at denne Coulomb–del vil "suge" den laveste S-tilstand lidt længere ind mod $r = 0$ (og altså forøge $|\psi(0)|^2$), end tilfældet er med den næste S-tilstand ($\psi(3685)$). Iflg. (7.37) vil $\langle V'\rangle$ være størst for den laveste S-tilstand.

Vi ser også af (7.42), at det lineære potential *ikke* forklarer den omstændighed, at Γ_l/Q^2 er uafhængig af kvarkoniummassen (jfr. tabel 7.1). Tværtimod giver det lineære potential masseafhængigheden

$$\Gamma_l/Q^2 \propto M^{-1} \tag{7.44}$$

Vi kan hurtigt vurdere masseafhængigheden for et rent Coulomb-potential. Da $|\psi(0)|^2$ har dimension af $(\text{længde})^{-3} \sim (\text{energi})^{+3}$, har vi

$$|\psi(0)|^2_{Coulomb} \propto M^3$$

Coulomb-potentialet indeholder jo nemlig ingen dimensioneret parameter, så den eneste masse i problemet er kvarkoniummassen selv. Af (7.25) får vi så for Coulomb-potentialet

$$\Gamma_l/Q^2 \propto M^{+1} \tag{7.45}$$

Vi må så tænke os kombinationen af bidrag fra det lineære, og Coulomb-potentialet udbalancerer hinanden, så Γ_l/Q^2 er temmelig uafhængig af M, men for virkeligt høje kvarkoniumsystemer vil vi fra (7.45) vente, at Γ_l/Q^2 stiger igen. Det kunne være meget interessant at se om denne forventning ville blive bekræftet i forbindelse med en eventuel opdagelse af top-kvarken med en masse på mere end 120 GeV sådan som det nu forventes. Men med en så stor masse vil top-kvarken faktisk at henfalde "længe før", den når at danne hadroner.

Lad os sluttelig sammenligne masseforskellen mellem niveauerne i forskellige kvarkoniumsystemer. Specielt vil vi interessere os for forholdet mellem massedifferencerne mellem $1S$ og $2S$ tilstandene:

$$M(\psi(3685)) - M(J/\psi) = .588\ GeV \quad \text{og} \quad M(\Upsilon(10023)) - M(\Upsilon(9460)) = 0.563\ GeV$$

Lad os skrive Schrödinger-ligningen (7.39) for et potenspotential $V(r) = ar^p +$ nulpunktsenergi på formen

$$-\frac{1}{2m}\chi''_m(r) + ar^p\chi_m(r) = E_m\chi_m(r)$$

hvor index m refererer til, at løsningen afhænger af massen.

Vi ønsker nu at vise, at når vi fastholder potentialet i overensstemmelse med QCD-forventningerne, men varierer m kontinuert, vil løsningen χ_m og egenværdien E_m have en simpel m-afhængighed. Mere præcist: Vi ønsker at vise, at for alle m er $\chi_m(r)$ på formen (på nær normering! Jfr. opgaverne)

$$\chi_m(r) = \tilde{\chi}(x)$$

hvor $\tilde{\chi}$ *ikke* afhænger eksplicit af m, men hvor $x = \alpha_m \cdot r$ og α_m har en m-afhængighed. vi vil bestemme. Idet vi skriver

$$\tilde{\chi}'(x) \equiv \frac{d}{dx}\tilde{\chi}(x) \quad \text{og} \quad \chi'_m(r) \equiv \frac{d}{dr}\chi_m(r) = \alpha_m \tilde{\chi}'(x)$$

har vi

$$-\frac{\alpha_m^2}{2m}\tilde{\chi}''(x) + a\alpha_m^{-p}x^p\tilde{\chi}(x) = E_m\tilde{\chi}(x)$$

eller

$$-\tilde{\chi}''(x) + 2ma\alpha_m^{-p-2}x^p\tilde{\chi}(x) = E_m \cdot 2m\alpha_m^{-2}\tilde{\chi}(x)$$

Da denne differentialligning for $\tilde{\chi}(x)$ involverer en funktion, som ikke afhænger eksplicit af m, må koefficienterne også være uafhængige af m. Altså

$$2ma\alpha_m^{-p-2} \quad \text{uafhængig af} \quad m \Rightarrow \alpha_m \propto m^{\frac{1}{p+2}} \quad \text{og}$$

$$E_m \cdot 2m \cdot \alpha_m^{-2} \quad \text{uafhængig af} \quad m \Rightarrow E_m \propto m^{-1}\alpha_m^2 \propto m^{\frac{2}{p+2}-1} = m^{\frac{-p}{p+2}} \tag{7.46}$$

For det lineære potential har vi $p = 1$ og $-p/p+2 = -1/3$. Altså forudsiger det, at

$$\frac{M(\Upsilon(10023)) - M(\Upsilon(9460))}{M(\psi(3685)) - M(J/\psi)} = \left(\frac{M(J/\psi)}{M_\Upsilon(9460)}\right)^{1/3} \simeq 0.69$$

men eksperimentelt er dette forhold $= 0.563/0.588 \simeq 0.96$.

For et rent Coulomb-potential har vi $-p/p+2 = +1$, og forudsigelsen for ovennævnte forhold bliver

$$3.1$$

Vi ser igen, at den eksperimentelle værdi ligger mellem forudsigelserne for $p = 1$ og $p = -1$. Det er klart, at for et logaritmisk potential ($p = 0$, jfr. diskussionen efter (7.28)) bliver forholdet 1 i nær overensstemmelse med data. Dette betyder formentlig blot, at det "rigtige" potential *ligner* et logaritmisk i det område af r-intervallet, hvor de relevante bølgefunktioner er væsentligt forskelige fra 0.

7.8 Spinkomplikationer. *C* og *P*

Hidtil har vi set bort fra kvarkernes spin. Lad os starte med at repetere kvantetallene i kvarkonium (jfr. diskussionen i kap. 4.3).

Idet $S = 0$ eller 1 betegner det totale kvarkspin, L = baneangulært moment og J = totale impulsmoment, betegner vi en generel kvarkoniumtilstand ved symboler af formen

$$^{2S+1}L_J \quad \text{eller} \quad J^{PC}$$

Dog skriver vi ofte $S, P, D, F, \ldots$ i stedet for $L = 0, 1, 2, 3, \ldots$. De allerede nævnte tilstande er så

$$
\begin{array}{llcl}
J/\psi & : {}^3S_1 & \text{med} & J^{PC} = 1^{--} \\
\psi(3685) & : {}^3S_1 & " & J^{PC} = 1^{--} \\
\psi(3770) & : {}^3D_1 & " & J^{PC} = 1^{--} \\
\chi_0 & : {}^3P_0 & " & J^{PC} = 0^{++} \\
\chi_1 & : {}^3P_1 & " & J^{PC} = 1^{++} \\
\chi_2 & : {}^3P_2 & " & J^{PC} = 2^{++}
\end{array}
\tag{7.47}
$$

Generelt har vi

$$P = -(-)^L \quad , \quad C = (-)^{L+S} \tag{7.48}$$

De eneste resonanser, der direkte kan produceres i e^+e^--stød, er dem med $J^{PC} = 1^{--}$. Dette kræver altså L lige og S ulige. Da $S = 0$ eller 1 og $J = |L \pm S|$, må vi også have $L \leq 2$ for at få $J = 1$. Altså kan vi kun studere tilstande af formen

$${}^3S_1 \quad , \quad {}^3D_1$$

direkte, men selvfølgelig kan vi have mange forskellige radielle excitationer.

Nedenstående tabel angiver J^{PC} for de laveste tilstande:

Table 7.2

${}^1S_0$	${}^1P_1$	${}^1D_2$	${}^3S_1$	${}^3P_0$	${}^3P_1$	${}^3P_2$	${}^3D_1$	${}^3D_2$	${}^3D_3$
0^{-+}	1^{+-}	2^{-+}	1^{--}	0^{++}	1^{++}	2^{++}	1^{--}	2^{--}	3^{--}

Tilstande med $J^{PC} \neq 1^{--}$ kan undertiden nås ved først at producere en kvarkonium-tilstand med 1^{--} og derefter studere γ-overgange. Eksempler herpå er

$$
\begin{array}{lcl}
\psi(3685) & \to & \chi_0, \chi_1, \chi_2 + \gamma \\
\psi(3685) & \to & \eta_c + \gamma
\end{array}
\tag{7.49}
$$

hvor η_c er den laveste $(0^{-+}, {}^1S_0)$ tilstand.

I (5.15) så vi, at

$$\vec{E} \xrightarrow{P} -\vec{E} \quad , \quad \vec{B} \xrightarrow{P} +\vec{B} \quad , \quad \vec{E} \xrightarrow{C} -\vec{E} \quad , \quad \vec{B} \xrightarrow{C} -\vec{B}$$

Vi ser, at $\psi(3685) \to \chi + \gamma$ kan foregå som en elektrisk dipolovergang, medens $\psi(3685) \to \eta_c + \gamma$ kræver en magnetisk dipolovergang.

Den omstændighed, at så mange af disse tilstande er etablerede (jfr. (7.17)), må i sig selv betragtes som et helt slående udtryk for, at vi har at gøre med et bundet system af en fermion og en antifermion. At den simple potentialmodel endda fungerer og giver en første kvantitativ approksimation er både opmuntrende og overraskende.

Massesplittet mellem triplet P-tilstandene kan nogenlunde forstås som en spin-bane-koblingseffekt.

I lighed med vores behandling af hyperfinstrukturen i QCD (kap. 6.7) venter vi, at singlettilstanden ${}^1S_0(\eta_c)$ skal ligge lidt lavere end triplettilstanden ${}^3S_1(J/\psi)$. Denne allerlaveste charmoniumtilstand blev først opdaget ved ca. 2.8 GeV med en uforståeligt stor overgang fra $J/\psi \to \eta_c + \gamma$. Senere eksperimenter tilbageviste disse resultater, men nu er tilstanden definitivt påvist med en fornuftig hyppighed i processerne

$$\psi(3685) \to \eta_c + \gamma \quad \text{og} \quad J/\psi \to \eta_c + \gamma$$

med en masse på

$$m(\eta_c) = 2981.6 \ \pm 1.6 \ MeV$$

Resonansen $\psi(3770)$, som er $^3D_1$, blev først overset men omsider opdaget umiddelbart over charmtærskelen på

$$2 \times M_{D^0} = 3729 \ MeV$$

Iflg. vores behandling skulle en sådan D-tilstand ikke kunne produceres, da dens kobling Γ_e til e^+e^- er proportional med $|\psi(0)|^2$, som er $= 0$ for $l > 1$. Imidlertid viser en nærmere behandling, at der kommer bidrag til Γ_e vægtet med

$$\frac{d^n}{dr^n}\chi(0) \times (p/M)^n$$

hvor p er kvarkernes impuls, og M er resonansens masse. For urelativistiske systemer er disse bidrag forsvindende for store n, men for D-bølger giver de dog et $\Gamma_e \neq 0$. Endvidere (og vigtigere) kan der foregå en vis mixning mellem

$$^3S_1 \leftrightarrow \ ^3D_1$$

der begge har $J^{PC} = 1^{--}$. Hverken $\psi(3685)$ eller $\psi(3770)$ er helt rene L-tilstande, og et lille $^3S_1$-bidrag i bølgefunktionen for $\psi(3770)$ er nok til at forklare den observerede kobling.

Til slut nævner vi, at en aldeles tilsvarende behandling er mulig for bottomonium-systemet. Figur (7.18) viser den eksperimentelle situation. Igen er det stort set kun triplettilstandene, der har kunnet studeres. Vi ser det interessante nye forhold, at der nu er hele tre S-tilstande, der ligger under tærskelen for at kunne henfalde OZI-tilladt til $B\bar{B}$ mesoner. Tilsvarende har vi så denne gang to sæt af triplet P-tilstande, at studere. Bottomonium-systemet kan fittes med samme QCD-lignende potential som charmonium-systemet i overensstemmelse med QCD's forventninger. Den tungere værdi af bottom-kvarkens masse bevirker, at bølgefunktionerne er følsomme over for detaljer i potentialet tættere på $r = 0$, men det kan endnu ikke påstås, at den Coulomb-agtige facon for små r-værdier, er bekræftet. Hvis top-kvarken derimod bliver fundet om nogle år med en masse på mere end 100 GeV, sådan som det nu forventes, så vil et studium af topponium-systemet kunne af- eller bekræfte denne vigtige QCD-forudsigelse.

7.9 Løst og fast om Charmonium-henfald.

Fig.(7.17) viser de laveste charmonium-tilstande med forskellige henfaldsmåder indtegnet.

Vi skal her gøre nogle få kvalitative bemærkninger herom. Hovedindtrykket bliver, at OZI-reglen fungerer forbløffende godt. Det er kun takket være den, at de "normale" hadronhenfald er tilstrækkeligt undertrykt til, at vi kan studere de forholdsvis "eksotiske" henfald, der er indtegnet.

Lad os begynde med de mest OZI-forbudte henfald. Som antydet i fig. (7.19) (b) foregår de med en tre-gluon-mellemtilstand.

Grunden til, at der må være mindst 3 gluoner, er en kombination af colourbevarelse og ladningskonjugeringsinvarians. Iflg. colourbevarelse kan vi ikke nøjes med én gluon, da denne er en $SU(3)_C$ oktet, medens J/ψ er en singlet. Endvidere må gluonerne have $C = -1$. Faktisk kan man let vise, at gluonmatrixfeltet under charge-conjugation transformerer som (Øvelse!)

$$\mathcal{A}^\mu \xrightarrow{C} -(\mathcal{A}^\mu)^T$$

Da J/ψ og $\psi(3685)$ har $J^{PC} = 1^{--}$, må vi derfor bruge et ulige antal gluoner, altså mindst tre. For en n-gluon mellemtilstand indeholder overgangssandsynligheden en faktor

$$|\alpha_s(M^2)|^n$$

hvor $\alpha_s(M^2)$ er "the running coupling constant" evalueret for en karakteristisk skala af størrelsesordenen M^2, hvor M = charmoniummassen. Er $\alpha_s(M^2)$ lille (asymptotisk frihed), har vi hermed en begyndende forståelse af OZI-reglen.

$\psi(3770)$ har et OZI-tilladt henfald til $D\overline{D}$. Det er bemærkelsesværdigt, at skønt $\psi(3770)$ ligger lige over $D\overline{D}$-tærsklen, går alle observerede henfald til $D\overline{D}$, idet de OZI-forbudte henfald i den grad er undertrykt, at de - skønt de har langt mere faserum - ikke er observeret. $\psi(3770)$ er en effektiv "fabrik" til produktion af D-mesoner, som herved kan studeres.

De med γ^* angivne henfald på fig.(7.17) refererer til henfald som i fig.(7.19) (a) og (c), hvor henfaldet sker via en virtuel foton. Vi har allerede beregnet henfaldsbredden til leptoner. Henfaldsbredden via γ^* til $q\overline{q}$ med efterfølgende hadronisering må have helt samme form. Ganske som i beregningen af R må der komme diverse colour- og flavourfaktorer ind relativt til Γ_l. Ja, vi må kunne sige, at den totale bredde for henfald til hadroner via γ^* er præcist $R \times \Gamma_e = R \times \Gamma_\mu$. Disse hadronhenfald af charmonium adskiller sig fra de sædvanlige hadronhenfald (via 3 gluoner) ved, at de ikke bevarer isospin og (dermed) G-paritet. På denne måde kan vi kvantitativt redegøre for henfald af typen $J/\psi \rightarrow$ lige antal π-mesoner, som jo ellers er forbudt (jfr. diskussionen i kap. 4.7).

Fig.(7.17) viser, at de foretrukne $\psi(3685)$-henfald er (jfr. PDG-tabellerne)

$$\psi(3685) \rightarrow J/\psi + (2\pi) \quad \text{eller} \quad \psi(3685) \rightarrow J/\psi + \eta$$

Disse har ganske vist kvarkdiagrammer, der bryder OZI-reglen, men kun via koblingen til (2π)- eller η-systemet, og her er der tale om relativt små impulsoverførsler, så vi vil vente fra QCD, at OZI-reglen er mindre effektiv.

Der er allerede nævnt, at de elektriske dipolovergange

$$\psi(3685) \rightarrow \chi_{0,1,2} + \gamma$$

er vigtige for studiet af P-tilstandene. Eksperimentelt tunes beamenergien ind på $E_{beam} = \frac{1}{2} M_{\psi(3685)}$, og man opsamler begivenheder af typen

$$\psi(3685) \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 + (\mu^+\mu^-)$$

hvor der ikke er andre rimelige produktionsmåder for $\mu^+\mu^-$ end

$$J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-$$

(at dette virkelig er produktionsmåden kontrolleres naturligvis ved at danne den invariante masse af $\mu^+\mu^-$-systemet). Vha energierne af de 2 fotoner γ_1 og γ_2 kan massen af den først producerede χ-tilstand fastlægges. Det ses, at der er en tvetydighed i fastlæggelsen af χ-massen: Vi ved ikke straks, om processen er

$$\begin{array}{lcl} \psi(3685) \to \chi + \gamma_1 & \text{eller} & \psi(3685) \to \chi + \gamma_2 \\ \chi \to J/\psi + \gamma_2 & & \chi \to J/\psi + \gamma_1 \end{array} \qquad (7.50)$$

Da imidlertid den *sidst udsendte* foton vil have en Doppler-udtværet energifordeling, kan tvetydigheden elimineres med passende statistik.

7.10 $e^+e^- \to 2$ kvark-jets

Måske kommer den mest direkte bekræftelse på kvarkernes eksistens, som vi kender i dag, fra studiet af "jet–fysik".

En højenergetisk kvark (eller gluon), som produceres i en eller anden proces, vil tilsyneladende i sit forgæves forsøg på at gennemtrænge vacuum "ionisere" dette og derved frigøre et større eller mindre antal kvark-antikvarkpar, som slutter sig sammen i en "jet" af hadroner. Summen af 4-impulserne af disse hadroner (jettens 4-impuls) kan vi så bruge som et mål for kvarkens 4-impuls.

Vi kan give yderligere et par intuitive ord med på vejen: Hvad er en kvark og en gluon overhovedet? De repræsenterer feltekscitationer i situationer hvor feltet anslås som approksimativt *frit!* dvs ved så små afstande (så høje impulsværdier) at asymptotisk frihed kan bringes i anvendelse. Men efterhånden som disse næsten frie plane bølger udbreder sig, træder længere bølgelængder i funktion, og de vekselvirker kraftigere med de øvrige kvark- og gluonfelter. Denne selv-vekselvirkning forøges mere og mere ved større og større afstande og resulterer tilsidst i de uhyre komplicerede feltkonfigurationer, der svarer til dannelsen af "et sprøjtet": en jet, af hadroner. Alle disse ord kan indtil videre ikke direkte underbygges af detaljerede beregninger, da de vedrører områder af teorien hvor perturbationsteori ikke kan bruges. I en lidt fjernere fremtid kan de formodes at blive delvist retfærdiggjort af computersimuleringer baseret på gitterformuleringer af QCD. Indtil da må man i sine dataanalyser ty til mere eller mindre vellykkede model-gæt. Ydermere må vi forvente, at de producerede hadroner har 3-impulser, hvis retning er tæt på retningen af den oprindelige kvark. Vi vil nemlig vente, at i den udstrækning en eventuel 3-impuls *vinkelret* på denne retning forekommer, er dens størrelse begrænset af parameteren Λ_{QCD} til nogle få hundrede MeV (Fermi-impulsen af kvarken inden i hadronerne). I kap. 7.12 skal vi diskutere korrektioner til dette billede.

Fig.(7.20) viser en typisk 2-jet begivenhed ved $\sqrt{s} = 91.57 GeV$, målt i ALEPH-detektoren. Energien svarer til Z^0-massen, som iøvrigt i denne forbindelse ikke spiller anden rolle end at denne resonans voldsomt forøger antallet af de begivenheder, der kan studeres. Man ser rekonstruktioner af sporene for de ladede partikler.

Det er umiddelbart klart, at man uden vanskelighed kan rekonstruere en hoved*retning* af de 2 jets (se nedenfor), svarende til den retning kvark-antikvark parret må formodes at være løbet.

Med moderne detektorer er det som regel muligt også at rekonstruere de neutrale partiklers 3-impuls. De er på figuren angivet ved forskellige signaler i kaorimetre. Det viser sig da, at disse falder sammen med jet-retningen til samme grad af nøjagtighed som de ladede partiklers.

En ofte anvendt metode til at bestemme jettens retning anvender størrelsen *thrust* (andre metoder baseret på "sphericity" og "spherocity" har også været brugt). Man tænker sig samtlige 3-impulser af de udkommende hadroner afsat i et 3-dimensionalt vektorrum. Gennem begyndelsespunktet tænkes først indlagt en vilkårlig plan med normal $\hat{n}$. Så kan vi danne vektorsummerne $\vec{P}_+$ og $\vec{P}_-$ af dels alle 3–impulser, der peger til samme side af planen som normalen $\hat{n}$, ($\vec{P}_+$), dels summen af dem der peger til den anden side, ($\vec{P}_-$). Det er klart, at $\vec{P}_+ = -\vec{P}_-$, da der er impulsbevarelse i processen. Vha en computer finder vi nu den plan, for hvilken $|\vec{P}_\pm \cdot \hat{n}|$ er *maksimal.* Det er også klart, at så er $\vec{P}_\pm$ og $\hat{n}$ parallelle. Denne fælles retning af $\vec{P}_\pm$ og $\hat{n}$ kaldes "thrust-retningen", og den kan bruges som erstatning for den ukendte retning af kvarkerne: Jet-aksen.

Som et må l for, hvor "god" jetten er, indfører man *værdien* af thrust som

$$T = \frac{|\vec{P}_{+(max)} \cdot \hat{n}|}{\sum_{i\in\Omega_+} |\vec{p}_i|} \tag{7.51}$$

hvor Ω_+ er mængden af partikler, hvis 3-impulser har positiv projektion på thrust-retningen.

Det er klart, at for en "perfekt" jet, hvor alle 3-impulser peger i samme retning, er $T = 1$. For en isotrop impulsfordeling (helt u-jetagtig) er $T = \frac{1}{2}$ (**Øvelse**).

Et mere direkte mål for jettens "kvalitet" fås ved at sammenligne $\langle p_{\|}\rangle$ og $\langle p_\perp\rangle$. Her skriver vi for hver hadron dens 3-impuls som

$$\vec{p} = \vec{p}_{\|} + \vec{p}_\perp$$

hvor $\vec{p}_{\|}$ peger langs jetaksen, mens $\vec{p}_\perp$ er vinkelret derpå. Middelværdien tages dels over hadronerne i Ún begivenhed, dels over mange begivenheder. Når $\vec{p}_{\|}$ vokser fra 3 til 15 GeV, findes $\langle p_\perp\rangle$ at holde sig næsten konstant, men langsomt at vokse i intervallet

$$\langle p_\perp\rangle \sim 220 - 330 \text{ MeV} \tag{7.52}$$

Vi kan nogenlunde forstå denne værdi som følger: Værdien af kvarkernes 3-impuls i hadroner (π-mesoner, K-mesoner etc.) er af størrelsesordenen (7.52). Booster vi en hadron langs jet-aksen, bliver $p_{\|}$ selvfølgelig større, men $p_\perp$ for kvarkerne bevarer samme størrelse som i hvilesystemet (jfr. formen af en Lorentz-transformation). Nu repræsenterer (7.52) ikke direkte kvarkernes bevægelse i hadronerne, men hadronernes $p_\perp$ i forhold til den oprindelige *kvark*-retning. De to har dog tydeligvis noget med hinanden at gøre.

(7.21) viser middelantallet af *ladede* hadroner i e^+e^--kollisioner som funktion af energien. Denne størrelse formodes at være proportional med middelværdien af antallet af *alle* hadroner, multipliciteten $\langle n\rangle$. Tidligere forventninger om, at $\langle n\rangle$ skulle vokse logaritmisk med W synes i nogen grad at være gjort til skamme (jfr. afsn. 7.11 og 7.12). De ville svare til at data skulle gruppere sig om en ret linje i et diagram hvor energi-aksen er logaritmisk.

Vi har nu set, hvorledes jet-fænomenet tillader os at rekonstruere kvarkernes impuls i processen

$$e^+e^- \longrightarrow q\bar{q}$$

skønt vi ikke detekterer kvarkerne selv men kun deres hadronfragmenter. Situationen kan minde lidt om den måde, en neutral hadron detekteres på. Den ioniserer ikke en gas eller en væske, så dens spor direkte kan iagttages. Dens energi kan dog måles i et kalorimeter, hvor den vekselvirker stærkt med kernerne, og hvor kernefragmenterne er ladede og afsætter deres energi i et måleligt elektronisk signal.

Tilsvarende er for kvarker selve vacuet vores "kalorimeter" takket være kvark- og gluonfelternes vekselvirkninger, der ender med dannelsen af observerbare hadroner.

Vha. jet-fænomenet kan vi ligefrem konstruere *tværsnittet* for $e^+e^- \to q\bar{q}$. Formen af dette er den velkendte fra $e^+e^- \to l^+l^-$. Vi har allerede kontrolleret værdien af det totale tværsnit: R-forholdet stemmer ret godt med vores teori. Vi mangler at kontrollere vinkelfordelingen, som er af formen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \to q\bar{q}) \sim (1+\cos^2\theta) \tag{7.53}$$

som er karakteristisk for produktion af spin-$\frac{1}{2}$ partikler.

Målenøjagtigheden er ikke overvældende, men parametriseres vinkelfordelingen som

$$(1+\alpha\cos^2\theta)$$

findes $\alpha \sim +1$ hvorved vi kan sige, at kvarkernes spin er målt til $\frac{1}{2}$.

7.11 Hadronfragmentering

Kvarkernes omdannelse til hadroner er en kompliceret proces, vi endnu ikke forstår i megen detalje. Vi skal her nævne en meget nyttig og brugt parametrisering indført af Feynman.

Fragmenteringen tænkes at foregå efter et kvarkdiagram, som skitseret på fig.(7.22).

Vi betragter et sample af begivenheder, hvor en kvark q af bestemt flavour danner en hadronjet. Vi tænker nu på en bestemt slags hadron h (fx en π^+). Iflg. Feynmans antagelse findes der så en bestemt sandsynlighedsfordeling (egl.: tæthed af samme), kaldet kvarkens fragmenteringsfunktion

$$D_q^h(z) \quad , \quad 0 < z < 1 \tag{7.54}$$

for at finde en hadron af arten h i jetten fra kvarken q med brøkdelen z af kvarkens oprindelige energi.

Denne sandsynlighed antages uafhængig af kvarkens energi og af den proces, i hvilken kvarken blev produceret. Størrelsen z er invariant under en Lorentz-transformation i jet-aksens retning, såfremt alle energier er så store, at kvark- og hadronmasser kan negligeres.

(Øvelse).

I QCD kan det vises, at der virkelig *eksisterer* sådanne fragmenteringsfunktioner, uafhængigt af kvarkens produktionsmåde og energi. Derimod må fragmenteringsfunktionerne have en svag afhængighed af Q^2: Den totale tyngdepunktsenergi (kvadreret) i e^+e^--stød *eller* en tilsvarende stor impuls*overførsel* i andre stød. Denne *Q^2-afhængighed* kan beregnes i QCD, men data er knap nok gode nok til at sammenligne med teorien.

Den simple model, hvor D_q^h kun afhænger af z (og ikke af Q^2), benævnes ofte partonmodellen (se også kap. 9).

I denne simple model vil vi forvente visse *"scaling"-opførsler af inklusive tværsnit*. Vi betragter data vedrørende processer af formen

$$e^+e^- \to h + X$$

hvor vi om sluttilstanden blot specificerer, at den indeholder hadronen h plus hvad som helst andet (X). Det invariante faserumselement for h er (på nær konstanter):

$$\frac{d^3p_h}{E_h}$$

hvilket fører os til at studere tværsnittet

$$E_h\frac{d\sigma}{d^3p_h}$$

Vi skriver nu $d^3p_h = d\Omega_h p_h^2 dp_h$. Videre tænker vi på en e^+e^--proces med den totale energi $\sqrt{s}$. Energien af den kvark, som h er et fragment af, er så $\frac{1}{2}\sqrt{s}$, og hvis vi negligerer masser og sætter

$$E_h = z\cdot\frac{1}{2}\sqrt{s}$$

har vi så

$$E_h\frac{d\sigma}{d^3p_h} = \frac{4}{s}\frac{1}{z}\frac{d\sigma}{dz d\Omega} \tag{7.55}$$

hvor vi kan bruge $d\Omega$ = kvarkens rumvinkel i stedet for hadronens rumvinkel, hvis hadronen ligger pænt i kvarkens jet.

Vi ansætter nu[3]

$$\frac{d\sigma(e^+e^-\to h+X)}{dz d\Omega} = \sum_q \frac{d\sigma(e^+e^-\to q\bar{q})}{d\Omega}\times D_q^h(z)$$

eller, integreret over $d\Omega$,

$$\frac{d\sigma(e^+e^-\to h+X)}{dz} = \sum_q \sigma(e^+e^-\to q\bar{q})D_q^h(z)$$

Nu er $\sigma(e^+e^-\to q\bar{q})$ proportional med $1/s$. Modellen forudsiger derfor, at størrelsen

$$s\cdot\frac{d\sigma}{dz}(e^+e^-\to h+X)$$

vil "scale", dvs være uafhængig af s: Kun have en z-afhængighed, som kan bruges til bestemmelse af fragmenteringsfunktionerne - hvis der altså *er scaling.*

I fig.(7.23) er denne størrelse vist for $h=\pi^\pm, K^\pm, K^0+\overline{K}^0, p\bar{p}$ (dvs summen over de 2 er taget hver gang). I stedet for z er skrevet x. π-mesonens hastighed, $\beta=1$, i vores approksimation. Det ses, at scaling fungerer godt ved de viste energier.

Det ses, at

$$D_q^p + D_q^{\bar{p}} < D_q^{K^+} + D_q^{K^-} \sim D_q^{K^0} + D_q^{\overline{K}^0} < D_q^{\pi^+} + D_q^{\pi^-} \tag{7.56}$$

Man kan vise, at multipliciteten $\langle n\rangle$ forventes at vokse logaritmisk med energien i de simpleste fragmenteringsmodeller. For at se pointen kan vi nøjes med at tage hensyn til Ún slags hadron. Lad os kalde den gennemsnitlige værdi af z, som en hadron udsendes

[3] q–indekset løber over såvel kvarker som antikvarker.

med. for $\langle z\rangle$. Efter at have udsendt én hadron vil en kvark med energien E i middel have energien

$$E_1 = E - \langle z\rangle \cdot E = (1 - \langle z\rangle)E$$

og efter udsendelsen af 2 hadroner er dens energi i middel

$$E_2 = (1 - \langle z\rangle)E_1 = (1 - \langle z\rangle)^2 E \quad \text{osv.}$$

Hadronernes energi er hhv

$$\langle z\rangle E \quad , \quad \langle z\rangle E_1 = \langle z\rangle(1 - \langle z\rangle)E \quad \text{osv.}$$

Denne proces kan højst blive ved, så længe hadronens energi er større end dens masse. Når det gennemsnitlige antal hadroner $\langle n\rangle$ er udsendt. er kvarkens energi sammenlignelig med hadronmassen m:

$$m \sim E_{\langle n\rangle} = (1 - \langle z\rangle)^{\langle n\rangle} E$$

hvoraf

$$\langle n\rangle \sim \log(E/m)/log(1 - \langle z\rangle)^{-1} \tag{7.57}$$

der viser, at $\langle n\rangle$ vokser logaritmisk med energien.

Fig.(7.21) viser, at dette passer nogenlunde med data ved ikke for høje energier. Afvigelsen skal vi komme tilbage til i næste afsnit.

7.12 $e^+e^- \to$ kvarkjet + antikvarkjet + gluonjet

En af QCD-teoriens mest iøjnefaldende forudsigelser er eksistensen af gluoner på niveau med eksistensen af kvarker. Da gluonerne ikke har elektrisk ladning, er de mindre oplagte at producere end kvarker. I de senere år er de blevet studeret som jets, fx i protonprotonstød ved meget høje energier. hvor en kvark i den ene proton spredes mod en kvark eller gluon i den anden.

Her skal vi studere muligheden for at se gluonjets i e^+e^--stød. Til laveste orden i α_s er Feynman-diagrammerne vist i fig.(7.24).

Ved højere energier kan produktionene også finde sted via Z^0-resonansen i stedet for fotonen, men dette ændrer for så vidt ikke prinicipielt på pointen. Vi kan naturligvis ikke detektere kvarkerne og gluonerne direkte, men vi kan forestille os, at de giver anledning til 3 jets, som kan detekteres, og hvis energi kan bestemmes. Vi betragter derfor tværsnittet for $e^+e^- \to q\bar{q}g$ beregnet vha fig.(7.24) af Feynman-reglerne som en model for det tilhørende 3-jet tværsnit.

Lad kvark, antikvark og gluon have 4-impulser

$$p_q^\mu = (E_q, \vec{p}_q) \quad , \quad p_{\bar{q}}^\mu = (E_{\bar{q}}, \vec{p}_{\bar{q}}) \quad \text{og} \quad p_g^\mu = (E_g, \vec{p}_g) \tag{7.58}$$

Vi negligerer kvarkmasserne (gluonen er masseløs). Da eksperimentet udføres i e^+e^--systemets tyngdepunktsystem, er

$$\vec{p}_q + \vec{p}_{\bar{q}} + \vec{p}_g = \vec{0}$$

så de 3 jets ligger i en plan. Idet $\sqrt{s}$ er den totale energi, og $\frac{1}{2}\sqrt{s}$ den energi, q og $\bar{q}$ ville have haft, hvis der ikke var udsendt en gluon, definerer vi

$$x_q = \frac{E_q}{\frac{1}{2}\sqrt{s}} \quad , \quad x_{\bar{q}} = \frac{E_{\bar{q}}}{\frac{1}{2}\sqrt{s}} \quad \text{og} \quad x_g = \frac{E_g}{\frac{1}{2}\sqrt{s}} \tag{7.59}$$

hvor der så gælder

$$x_q + x_{\bar{q}} + x_g = 2 \tag{7.60}$$

Det er en relativt simpel øvelse at udregne tværsnittet for processen, og efter integration over alle de variable, der specificerer $q\bar{q}g$-planens *orientering* (det er den mest besværlige del af regningen), fås

$$\frac{1}{\sigma_0}\frac{d\sigma(q\bar{q}g)}{dx_q\, dx_{\bar{q}}} = \frac{2}{3}\frac{\alpha_s(s)}{\pi}\frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})} \tag{7.61}$$

hvor σ_0 er tværsnittet for $e^+e^- \to q\bar{q}$ beregnet i forrige afsnit.

De variable $x_q, x_{\bar{q}}, x_g$ kan befinde sig overalt inden for den skraverede trekant, fig.(7.25), i Dalitz-plottet. Sådan et *Dalitz-plot* er nyttigt at betragte når man som her har tre partikler i sluttilstanden. Efter integration over Euler-vinkler er konfigurationen karakteriseret ved to uafhængige parametre, men det kan være nyttigt at anvende et plot, der anvender de *tre afhængige* parametre, her $x_q, x_{\bar{q}}, x_g$, for hvilke summen er en konstant (her 2). I det *tre-dimensionale* rum med koordinater $(x_q, x_{\bar{q}}, x_g)$, er dette bånd ligningen for en plan, der stort set (pånær triviel omskaling) netop er Dalitz-plottet. Det fremgår, at der for hvert punkt i plottet gælder, at summen af de vinkelrette afstande til trekantens sider (snittet med planerne hhv $x_q = 0, x_{\bar{q}} = 0, x_g = 0$) – regnet med fortegn – er en konstant. Man refererer også til sådanne plots med betegnelsen: *homogene koordinater*.

Spørger vi nu om den totale sandsynlighed for at producere en gluonjet (ud over q- og $\bar{q}$-jetten), ser vi, at vi får et meningsløst resultat ved at integrere (7.61) over hele det kinematiske område: Polerne ved $x_q = 1$ og ved $x_{\bar{q}} = 1$ giver en logaritmisk divergens i integralet!

Dette er et karakteristisk fænomen i teorier med masseløse kvanter (som QCD og QED). Lad os forsøge at forstå, hvad der er sket.

Betragter vi fx det første Feynman-diagram i (7.24), ser vi, at det indeholder en kvarkpropagator, der vil bidrage

$$\left((p_q + p_g)^2 - m^2\right)^{-1} \to (p_q + p_g)^{-2}$$

hvor m er kvarkens masse, som vi vil negligere. Dette udtryk bliver ∞, når $(p_q + p_g)^2$ bliver 0, og dette kan ske på to måder:

(a) (infrarød singularitet) når $p_g^\mu \to (0,0,0,0)$, har vi

$$(p_q + p_g)^2 - m^2 \to p_q^2 - m^2 = 0$$

uanset kvarkens masse;

(b) (kvarkmasse singularitet) når p_g^μ har samme retning som p_q^μ, har vi

$$\begin{aligned}(p_q + p_g)^2 - m^2 &= p_q^2 + p_g^2 + 2p_q p_g - m^2 = 2p_q p_g \\ &= 2(E_q \cdot E_g - \sqrt{E_q^2 - m^2}\cdot E_g) \\ &\to 0 \text{ for } m \to 0\end{aligned} \tag{7.62}$$

I begge tilfælde er den kinematiske situation lineær: I (a) har kvarken og antikvarken modsat rettede impulser og halvdelen af energien hver: i (b) har kvarken og gluonen parallelle impulser og halvdelen af energien, mens antikvarken har modsat impuls og halvdelen af energien. Altså, i begge tilfælde har vi

$$x_{\bar{q}} - 1$$

svarende til, at denne værdi for $x_{\bar{q}}$ giver en singularitet i (7.61). Tilsvarende når $x_q - 1$.

Men vi ved også, at $q, \bar{q}$ og g højst kan blive set som *jets* af hadroner, hvis impulser spreder sig noget om de oprindelige partoners (fællesnavn for kvarker og gluoner) impuls. Med andre ord, når gluonen har næsten samme retning som kvarken, vil dens jet overlappe kvarkens, og vi vil slet ikke se 3 jets men kun 2. I så fald er vi altså i færd med at beregne en korrektion til 2-jet tværsnittet - en korrektion af orden α_s. Men der er andre sådanne korrektioner til 2-jet tværsnittet (7.26).

Første diagram fig.(7.26) er af orden α_s^0, andet af orden α_s. Deres bidrag til tværsnittet er så hhv a_s^0 og α_s^2, men desuden er der et interferensled ("det dobbelte produkt"), som er af ordenen $\alpha_s^0 \cdot \alpha_s = \alpha_s$. En nærmere undersøgelse viser, at dette vil hæve den singularitet, der er i (7.61).

Her nævner vi blot, at (7.61) kan bruges direkte til at beregne tværsnittet for at se 3 jets, hvor den mindste vinkel mellem nogen af dem er større end en vis (valgt) værdi δ. Integreres (7.61) over det tilhørende område, fås det totale 3-jet tværsnit af formen

$$\frac{\sigma(3 \text{ jet, vinkler} > \delta)}{\sigma(2 \text{ jet})} \propto \alpha_s(s) \log \delta \propto \frac{\log \delta}{\log s/\Lambda^2} \tag{7.63}$$

hvor vi har brugt formen (6.80) for "the running coupling constant". For $\delta \rightarrow 0$ får vi påny en divergens, men for fast δ og $s \rightarrow \infty$ går forholdet mod 0. Vælger vi for δ den karakteristiske åbningsvinkel for en jet, og bruger vi $\langle p_\perp \rangle$ konstant, $\langle p_\parallel \rangle \sim E$, ser vi, at denne opfører sig som

$$\delta_{\text{jet}} \sim \frac{\langle p_\perp \rangle}{\langle p_\parallel \rangle} \sim E^{-1}$$

hvoraf

$$\log \delta \sim \log E \sim \log s$$

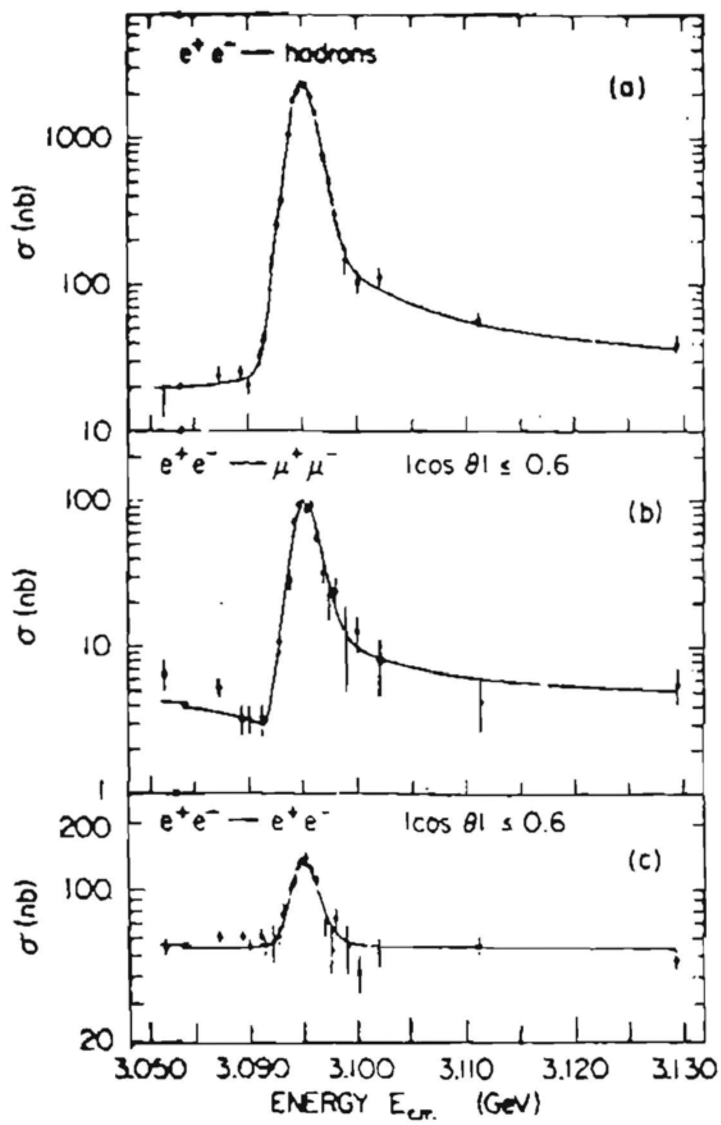
og (7.63) går mod en konstant.

Billedet bliver da følgende:

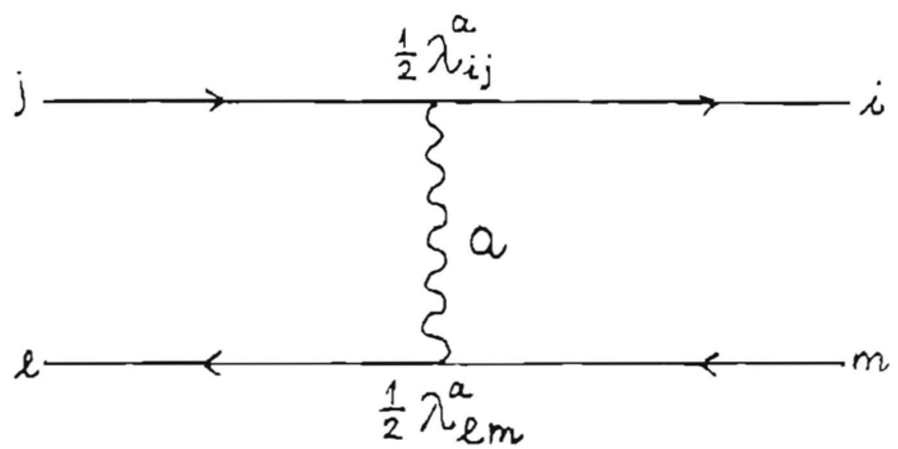
For lave energier venter vi ikke at kunne opløse gluonjets fra kvarkjets. Dette venter vi først at kunne gøre ved energier, der er så høje, at kvarkjet'erne er så veldefinerede, at der er "rigelig plads" til en gluonjet imellem dem. Ved endnu højere energier bliver såvel kvarkernes som gluonens jet tydeligere og tydeligere samtidig med, at den karakteristiske vinkelseparation mellem dem bliver mindre og mindre.

Ved disse energier, hvor separate gluonjets spiller en stigende rolle, vil vores vurdering (7.57) af hadronmultipliciteten baseret på blot én kvark og én antikvark være for lille: Gluonen bidrager en ekstra fuld jetmultiplicitet. Dette formodes at være baggrunden for, at multipliciteten i (7.21) vokser hurtigere end logaritmisk.

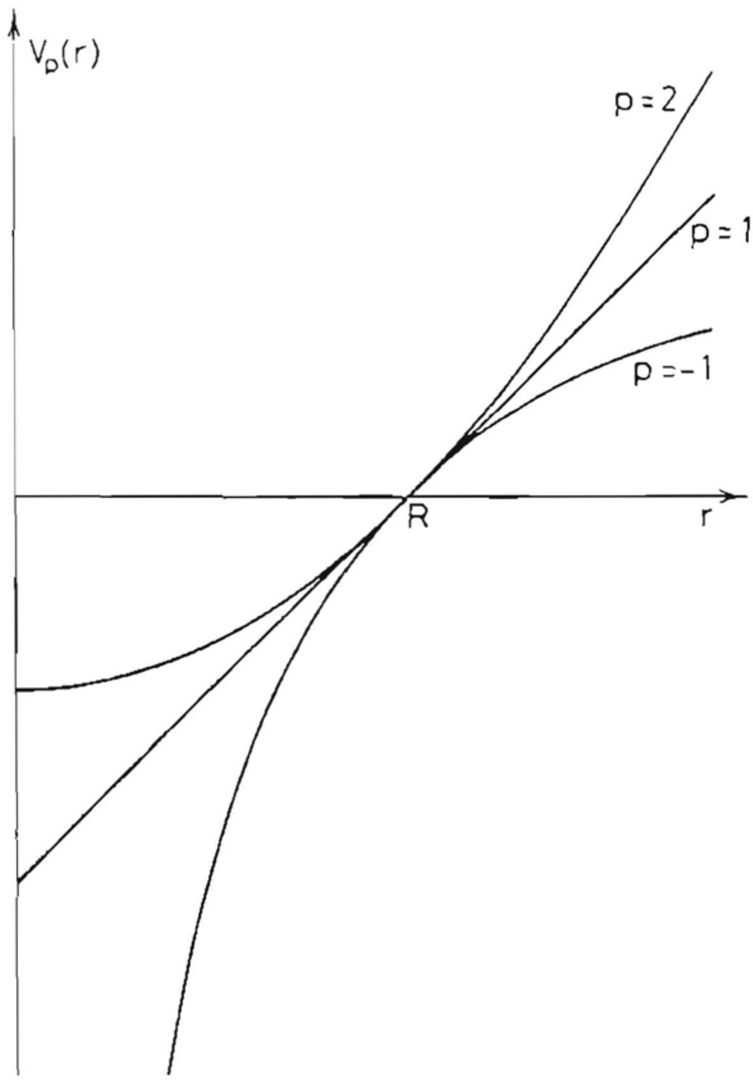
Det er klart at en nærmere analyse af gluonproduktion tillader bestemmelse af QCD koblingen, $\alpha_s(Q^2)$. I praksis er en sådan bestemmelse ganske kompliceret. Uden at gå ind på alle detaljer viser vi i fig. (7.28) resultater, der nu også tydeligt viser, at koblingskonstanten virkelig "løber" logaritmisk som forventet.



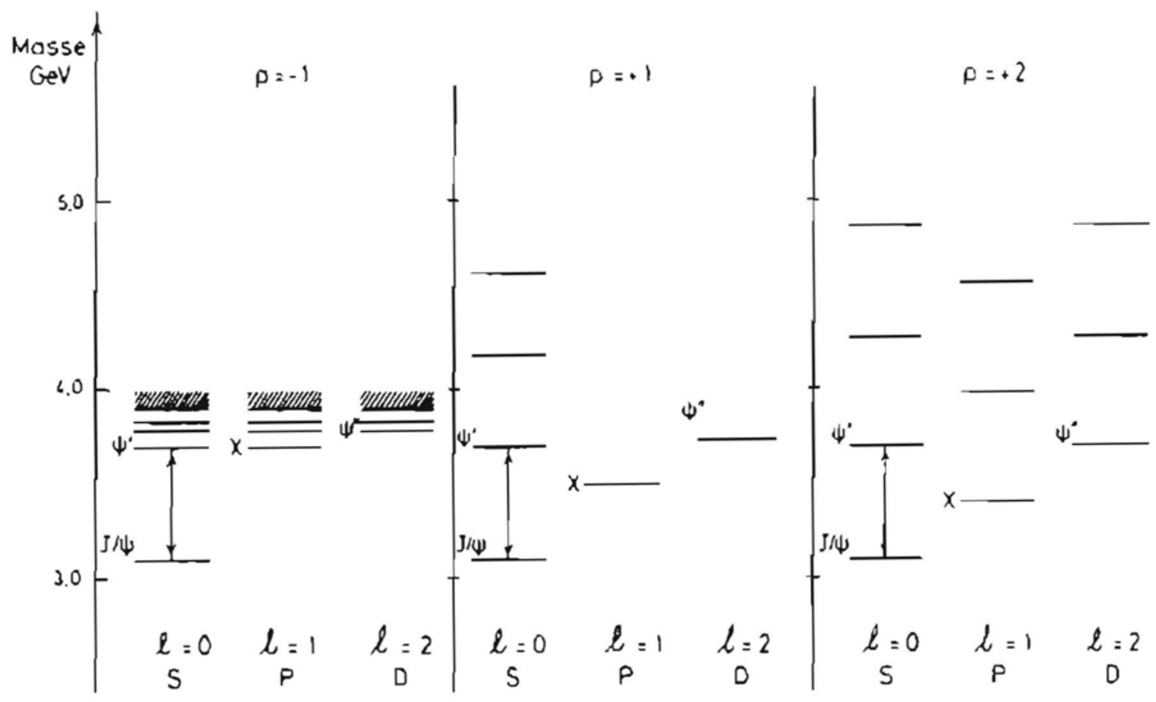
Figur 7.13: De eksperimentelle tværsnit for produktion af J/ψ i e^+e^--annihilation



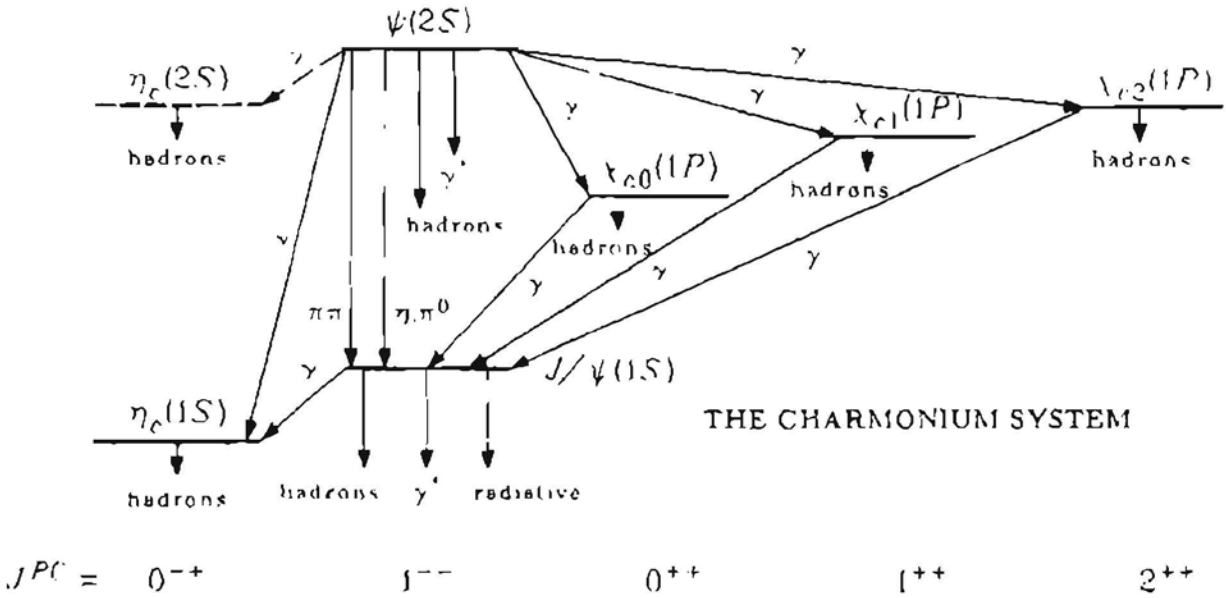
Figur 7.14: Feynmandiagram for enkel-gluonudveksling mellem kvark og anti-kvark.



Figur 7.15: Potenspotentialet.

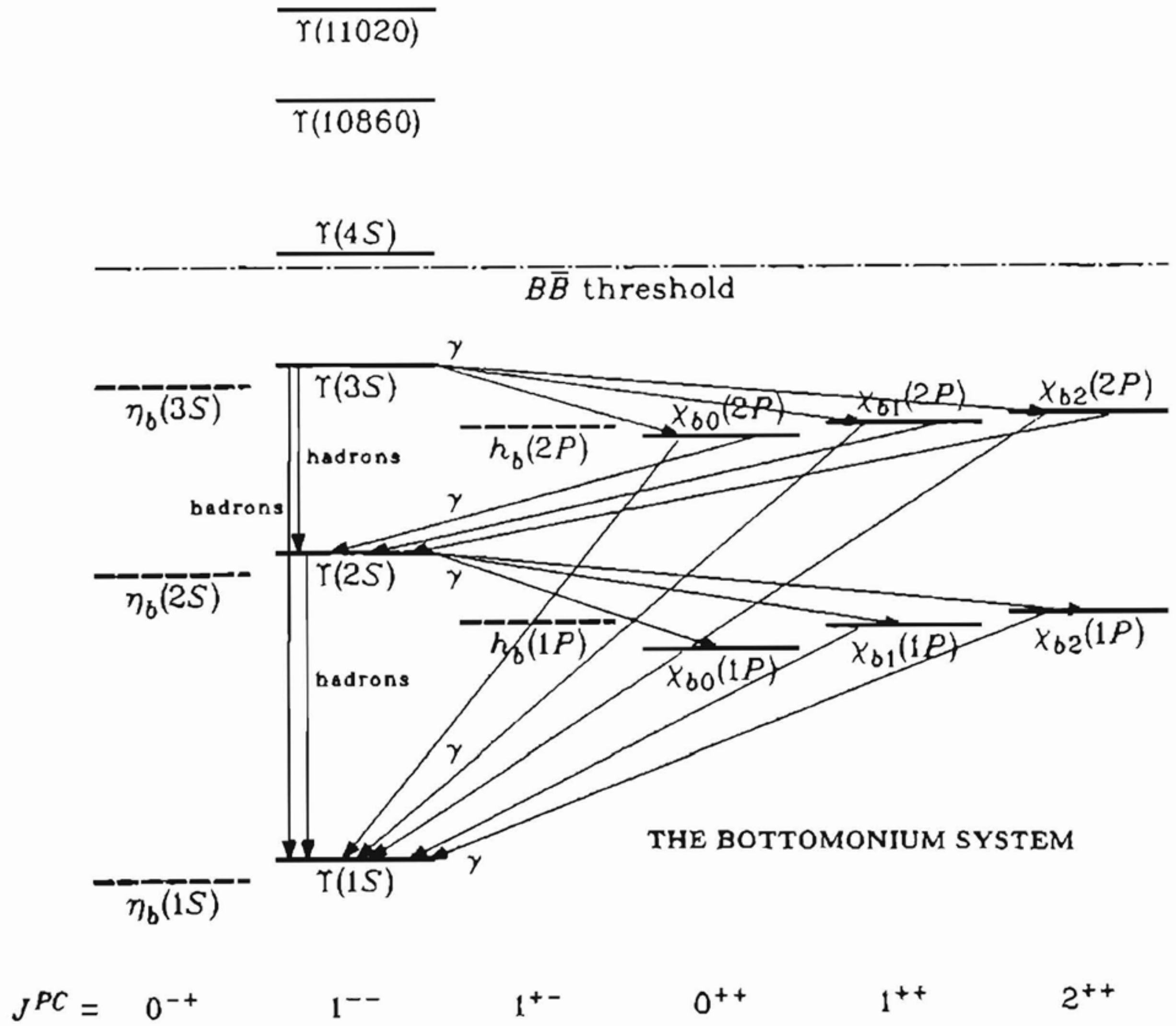


Figur 7.16: Spektret for potenspotentialet, normeret til at reproducere $m(\psi(3685))$ og $m(J/\psi)$.



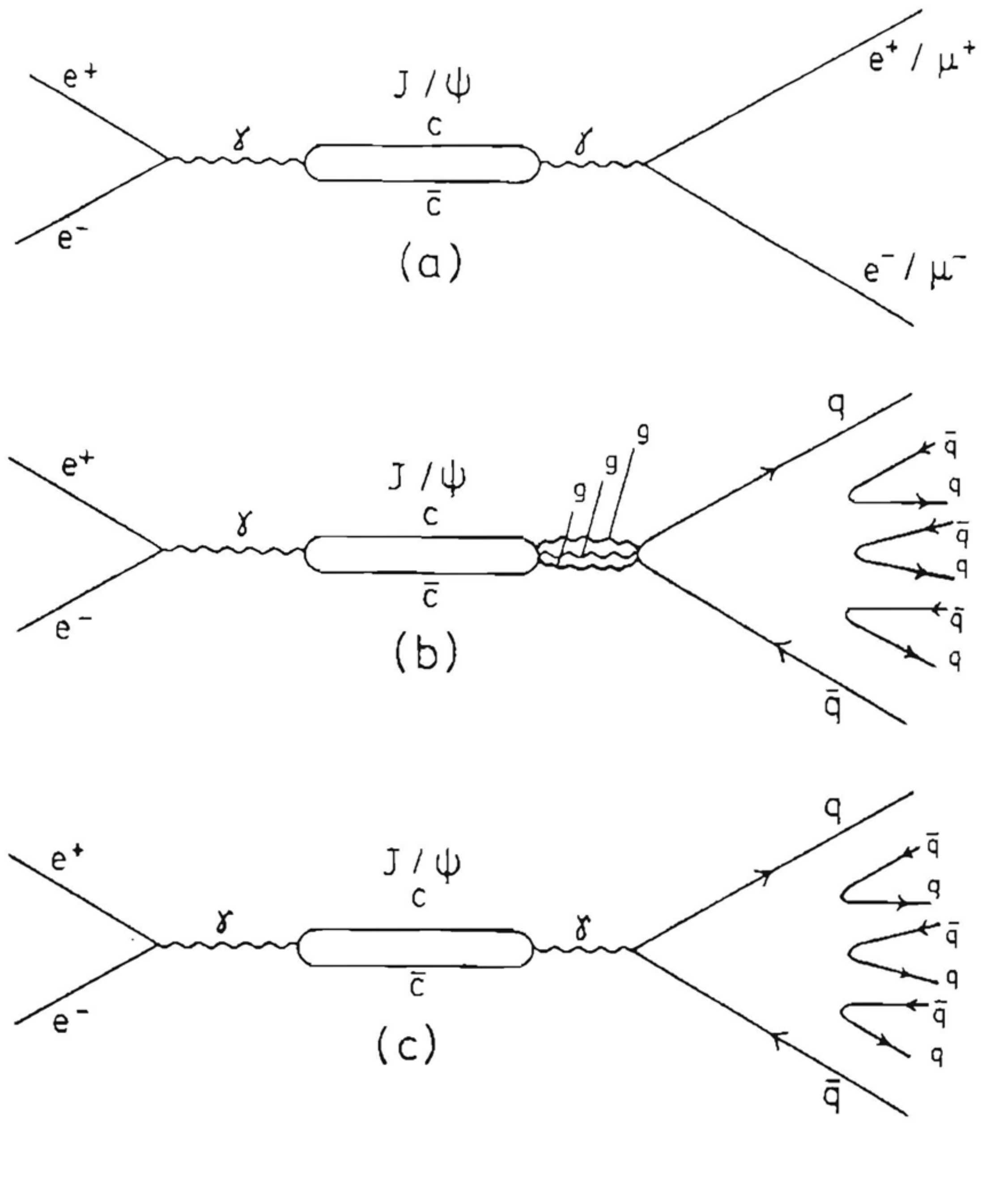
The current state of knowledge of the charmonium system and transitions, as interpreted by the charmonium model. Uncertain states and transitions are indicated by dashed lines. The notation γ^* refers to decay processes involving intermediate virtual photons, including decays to e^+e^- and $\mu^+\mu^-$.

Figur 7.17: Charmoniumspektret eksperimentelt. Bemærk, at niveauerne ikke (som i foregående teoretiske figur) er indordnet efter bane-impulsmomentet, L, men efter det totale impulsmoment, J.

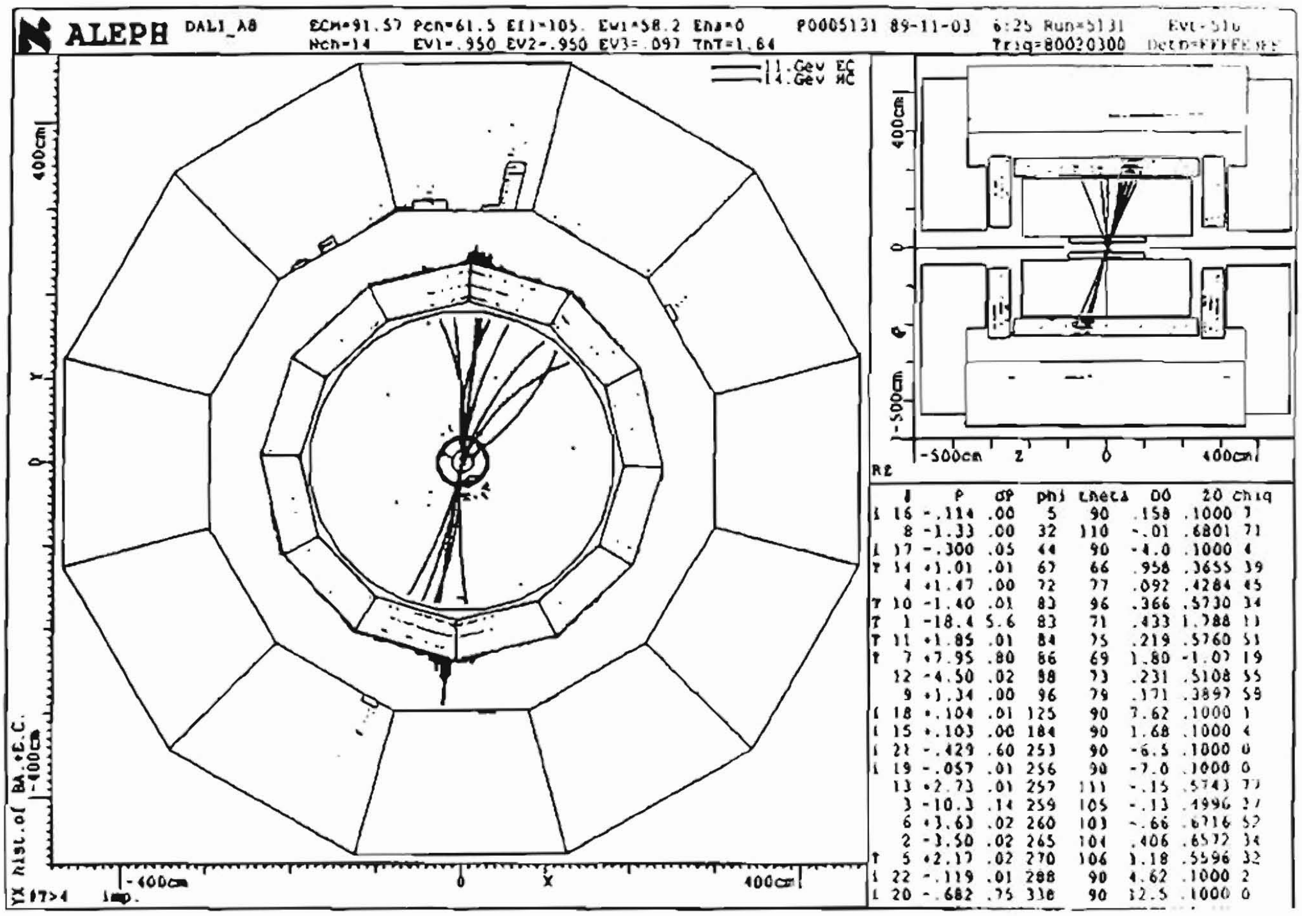


The level scheme of the $b\bar{b}$ states showing experimentally established states with solid lines. Singlet states are called η_b and h_b, triplet states Υ and χ_{bJ}. In parentheses it is sufficient to give the radial quantum number and the orbital angular momentum to specify the states with all their quantum numbers. E.g., $h_b(2P)$ means 2^1P_1 with $n = 2$, $L = 1$, $S = 0$, $J = 1$, $PC = +-$. If found, D-wave states would be called $\eta_b(nD)$ and $\Upsilon_J(nD)$, with $J = 1,2,3$ and $n = 1,2,3,4,\cdots$. For the χ_b states, the spins of only the $\chi_{b2}(1P)$ and $\chi_{b1}(1P)$ have been experimentally established. The spins of the other χ_b are given as the preferred values, based on the quarkonium models. The figure also shows the observed hadronic and radiative transitions.

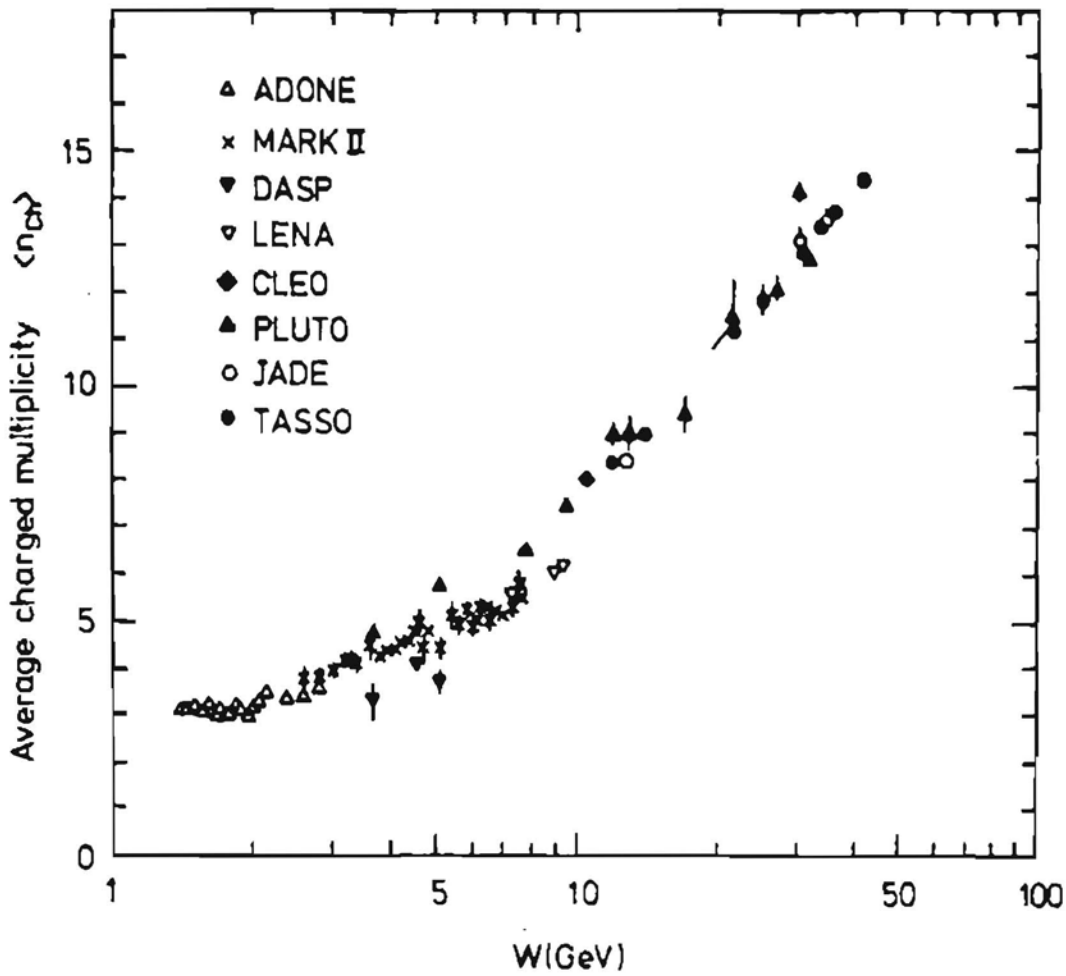
Figur 7.18: Eksperimentelt etablerede niveauer for bottomonium-systemet (fuldt optrukne streger).



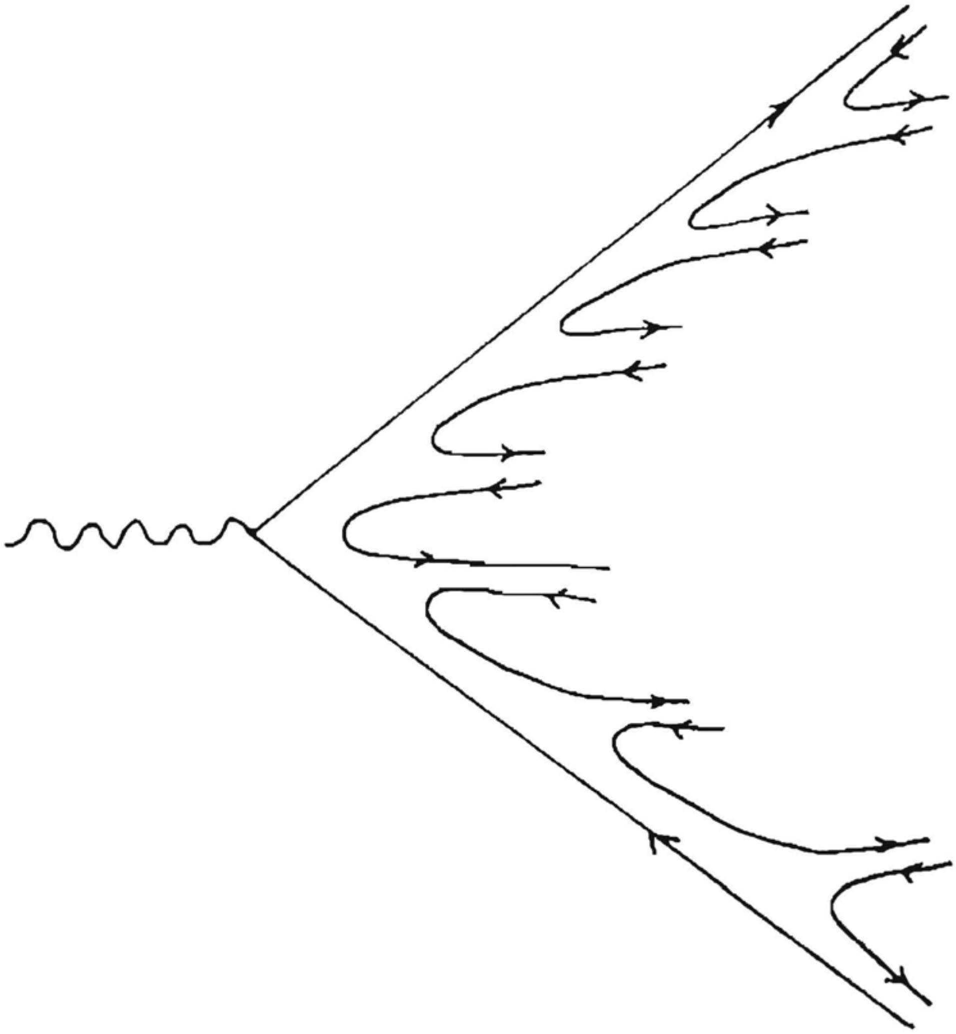
Figur 7.19: Kvarkdiagrammer for J/ψ-henfald



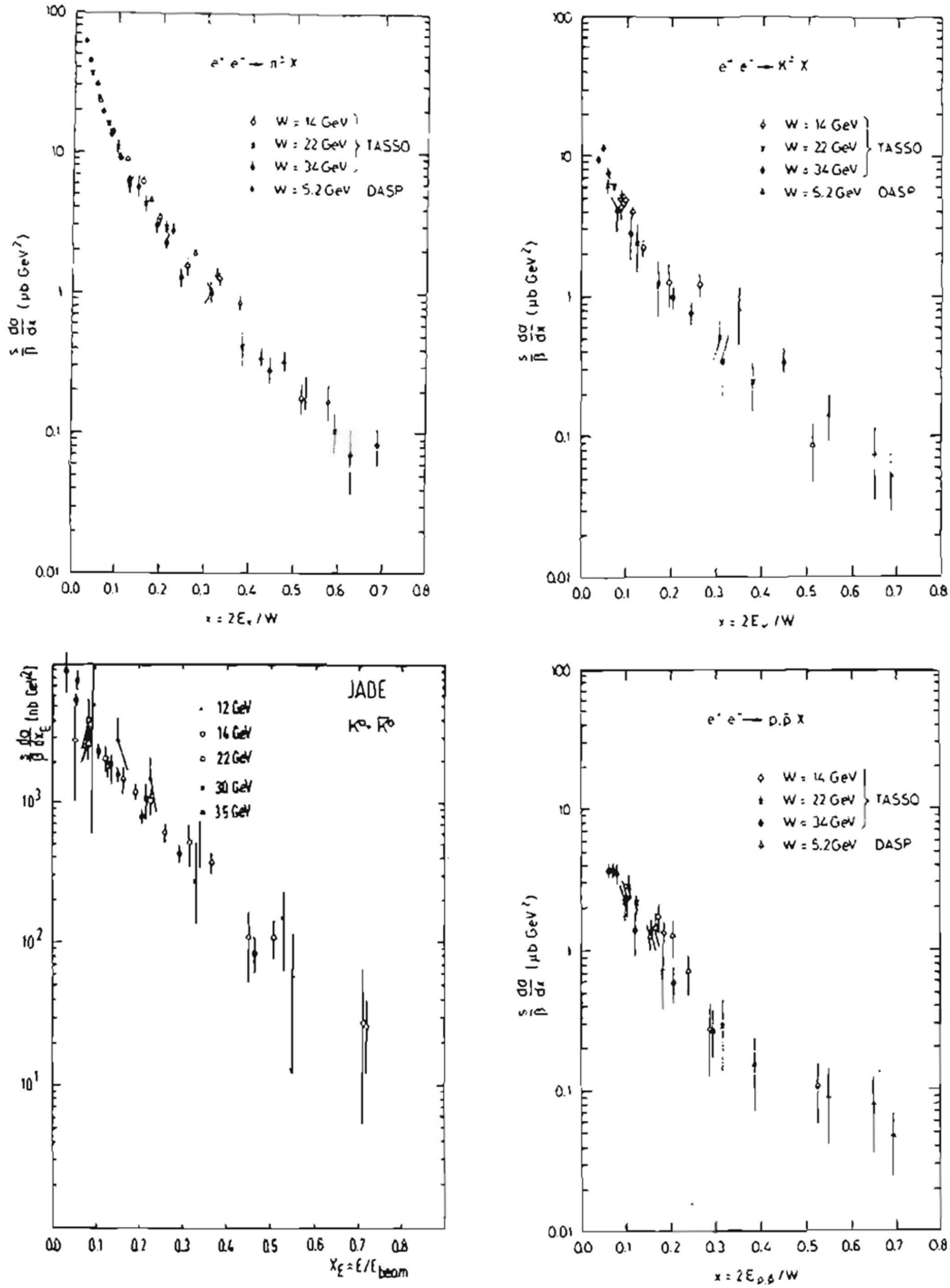
Figur 7.20: Typisk 2-jet begivenhed i CERN's ALEPH-detektor ved LEP.



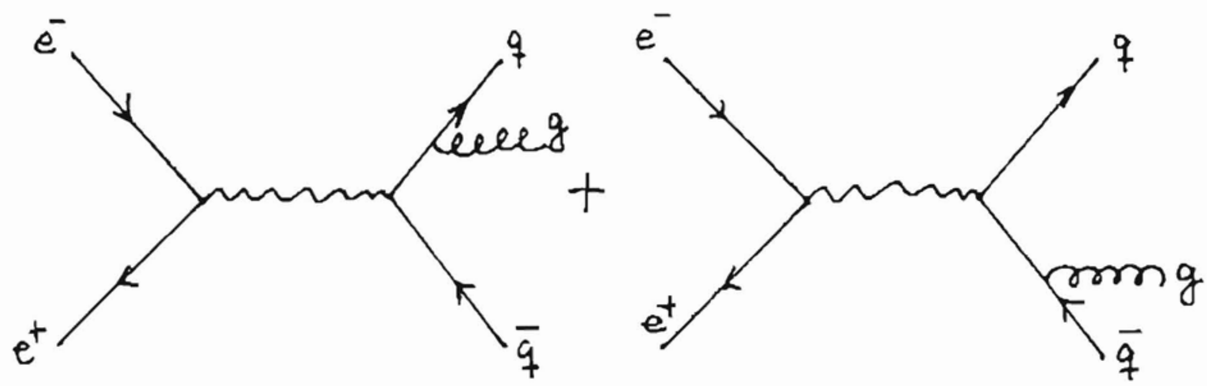
Figur 7.21: Multiplicitet af ladede partikler i e^+e^-–stød.



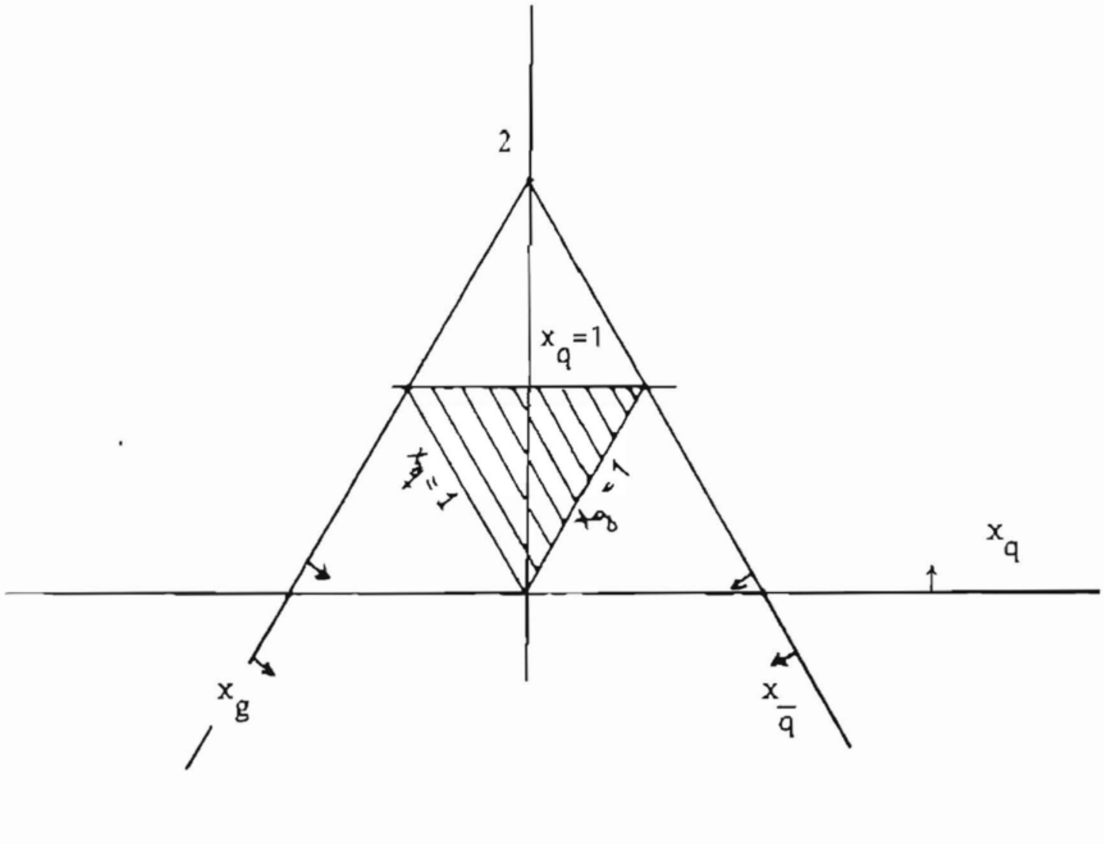
Figur 7.22: Kvarkdiagram, der antyder hadronfragmentering af en jet.



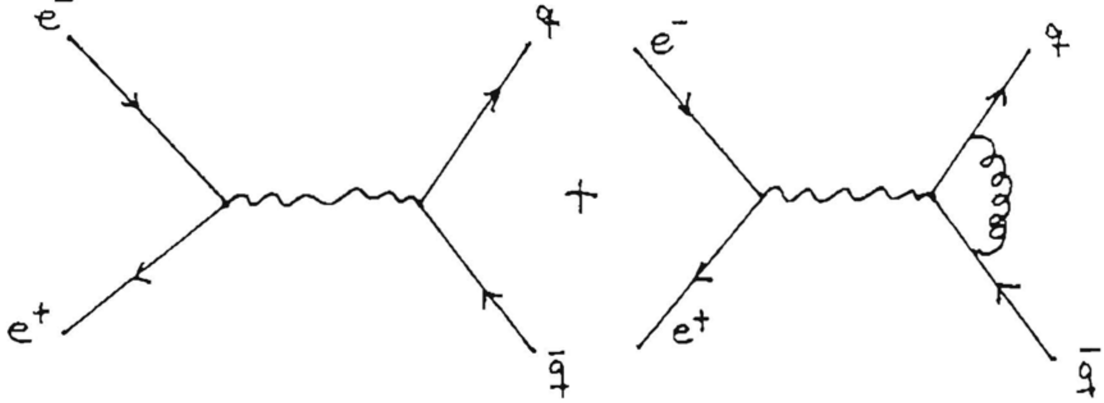
Figur 7.23: Differentielle inklusive fordelinger. PETRA data.



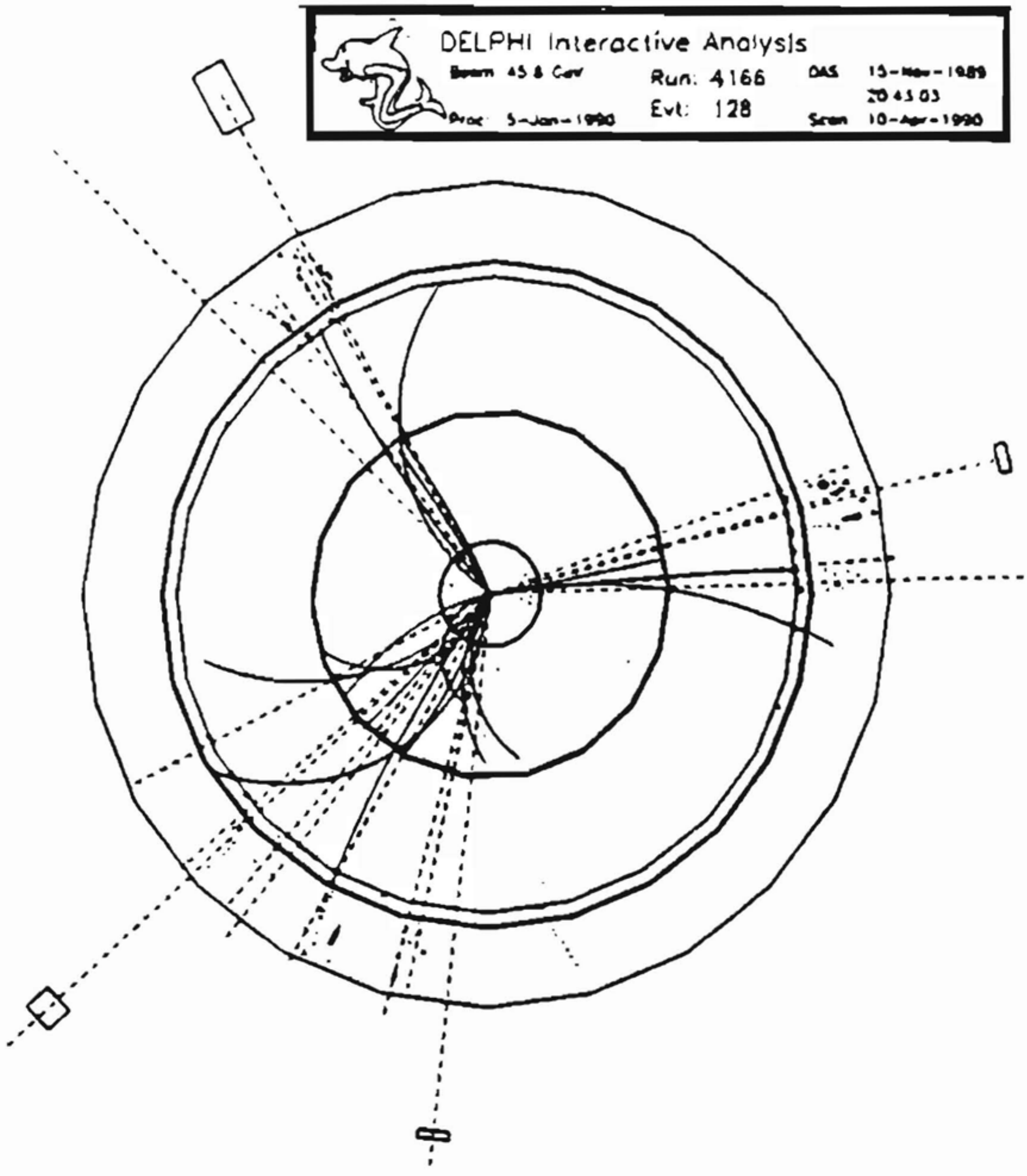
Figur 7.24: Feynman–diagrammer for kvark + antikvark + gluon produktion via en virtuel foton i e^+e^--stød.



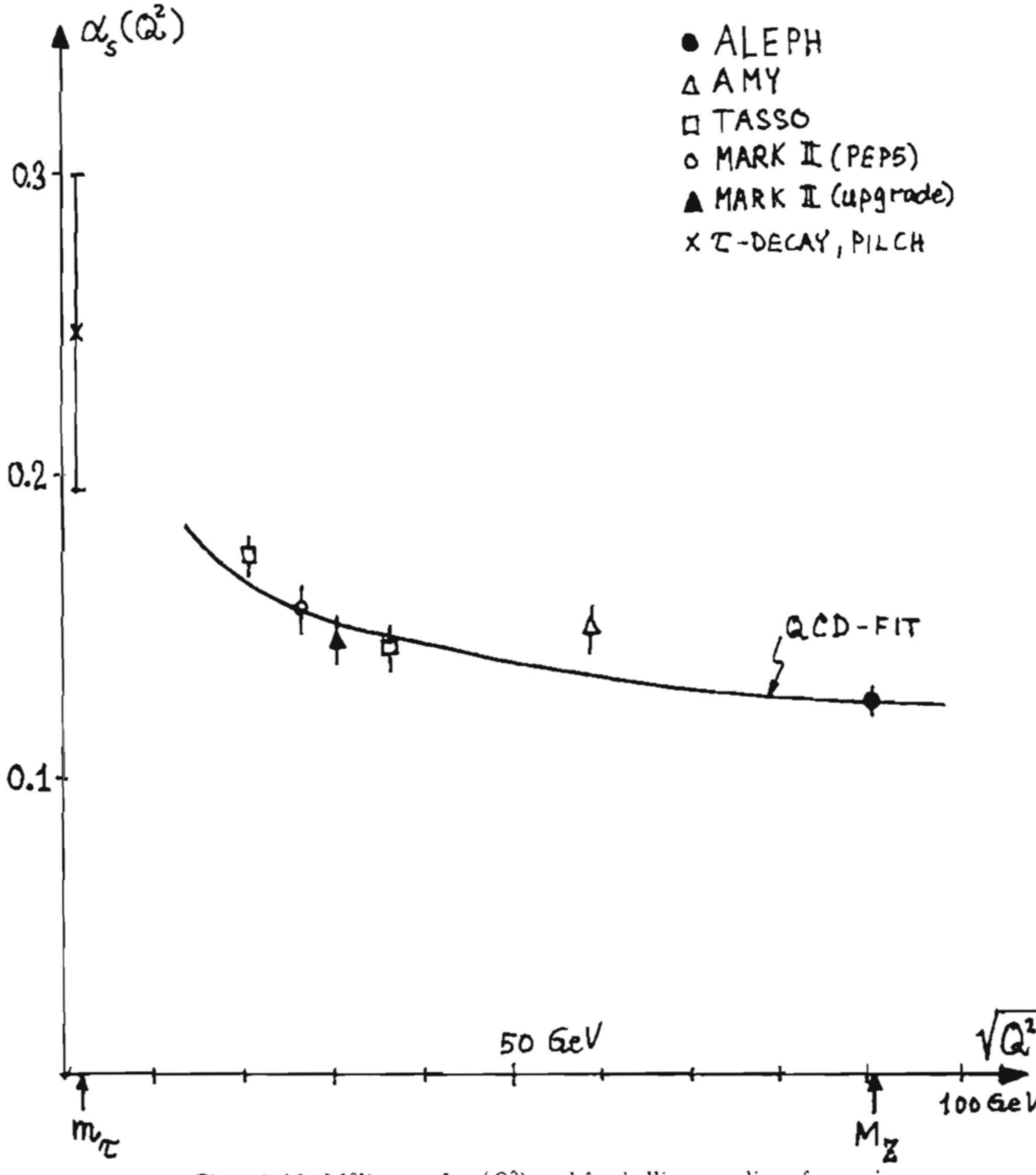
Figur 7.25: Dalitz-plot for sluttilstanden kvark + anti-kvark + gluon.



Figur 7.26: Feynman-diagrammer for kvark + antikvark produktion.



Figur 7.27: 3-jet begivenhed fra LEP, registreret af DELPHI detektoren. De rekonstruerede spor er vist projicerede i en plan vinkelret på kollisionsaksen.



Figur 7.28: Målinger af $\alpha_s(Q^2)$ ved forskellige værdier af energien.

Kapitel 8

SVAGE VEKSELVIRKNINGER

8.1 Beskrivelse af neutrinoer

Neutrinoer er (så vidt vi ved) masseløse, neutrale fermioner. For elektronens, myonens og τ-leptonens neutrinoer gælder

$$m(\nu_e) < 17 \text{ eV} \ , \ m(\nu_\mu) < 270 \text{ keV} \ , \ m(\nu_\tau) < 35 \text{ MeV} \quad . \tag{8.1}$$

Som vi bemærkede i kap. 2.8, vil masseløse partikler kun forekomme med én enkelt helicitet, med mindre der er paritetsinvarians, hvad der netop *ikke* er for de svage vekselvirkninger. I den udstrækning, neutrinoers helicitet har kunnet detekteres, er det altid fundet, at de har helicitet $= -\frac{1}{2}$, er *venstrehåndede*, medens antineutrinoer, så vidt vides altid er *højrehåndede*, har helicitet $= +\frac{1}{2}$.

Vi skal nu studere beskrivelsen af disse forhold.

Lad os først betragte en fermion med spin $\frac{1}{2}$ og masse $= m$. Vi har set, at de eksplicite spinorløsninger, som optræder i udtrykket for feltet

$$\psi(x) = \sum_{\vec{p},s} \left[b(\vec{p},s)u(\vec{p},s)e^{-ipx} + d^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p},s)e^{+ipx} \right] \tag{8.2}$$

kan skrives på formen

$$u(\vec{p},s) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_s \end{pmatrix} \qquad v(\vec{p},s) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi'_s \\ \chi'_s \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

hvor

$$\chi_{\pm\frac{1}{2}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \chi'_{\pm\frac{1}{2}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{8.4}$$

Det er så også klart, hvorledes løsninger svarende til en bestemt *helicitet* ser ud. Vælger vi først $\vec{p}$ langs z-aksen, er svaret præcist givet ved (8.3), hvor der så gælder

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_{\pm\frac{1}{2}} &= p\sigma_3\chi_{\pm\frac{1}{2}} = \pm p\chi_{\pm\frac{1}{2}} \\ &\text{og} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi'_{\pm\frac{1}{2}} &= p\sigma_3\chi'_{\pm\frac{1}{2}} = \mp p\chi'_{\pm\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Da udtrykket $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ er rotationsinvariant, kan vi skrive løsninger svarende til heliciteт $\lambda = \pm\frac{1}{2}$

$$u_\pm(\vec{p}) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \chi_\pm \\ \pm\chi_\pm\frac{p}{(E+m)} \end{pmatrix} \qquad v_\pm(\vec{p}) = \sqrt{(E+m)}\begin{pmatrix} \mp\chi'_\pm\frac{p}{(E+m)} \\ \chi'_\pm \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

hvor $p = |\vec{p}|$ og hvor $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi_\pm = \pm p\chi_\pm$ etc.

Vi betragter nu virkningen af *chiralitet-* eller *håndethedsmatricerne*

$$X_\pm = \frac{1}{2}(I \pm \gamma_5) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\right] \tag{8.7}$$

Der gælder

$$X_+X_- = \frac{1}{4}(I+\gamma_5)(I-\gamma_5) = \frac{1}{4}(I - \gamma_5 - \gamma_5 - \gamma_5^2) = 0$$

da

$$\begin{aligned} \gamma_5^2 &= (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = (i)^2(-)^3(\gamma^0)^2(-)^2(\gamma^1)^2(-)(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 \\ &= (-)(-)^3(1)(-)^2(-1)(-)(-1)(-1) = I \end{aligned} \tag{8.8}$$

Tilsvarende

$$X_+^2 = X_+ \quad , \quad X_-^2 = X_- \quad \text{og} \quad X_+ + X_- = I \tag{8.9}$$

der viser, at $X_\pm$ er projektionsoperatorer.

Lad os finde virkningen af X_+ på $u_\pm$ og $v_\pm$. Vi har

$$\begin{aligned} X_+u_\pm(\vec{p}) &= \sqrt{E+m}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\chi_\pm \pm \frac{p}{E+m}\chi_\pm\right) \\ \frac{1}{2}\left(\chi_\pm \pm \frac{p}{E+m}\chi_\pm\right) \end{bmatrix} \\ X_+v_\pm(\vec{p}) &= \sqrt{E+m}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\chi'_\pm \mp \frac{p}{E+m}\chi'_\pm\right) \\ \frac{1}{2}\left(\chi'_\pm \mp \frac{p}{E+m}\chi'_\pm\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.10}$$

I grænsen $m/E \to 0$ har vi $p/(E+m) \to 1$ og

$$\begin{aligned} X_+u_+ &\to u_+ \qquad X_+u_- \to 0 \\ X_+v_+ &\to 0 \qquad X_+v_- \to v_- \end{aligned} \tag{8.11}$$

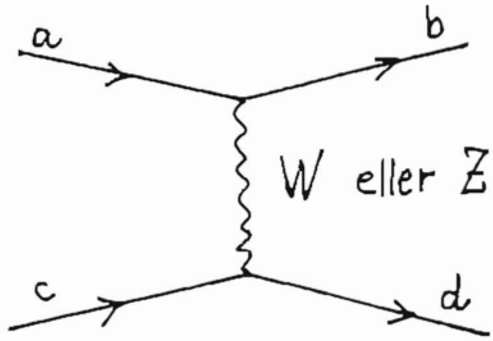
Vi ser, at for masseløse fermioner vil

$$X_+\psi \equiv \psi_R = \frac{1}{2}(I + \gamma_5)\psi \tag{8.12}$$

(R for Right) annihilere højrehåndede fermioner og skabe venstrehåndede antifermioner. Tilsvarende vil

$$X_-\psi \equiv \psi_L = \frac{1}{2}(I - \gamma_5)\psi \tag{8.13}$$

(L for Left) annihilere venstrehåndede fermioner og skabe højrehåndede antifermioner.



Figur 8.1: Svag 4-fermion vekselvirkning.

For endelige (små) værdier af m/E er der korrektioner hertil af størrelsesordenen

$$\frac{p}{E+m} - 1 \simeq -\frac{m}{E} + \mathcal{O}\left(\frac{m}{E}\right)^2$$

For $m = 0$ er ψ_R og ψ_L de "naturlige" felter ifølge vores diskussion i kap. 2.8. Bemærk også, at de tilfredsstiller Dirac-ligningen for $m = 0$, medens dette *ikke* er tilfældet for $m \neq 0$:

$$\begin{aligned}(i \not\partial - m)(1+\gamma_5)\psi &= (i \not\partial - m)\psi + (i \not\partial - m)\gamma_5\psi \\ &= 0 - \gamma_5(i \not\partial + m)\psi = -2m\gamma_5\psi \\ &\to 0 \qquad \text{for} \quad m \to 0 \end{aligned} \tag{8.14}$$

Her har vi brugt (3.57)

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$

8.2 4-fermionvekselvirkningen; leptonstrømmen

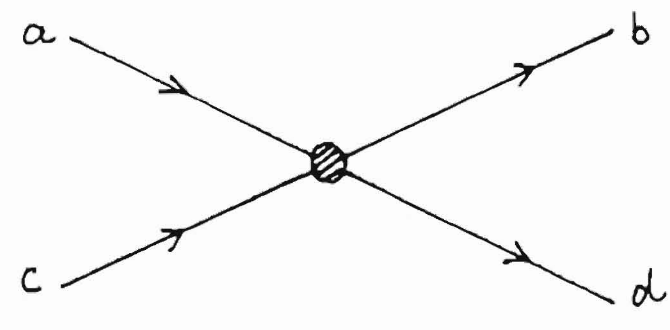
Moderne teorier for de svage vekselvirkninger baseres, som vi skal se i afsn. 8.9, på en gaugeteori med visse gaugekvanter, som kobler til fundamentale fermioner (leptoner og kvarker) på den sædvanlige simple måde kendt fra QED og QCD. Den væsentligste forskel er, at disse gauge-vektorbosoner *ikke* kan være masseløse som fotoner og gluoner. Vha et særligt Higgs-felt er det muligt at opnå, at de intermediære svage vektorbosoner kan få masser så høje som 80-90 GeV (eller mere) uden at bryde gaugeinvariansen af Lagrange-funktionen.

Til laveste orden i "koblingskonstanten" (den svage) beskrives den svage vekselvirkning mellem to fermioner så ved Feynman-diagrammet, fig. (8.1), hvis værdi vi vil skrive som

$$g^2 j_\mu^{(ab)} \frac{1}{t - M^2} j^{\mu(cd)} \tag{8.15}$$

Her er strømmene j^{ab} og j^{cd} de svage strømme sammensat af fermionfelterne (ab) og (cd) ; g er gaugekoblingskonstanten,[1] og M^2 er massen af den udvekslede vektorboson, medens t er den overførte 4-impuls (kvadreret).

[1]På nær en numerisk konstant, se afsn. 8.9



Figur 8.2: Lavenergetisk 4-fermion vekselvirkning.

Længe inden fremkomsten af sådanne teorier var det kendt, at man i en eller anden effektiv forstand kunne beskrive de svage vekselvirkninger ved en 4–fermion vekselvirkning svarende til fig.(8.1) eller fig.(8.2) af formen

$$\mathcal{H}_W = \frac{G}{\sqrt{2}} J^{(ab)}_\mu J^{\mu(cd)} + \text{h.c.} \tag{8.16}$$

hvor h.c. står for hermitesk konjugeret, og hvor J^μ er den såkaldte svage strøm, medens G - den såkaldte Fermi-konstant - har størrelsen

$$\begin{aligned} G &= 1.1664 \cdot 10^{-5}\text{GeV}^{-2} \\ &\simeq 1.0 \times 10^{-5} m_p^{-2} \end{aligned} \tag{8.17}$$

hvor den sidste form er bekvem at huske. Tilstedeværelsen af den hermitesk konjugerede del er dels en følge af gaugeteorierne dels nødvendigt for overensstemmelse med eksperimenterne. [2]

Forekomsten af en koblingskonstant (G) med dimensionen (energi)$^{-2}$ gjorde, at teorien ikke kunne renormeres, men sålænge man blot anvendte den til at beregne amplituder i laveste orden, stemte resultaterne meget fint med eksperimenterne.

I dag ser vi forekomsten af dimensionen (energi)$^{-2}$ som et udtryk for propagatoren i (8.15). I Standardmodellen, er gauge-koblingskonstanten g^2 af samme størrelse som finstrukturkonstanten $\alpha \simeq 1/137$, idet denne teori (delvist) forener de svage og de elektromagnetiske vekselvirkninger. Ved at sammenligne (8.15) (med $|t| \ll M^2$) med (8.16) og (8.17) finder vi så

$$M^2 \sim \frac{\alpha}{G} \sim 10^3\ GeV^2 \tag{8.18}$$

I denne delteori af Standardmodellen – Glashow-Weinberg-Salam-modellen (Nobelprisen 1979) – findes både to ladede ($W^\pm$) og en neutral (Z^0) vektormeson. Deres masser er nu målt til

$$m(W^\pm) = 80.6 \pm 0.4\ GeV \quad \text{og} \quad m(Z^0) = 91.18 \pm 0.02\ GeV$$

Disse værdier er som vi skal se i smukkeste overensstemmelse med teoriens forudsigelser, efter at en bestemt parameter (Weinberg-vinklen, se senere) var blevet målt i neutrinoeksperimenter.

[2]Hvis koblingskonstanterne desuden er reelle, betyder det, at vekselvirkningen er time-reversal invariant. Vi skal i dette kursus ikke behandle de få kendte meget svage brud herpå. I gaugeteorimodellerne har disse en forholdsvis naturlig beskrivelse, men kun hvis der (som observeret) er mindst tre fermiongenerationer.

I begyndelsen af dette kapitel vil vi stort set basere os på formen (8.16), idet vi dog senere skal se, hvilke præcise forudsigelser angående *formen* af J^μ, der følger af ovennævnte model, og til hvilken grad disse forudsigelser er blevet eftervist. I næste kapitel skal vi nærmere se på teoriens ideer om henfald og produktion af W og Z partiklerne.

Vi skal nu studere konsekvenserne af (8.16). Først opdeler vi J^μ i en leptondel og en hadrondel

$$J^\mu = J^\mu(\text{lepton}) + J^\mu(\text{hadron}) \tag{8.19}$$

Her skal vi først studere leptondelen, men siden skal vi se, at hadrondelen har en meget lignende form, *hvis* den udtrykkes i termer af kvarkfelter.

For hver del i (8.19) opdeler vi videre i CC og NC (engelsk: Charged Current og Neutral Current) svarende til en kobling til $W^\pm$ (CC) eller Z^0 (NC). Her vil vi først koncentrere os om $J^\mu_{CC}(\text{lept.})$, som har den simpleste form.

Som enhver anden gaugestrøm venter vi,[3] at den skal have formen

$$J^\mu_{CC}(\text{lept.}) = \bar{l}_1(x)\gamma^\mu l_2(x)$$

hvor $l_1(x)$ og $l_2(x)$ er to leptonfelter. Helt præcist vil vi tage

$$J^\mu_{CC}(\text{lept.}) = 2\sum_{i=e,\mu,\tau} \overline{\psi}_i(x)\gamma^\mu \nu_{iL}(x) \tag{8.20}$$

Her har vi antaget (i overensstemmelse med hvad der synes at gælde eksperimentelt), at hver lepton ($e, \mu, \tau, \ldots$) er ledsaget af sin egen neutrino, og at der *ikke* findes overgange, der forvandler fx en elektron til en μ-neutrino. Endvidere optræder i (8.20) kun det *venstrehåndede* neutrinofelt $\nu_L(x) = \frac{1}{2}(I - \gamma_5)\nu(x)$.

For $i = e$ finder vi

$$\begin{aligned}
[2\overline{\psi}_e\gamma^\mu\nu_{eL}]^\dagger &= [\overline{\psi}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_e]^\dagger \qquad\qquad (\gamma_5^\dagger = \gamma_5) \\
&= \nu_e^\dagger(1-\gamma_5)\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}\psi_e = \nu_e^\dagger\gamma_0\gamma_0(1-\gamma_5)\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0\psi_e \\
&= \overline{\nu}_e(1+\gamma_5)\gamma_0\gamma^{\mu\dagger}\gamma_0\psi_e = \overline{\nu}_e(1+\gamma_5)\gamma^\mu\psi_e \\
&= \overline{\nu}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_e
\end{aligned} \tag{8.21}$$

Altså har vi

$$\begin{aligned}
J^\mu_{CC}(\text{lept.}) &= \overline{\psi}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_e + \overline{\psi}_\mu\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_\mu + \overline{\psi}_\tau\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_\tau \\
J^\mu_{CC}(\text{lept.})^\dagger &= \overline{\nu}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_e + \overline{\nu}_\mu\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_\mu + \overline{\nu}_\tau\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_\tau
\end{aligned} \tag{8.22}$$

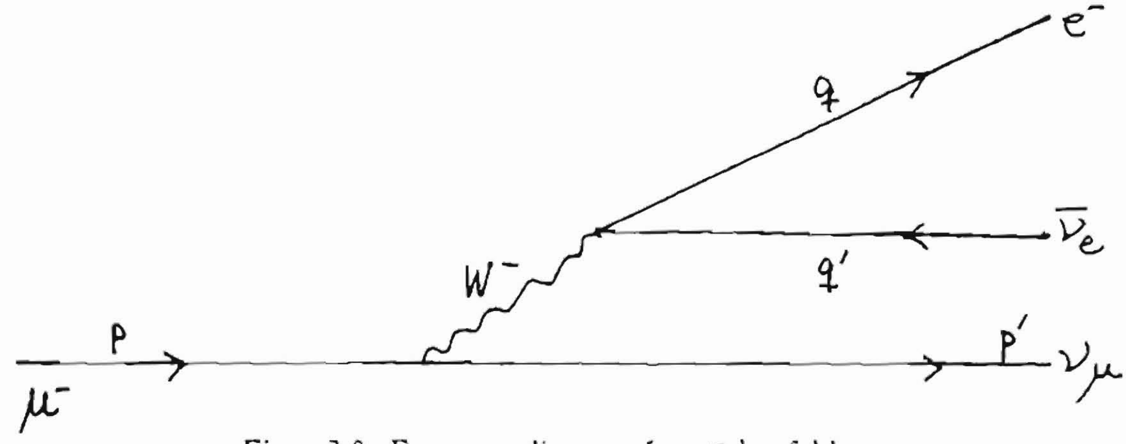
(+ evt. andre ukendte leptonbidrag.) Lad os studere, hvorledes denne strøm transformerer under P og C. For et generelt Fermi-felt gælder

$$\mathcal{C}\psi\mathcal{C}^{-1} = C\overline{\psi}^T \quad \text{og} \quad \mathcal{P}\psi(\bar{x},t)\mathcal{P}^\dagger = \gamma^0\psi(-\bar{x},t) \tag{8.23}$$

For det venstrehåndede neutrinofelt gælder så

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\nu_L(\bar{x},t)\mathcal{P}^\dagger &= \mathcal{P}\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu(\bar{x},t)\right]\mathcal{P}^\dagger = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\mathcal{P}\nu(\bar{x},t)\mathcal{P}^\dagger \\
&= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\gamma_0\nu(-\bar{x},t) = \gamma_0\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\nu(-\bar{x},t)\right] \\
&= \gamma_0\nu_R(-\bar{x},t)
\end{aligned} \tag{8.24}$$

[3] Jfr. koblingen af fotoner til elektroner eller gluoner til kvarker.



Figur 8.3: Feynman-diagram for μ^--henfald.

Altså: Under paritetsoperationen går det venstrehåndede neutrinofelt over i et højrehåndet felt, som *ikke* forekommer i J^μ. Heraf følger, at de svage vekselvirkninger (i vores model) *ikke* er paritetsinvariante.

Under ladningskonjugering har vi tilsvarende

$$C\nu_L C^{-1} = C\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu\right]C^{-1} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)C\nu C^{-1} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)C\overline{\nu}^T$$

Nu er $C\gamma_5 = \gamma_5 C$ (brug (3.125)),(3.79) og (3.59))); tilsvarende er $(\gamma_5)^T = \gamma_5$. Altså har vi

$$C\nu_L C^{-1} = C\left[\frac{1}{2}\overline{\nu}(1-\gamma_5)\right]^T = C(\overline{\nu}_R)^T$$

hvor $\overline{\nu}_R = \frac{1}{2}\overline{\nu}(1-\gamma_5)$, medens $\overline{\nu}_L = \frac{1}{2}\overline{\nu}(1+\gamma_5)$. Igen ser vi, at C producerer et felt, der ikke forekommer i J^μ: De svage vekselvirkninger er *ikke* invariante under C.

Kombinerer vi imidlertid $\mathcal{P}$ og C, får vi

$$C\left[\mathcal{P}\nu_L(\vec{x},t)\mathcal{P}^\dagger\right]C^\dagger = \gamma^0\frac{1}{2}(1+\gamma_5)C\nu(-\vec{x},t)C^{-1} \tag{8.25}$$

$$= \gamma^0\frac{1}{2}(1+\gamma_5)C\overline{\nu}^T(-\vec{x},t) = \gamma^0 C\left[\overline{\nu}_L(-\vec{x},t)\right]^T \tag{8.26}$$

Herefter er behandlingen analog til vores behandling af $\mathcal{P}$ og C for den elektromagnetiske strøm:

$$\overline{\psi}_e(\vec{x},t)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_e(\vec{x},t) \overset{C\mathcal{P}}{\to} -\overline{\nu}_e(-\vec{x},t)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_e(-\vec{x},t) \tag{8.27}$$

som er et led i J_{CC} (lept.)† taget i $(-\vec{x},t)$. Heraf følger, at i hvert fald for leptondelen er de svage vekselvirkninger invariante under den sammensatte transformation $\mathcal{P}C$.

I det følgende skal vi studere konsekvenser af formen (8.22) og se, at den giver en beskrivelse, som modsvares af eksperimenter.

8.3 μ-henfald

Denne rent leptoniske proces kan vi nu behandle. Feynman-diagrammet er vist i fig.(8.3). Når μ-tal, e-tal og ladning skal bevares, er der ikke andre mulige diagrammer i laveste orden. I modellen (8.16) og (8.22) kommer matrikselementet fra leddet

$$\frac{G}{\sqrt{2}}\left[\overline{\nu}_\mu\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_\mu\right]\left[\overline{\psi}_e\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e\right] \quad \text{i } \mathcal{H}_W$$

Det er elementært at udlede de tilhørende Feynman-regler:

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}}\left[\overline{u}_{\nu_\mu}(p')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_\mu(p)\right]\left[\overline{u}_e(q)\gamma_\mu(1-\gamma_5)v_{\nu_e}(q')\right] \tag{8.28}$$

for matrikselementet for $\mu^- \to e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$.

For absolutkvadratet, summeret over alle spinmuligheder, finder vi så (jfr. afsn. 5.8, (5.82))

$$\sum_{spin}|\mathcal{M}|^2 = \frac{G^2}{2}M^{\mu\nu}E_{\mu\nu} \tag{8.29}$$

$$M^{\mu\nu} = Tr\{\not p'\gamma^\mu(1-\gamma_5)(\not p + m_\mu)(1+\gamma_5)\gamma^\nu\} \tag{8.30}$$

$$E_{\mu\nu} = Tr\{(\not q + m_e)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not q'(1+\gamma_5)\gamma_\nu\} \tag{8.31}$$

Da sporet af et ulige antal γ-matricer (γ_5 virker som 4 gammamatricer) er nul, får vi

$$M^{\mu\nu} = Tr\{\not p'\gamma^\mu(1-\gamma_5)\not p(1+\gamma_5)\gamma^\nu\} = Tr\{\not p'\gamma^\mu(1-\gamma_5)^2\not p\gamma^\nu\}$$

Men $(1-\gamma_5)^2 = 2(1-\gamma_5)$, så

$$M^{\mu\nu} = 2Tr\{\not p'\gamma^\mu\not p\gamma^\nu\} - 2Tr\{\gamma_5\not p'\gamma^\mu\not p\gamma^\nu\}$$

Nu er (**Øvelse**)

$$Tr[\gamma_5\not a\not b\not c\not d] = -4i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta \tag{8.32}$$

hvor

$$\varepsilon^{0123} \equiv +1 \quad , \quad \varepsilon_{0123} = -1$$

er det fuldstændigt antisymmetriske Levi-Civita-symbol i 4 dimensioner. Altså (jfr. reglerne (5.90) etc.)

$$M^{\mu\nu} = 8[p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - p'\cdot p g^{\mu\nu} + i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu}p'_\alpha p_\beta]$$

$E_{\mu\nu}$ fås direkte af $\mu \to \nu$, $p \leftrightarrow q$ som $(\varepsilon_{\gamma\nu\beta\mu} = -\varepsilon_{\gamma\mu\beta\nu})$

$$E_{\mu\nu} = 8[q'_\mu q_\nu + q'_\nu q_\mu - q'\cdot q g_{\mu\nu} - i\varepsilon_{\gamma\mu\delta\nu}q'^\gamma q^\delta]$$

Af

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\gamma\delta\mu\nu} = -2\left[\delta^\alpha_\gamma\delta^\beta_\delta - \delta^\alpha_\delta\delta^\beta_\gamma\right]$$

fås så

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu}E_{\mu\nu} &= 64\{2(p'\cdot q')(p\cdot q) + 2(p'\cdot q)(p\cdot q') - 2(q'\cdot q)(p'\cdot p) - 2(p'\cdot p)(q'\cdot q) \\ &+ 4(p\cdot p')(q\cdot q') - 2[\delta^\alpha_\gamma\delta^\beta_\delta - \delta^\alpha_\delta\delta^\beta_\gamma]p'_\alpha p_\beta q'^\gamma q^\delta\} \\ &= 4\cdot 64(p'\cdot q)(p\cdot q') \end{aligned} \tag{8.33}$$

og

$$\overline{\sum}_{spin}|\mathcal{M}|^2 = 64\,G^2(p'\cdot q)(p\cdot q')$$

Fra kap. 1 finder vi den fuldt differentielle, upolariserede overgangssandsynlighed i myonens hvilesystem

$$d\Gamma_{fi} = \frac{1}{2m_\mu} \overline{\sum}_{spin} |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_{q'}} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} (2\pi)^4 \delta^4(p - q - q' - p') \quad (8.34)$$

I praksis er neutrinoerne så godt som umulige at detektere (om neutrinoeksperimenter, se kap. 10). Vi er derfor interesseret i elektronens energifordeling uanset neutrinoernes impulser. Dvs at vi ønsker at integrere (8.34) over neutrinoimpulserne. Matrikselementets afhængighed af neutrinoimpulserne p' og q' fremgår af (8.33). Vi skal derfor udregne integralet

$$I^{\alpha\beta} \equiv \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_{q'}} p'^\alpha q'^\beta (2\pi)^4 \delta^4(Q - q' - p') \quad (8.35)$$

hvor $Q \equiv p - q$.

Først bemærker vi, at $I^{\alpha\beta}$ er en Lorentz-tensor, som kun afhænger af 4-vektoren Q og som har dimension af $(\text{energi})^2$ ($\delta^4(\ )$ har dimensionen $(\text{energi})^{-4}$). Derfor kan vi skrive $I^{\alpha\beta}$ på formen

$$I^{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi}(a\, g^{\alpha\beta} Q^2 + b Q^\alpha Q^\beta) \quad (8.36)$$

hvor a og b er ubekendte konstanter, vi vil finde. Først udregner vi sporet af $I^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} I^\alpha_\alpha &= \frac{Q^2}{16\pi}(4a + b) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p'}{2E_{p'}} \frac{d^3q'}{2E_{q'}} p' \cdot q' \delta^4 (Q - (p' + q')) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} Q^2 \int \frac{d^3p'}{2E_{p'}} \frac{d^3q'}{2E_{q'}} \delta^4 (Q - (p' + q')) \end{aligned} \quad (8.37)$$

hvor vi har brugt, at ifølge δ-funktionen kan vi erstatte $p' + q'$ med Q, og

$$Q^2 = (p' + q')^2 = p'^2 + q'^2 + 2p' \cdot q' = 2p' \cdot q'$$

da neutrinoerne er masseløse. Af samme grund er $E = |\vec{p}|$, og i $\vec{Q} = \vec{0}$ systemet er så $E_{p'} = E_{q'}$. Integrationen over d^3q' er triviel, og vi får

$$I^\alpha_\alpha = \frac{1}{8\pi^2} Q^2 \frac{1}{4} \int \frac{d\Omega p^2 dp}{p \cdot p} \delta(Q^0 - 2p') = \frac{Q^2}{64\pi^2} \cdot 4\pi = \frac{Q^2}{16\pi}$$

altså

$$4a + b = 1 \quad (8.38)$$

Dernæst sætter vi $\alpha = \beta = 0$ i (8.35) og udregner integralet, stadig i $\vec{Q} = \vec{0}$ systemet:

$$I^{00} = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3p' d^3q' \delta^4(Q - p' - q') = \frac{1}{16\pi^2} \int d\Omega p^2 dp \delta(Q^0 - 2p) = \frac{4\pi}{32\pi^2} \left(\frac{Q^0}{2}\right)^2 = \frac{1}{32\pi} Q^2$$

da $\vec{Q} = \vec{0}$, altså

$$a + b = \frac{1}{2}.$$

Vi får derfor

$$a = \frac{1}{6}, b = \frac{2}{6}$$

og

$$I^{\alpha\beta} = \frac{1}{6 \cdot 16\pi}(g^{\alpha\beta}Q^2 + 2Q^\alpha Q^\beta) \tag{8.39}$$

I (8.34) sætter vi videre

$$\frac{d^3q}{2E_q} = \frac{d\Omega_q|\vec{q}\,|^2 d|\vec{q}\,|}{2E_q} = \frac{\sqrt{E^2 - m_e^2}}{2}\, d\Omega dE$$

idet $|\vec{q}\,|d|\vec{q}\,| = E_q dE_q$, da $E_q^2 - |\vec{q}\,|^2 = m_e^2$, og hvor $E \equiv E_q$. Vi integrerer over elektronens retning, indsætter alle vore resultater i (8.34) og finder omsider for *energifordelingen* af elektronen i μ-henfald i μ-leptonens hvilesystem $(m_e/m_\mu \to 0)$

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \frac{G^2 m_\mu^2 E^2}{12\pi^3}\left(3 - \frac{4E}{m_\mu}\right)$$

Elektronens maksimale energi (i grænsen $m_e/m_\mu \to 0$) er $\frac{1}{2}m_\mu$. Skrives

$$E = \frac{1}{2}m_\mu \cdot x$$

har vi

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{G^2 m_\mu^5}{96\pi^3}\, x^2(3 - 2x) \tag{8.40}$$

Integreres endelig over elektronenergien $(0 < x < 1)$ fås

$$\tau^{-1} = \Gamma = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \tag{8.41}$$

Eksperimentelt er $\tau = 2.1970 \times 10^{-6}$ sek, $m_\mu = 105.66\ MeV$ og $\hbar = 6.582 \times 10^{-22}$ MeV sek. Heraf fås

$$\begin{aligned} G^2 = \frac{192\pi^3\hbar}{\tau m_\mu^5} &\simeq 1.35 \times 10^{-10}\ GeV^{-4} \\ G &\simeq 1.16 \times 10^{-5}\ GeV^{-2} \end{aligned} \tag{8.42}$$

(jfr. (8.17), der også tager hensyn til forskellige strålingskorrektioner, dvs højere ordens diagrammer.)

Vi gør flg. bemærkninger om disse resultater:

(i) Ud fra en dimensionsbetragtning kan vi slutte, at

$$\tau^{-1} = \Gamma \propto G^2 \cdot m_\mu^5$$

Amplituden indeholder nemlig en faktor G og $[G] = E^{-2}$. Γ indeholder så G^2 og den eneste anden masse i problemet (i grænsen $m_e/m_\mu \to 0$) er m_μ. Det er langtfra trivielt, at proportionalitetskonstanten bliver så lille som $1/(192\pi^3) \sim 10^{-4}$ (!).

Figur 8.4: Myonhenfald med maksimal elektronenergi.

(ii) Energifordelingen (8.40) af elektronen findes at være i nøje overensstemmelse med data. Forsøger vi at tillade andre led i den ladede leptonstrøm, fx led med højrehåndede neutrinoer og venstrehåndede antineutrinoer, findes ved en tilsvarende regning at de giver en anden energifordeling. Formen (8.40) tester både, at neutrinomassen er tæt på nul, og at paritetsbruddet er maksimalt: Kun venstrehåndede neutrinoer forekommer.

(iii) Af (8.40) ses, at den maksimale sandsynlighed for elektronens energi forekommer, når energien er maksimal, se fig.(8.4). De små pile angiver heliciteterne. Vi har set, at formen

$$\bar{\psi}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_e = \bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\gamma^\mu\nu_e$$

både svarede til produktion af venstrehåndede elektronneutrinoer (højrehåndede antineutrinoer) og til produktion af venstrehåndede elektroner (højrehåndede positroner) i grænsen $m_e \to 0$ (jfr. afsn. 8.1). Dette har kunnet eftervises eksperimentelt: Elektronerne i $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ er "altid" venstrehåndede, positronerne i $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ er "altid" højrehåndede. Bemærk, at hvis μ-strømmen svarede til produktion af højrehåndede neutrinoer (af μ-slagsen), vil pilen ved ν_μ blive vendt i (8.4). Det totale spin er så 3/2 i impulsernes retning, og denne kinematiske konfiguration ville være forbudt, da spinnet af μ^- er $\frac{1}{2}$.

Vi ser også af (8.4), at elektroner fortrinsvis udsendes *modsat* spinretningen af μ^-. Dette klare brud på paritetsinvarians er ligeledes bekræftet eksperimentelt.

8.4 Den ladede hadronstrøm

Vi har tidligere antydet eksistensen af en forbindelse mellem leptondubletter og kvarkdubletter:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} t\,? \\ b \end{pmatrix} \tag{8.43}$$

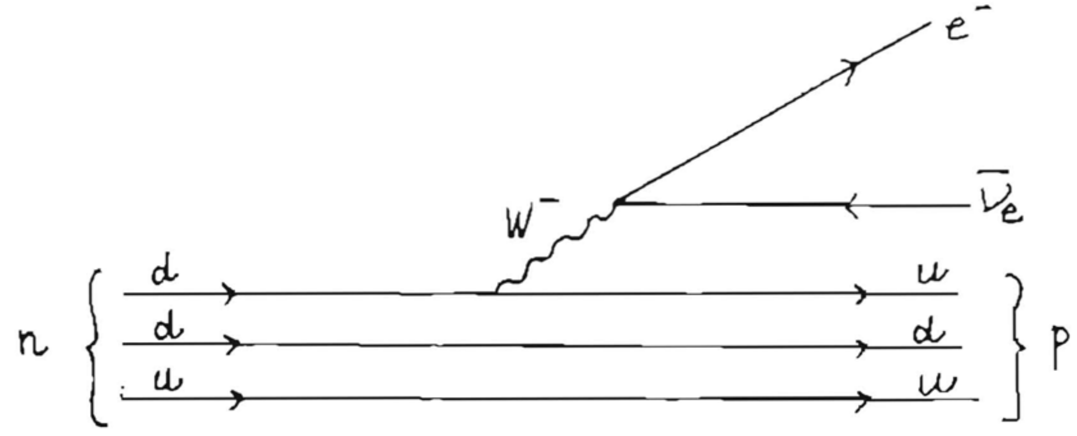
Denne forbindelse baserer sig på forhold vedrørende de svage vekselvirkninger. De bedst kendte overgange svarer til β-henfaldet af en d-kvark

$$d \to u + e^- + \bar{\nu}_e \tag{8.44}$$

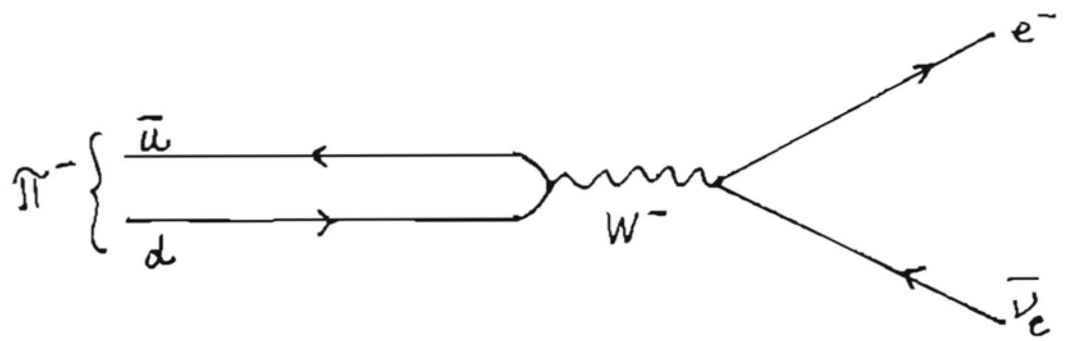
som det ses fx i neutronhenfald fig. (8.5) og i $\pi^\pm$-henfald, fig. (8.6) og fig. (8.7).

Imidlertid forekommer ogsÖ β-henfald af en *s-kvark* til en u-kvark

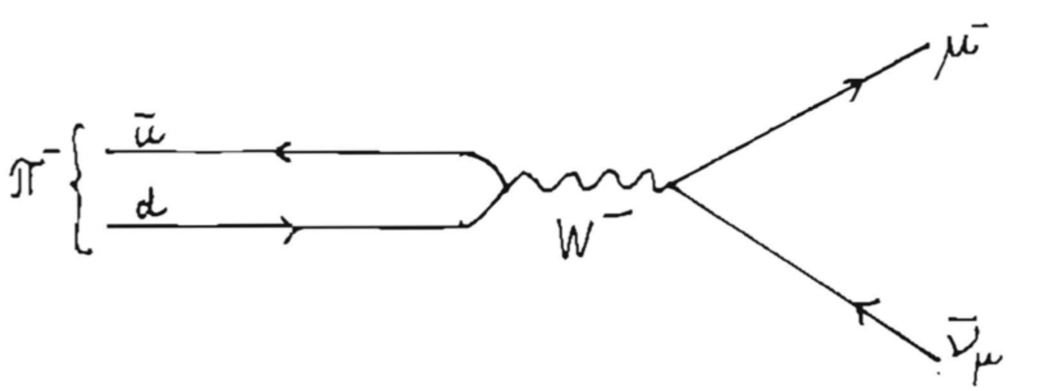
$$s \to u + \begin{cases} e^- + \bar{\nu}_e \\ \mu^- + \bar{\nu}_\mu \end{cases} \tag{8.45}$$



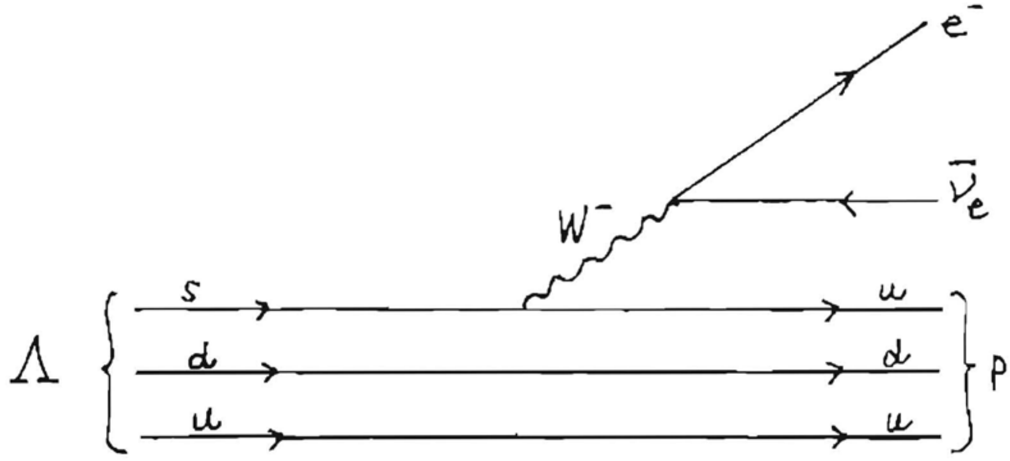
Figur 8.5: Kvark-diagram for neutronhenfald.



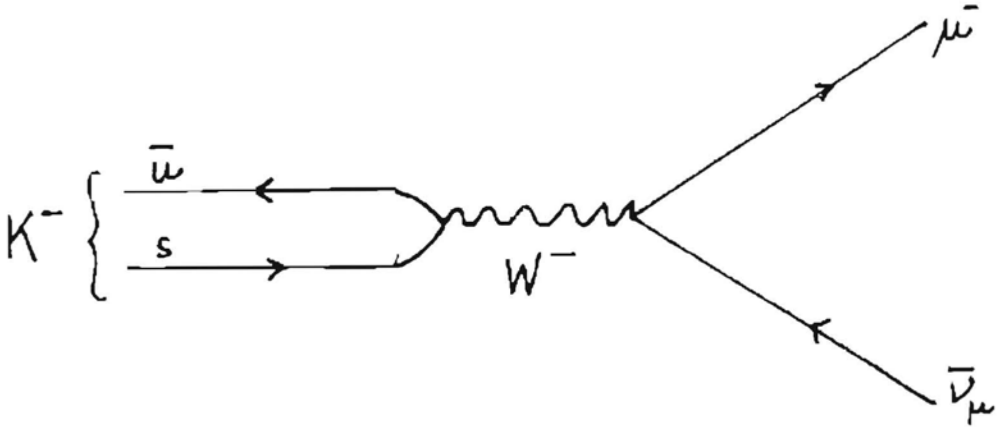
Figur 8.6: Kvark-diagram for $\pi^- \to e^- \bar{\nu}_e$-henfald.



Figur 8.7: Kvark-diagram for $\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu$-henfald.



Figur 8.8: Kvark-diagram for Λ-henfald.



Figur 8.9: Kvark-diagram for K^--henfald.

som det ses fx i Λ-henfald, fig. (8.8) og i $K^{\pm}$-henfald, fig. (8.9).

Som vi snart skal se, foregår d-henfaldet med omtrent samme styrke som μ-henfaldet, medens s-henfaldet er noget svagere.

Vi vil her straks røbe den gængse opfattelse af, hvad der foregår, og så efterhånden se denne bekræftet ved sammenligning med data.

Den gængse opfattelser (som er helt nødvendig for at kunne formulere en gauge-teori, se afsn. 8.9) går ud på, at den ladede, svage kvarkstrøm har helt samme form som den ladede, svage leptonstrøm, samt at den kobler med præcist samme styrke. For at denne opfattelse (universalitet, eller Cabibbo-universalitet) kan være forenelig med forholdene vedrørende d- og s-henfald, må vi antage, at de "naturlige" felter ψ_{d_c} og ψ_{s_c}, som indgår i beskrivelsen af de svage vekselvirkninger, ikke er helt de samme som de felter, der i de stærke vekselvirkninger synes mest naturlige: ψ_d og ψ_s. Derimod gælder, at det ene sæt er lidt roteret i forhold til det andet:

$$\begin{aligned} \psi_{d_c} &= \cos\theta_C\ \psi_d + \sin\theta_C\ \psi_s \\ \psi_{s_c} &= -\sin\theta_C\ \psi_d + \cos\theta_C\ \psi_s \end{aligned} \tag{8.46}$$

Da alle flavours kobler ens til gluoner, er QCD-Lagrange–funktionen lige så simpel skrevet i felterne ψ_{d_c} og ψ_{s_c}, som skrevet i felterne ψ_d og ψ_s - i hvert fald bortset fra masseleddet. Dette sidste er kun diagonalt i ψ_d og ψ_s, ikke i ψ_{d_c} og ψ_{s_c}. Der er i dag en tendens til at opfatte felterne ψ_{d_c} og ψ_{s_c} som de "*mest* naturlige" og så sige, at ψ_d og ψ_s er den linearkombination heraf, som diagonaliserer masseleddet.

Første linje i (8.46) er essensen af Cabibbos teori for de svage vekselvirkninger fra omkr. 1963. Anden linje blev tilføjet af Glashow, Illiopoulos and Maiani i 1970 og var basis for deres teori om eksistensen af en charmkvark. Vi skal komme tilbage hertil i afsn. 8.7.

Det er klart, at formalismen nu kan udvides yderligere ved at tage hensyn til en eventuel $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$-dublet, men vi vil se bort herfra i dette kursus.

Vi postulerer altså nu, at i termer af kvarkfelter har den svage, ladningsændrende strøm følgende simple udseende for hadroner

$$J^{\mu}_{c.c.}(\text{hadr.}) = \overline{\psi}_{d_c}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\psi_u + \overline{\psi}_{s_c}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\psi_c \tag{8.47}$$

hvortil kommer den hermitesk konjugerede strøm.

8.5 $\pi^{\pm}$-henfald og $K^{\pm}$-henfald

Behandlingen af $\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu$ $(\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)$ og af $\pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e$ $(\pi^+ \to e^+ + \nu_e)$ forløber på samme måde. Eksperimentelt er forgreningsforholdet for $\pi - \mu$-henfald meget tæt på 100%, medens $\pi - e$-henfaldet kun foregår med et forgreningsforhold på

$$B(\pi - e) = (1.22 \pm 0.01) \times 10^{-4} \tag{8.48}$$

Forklaringen herpå skal vi straks se.

Lad os betragte $\pi - \mu$-henfaldet. Hvis $\overline{u}$- og d-kvarkerne i π^- var frie, ville vi umiddelbart kunne nedskrive matrikselementet for overgangen vha (8.47) og (8.46) som (på nær faser)

$$\frac{G}{\sqrt{2}} \cos\theta_C \overline{v}_{\overline{u}}(p(\overline{u}))\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_d(p(d)) \cdot \overline{u}_{\mu^-}(p(\mu^-))\gamma_\mu(1-\gamma_5)v_{\overline{\nu}_\mu}(p(\overline{\nu}_\mu)) \tag{8.49}$$

Da imidlertid kvarkerne er bundet i en π^-, må vi forestille os, at dette udtryk skal multipliceres med $(\overline{u}d)$-bølgefunktionen i en urelativistisk behandling, hvorefter der skal summeres over indre kvarkvariable. Da π^--mesonen må formodes at være et meget kompliceret, relativistisk system, skal vi afstå fra en sådan behandling. I stedet bemærker vi, at første matriksprodukt i (8.49) kommer fra et matrikselement af formen

$$\langle 0|\overline{\psi}_u\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_{d_c}|\pi^-(P)\rangle$$

hvor P er π-mesonens 4-impuls. Dette udtryk indeholder alle komplikationer kommende fra den korrekte generalisering af begrebet en bølgefunktion på en kovariant måde. Dette matrikselement transformerer som en 4-vektor under Lorentz-transformationer, og da det kun afhænger af én 4-vektor (P), for hvilken $P^2 = m_\pi^2$, skriver vi

$$\langle 0|\overline{\psi}_u\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_{d_c}|\pi^-(P)\rangle \equiv f_\pi \cos\theta_C P^\mu \tag{8.50}$$

hvor vi har indført π-mesonens henfaldskonstant f_π. I en urelativistisk model ville den være simpelt forbundet med bølgefunktionen i begyndelsespunktet $\psi(\vec{0})$ (jfr. vores behandling af charmoniumhenfald, afsn. 7.7).

Vi får så for overgangs-matrikselementet for $\pi-\mu$-henfald, idet p er 4-impulsen af myonen og k 4-impulser af neutrinoen og $p+k=P$:

$$\langle \mu^-\overline{\nu}_\mu|T|\pi^-\rangle = \frac{G}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \overline{u}(p)(\not{p}+\not{k})(1-\gamma_5)v(k)$$

Her kan vi bruge Dirac-ligningen på μ- og neutrinospinorerne

$$\overline{u}(p)\not{p} = m_\mu \overline{u}(p) \quad \text{og} \quad \not{k}(1-\gamma_5)v(k) = 0$$

Altså

$$T_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C m_\mu \overline{u}(p)(1-\gamma_5)v(k) \tag{8.51}$$

For det spinsummerede absolutkvadrat fås så

$$\sum_{spin} |T_{fi}|^2 = \frac{1}{2} G^2 f_\pi^2 \cos^2\theta_C m_\mu^2 Tr\{(\not{p}+m_\mu)(1-\gamma_5)\not{k}(1+\gamma_5)\}$$

For sporet fås ved anvendelse af de sædvanlige regler ($Tr(\not{a}\not{b}\gamma^5)=0$)

$$Tr\{\not{p}\not{k}(1+\gamma_5)^2\} = 2Tr\{\not{p}\not{k}(1+\gamma_5)\} = 2Tr(\not{p}\not{k}) = 8p\cdot k$$

Formlen for 2-partikelhenfald (kap. 1) giver så

$$\Gamma(\pi^- \to \mu^- + \nu_\mu) = \frac{G^2 f_\pi^2 \cos^2\theta_C}{8\pi} m_\pi m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2 \tag{8.52}$$

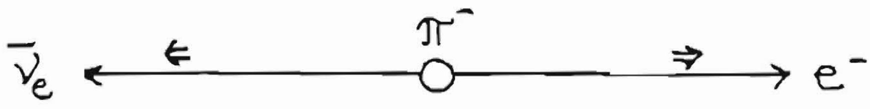


Figure 8.10: Helicitetsforhold ved $\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e$-henfald.

Udtrykket for $\pi - e$-henfald har helt samme form. For forgreningsforholdet får vi derfor

$$\frac{\Gamma(\pi - e)}{\Gamma(\pi - \mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{(m_\pi^2 - m_e^2)}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)}\right)^2 = 1.28 \times 10^{-4} \tag{8.53}$$

i god overensstemmelse med det eksperimentelle resultat (8.48). Den beskedne afvigelse tilskrives højere ordens korrektioner.

Dette er en interessant test af udtrykket for leptonstrømmen, som vi kvalitativt kan forstå (fig. (8.10)).

Da spinnet af π-mesonen er 0, må impulsmomentet langs den fælles flugtlinje af $\bar{\nu}_e$ og e^- i π-mesonens hvilesystem være 0. Men $\bar{\nu}_e$ har altid helicitet $+\frac{1}{2}$; derfor må også heliciteten af e^- være $+\frac{1}{2}$. Imidlertid har vi set i afsn. 8.1, at $(1 - \gamma_5)$ projektionen på neutrinoen også virker på elektronfeltet, så relativistiske elektroner fortrinsvis også bliver venstrehåndede: Har helicitet $= -\frac{1}{2}$. Konfigurationen, fig. (8.10), er altså "forbudt" i den approksimation, hvor $m_e = 0$. Korrektionen er iflg. afsn. 8.1 af størrelsen $m_e/m_\pi \simeq m_e/m_\mu$ i matrikselementet. Heraf følger kvalitativt, at forgreningsforholdet er så lille som i (8.53). For $\pi - \mu$-henfald er argumentet ikke effektivt, da μ-massen er næsten lige så stor som π-massen, således at μ-leptonen er urelativistisk.

$K - \mu$- og $K - e$-henfald kan vi behandle på fuldstændig samme måde. Sammenligner vi figurerne (8.6), (8.7) og (8.9) eller bruger vi (8.46), ser vi, at det er rimeligt at indføre en K-henfaldskonstant f_K, således at $f_\pi \cos\theta_C$ erstattes med $f_K \sin\theta_C$. Forgreningsforholdet bliver dog uafhængigt af denne henfaldskonstant:

$$\frac{\Gamma(K - e)}{\Gamma(K - \mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{m_K^2 - m_e^2}{m_K^2 - m_\mu^2}\right)^2 = 2.57 \times 10^{-5}$$

i overensstemmelse med det eksperimentelle resultat på $2.4 \times 10^{-5} \pm 0.1 \times 10^{-5}$. Videre finder vi

$$\frac{\Gamma(K - \mu)}{\Gamma(\pi - \mu)} = \left(\frac{f_K}{f_\pi}\right)^2 tg^2\theta_C \, \frac{m_K}{m_\pi} \left[\frac{1 - m_\mu^2/m_K^2}{1 - m_\mu^2/m_\pi^2}\right]^2 \tag{8.54}$$

Det er nu nærliggende at forsøge at sætte $f_K \simeq f_\pi$, da vi venter, at $u\bar{s}$-bølgefunktionen i en K^+ er næsten den samme som $u\bar{d}$-bølgefunktionen i en π^+ (SU(3)-flavour-symmetri).

Da

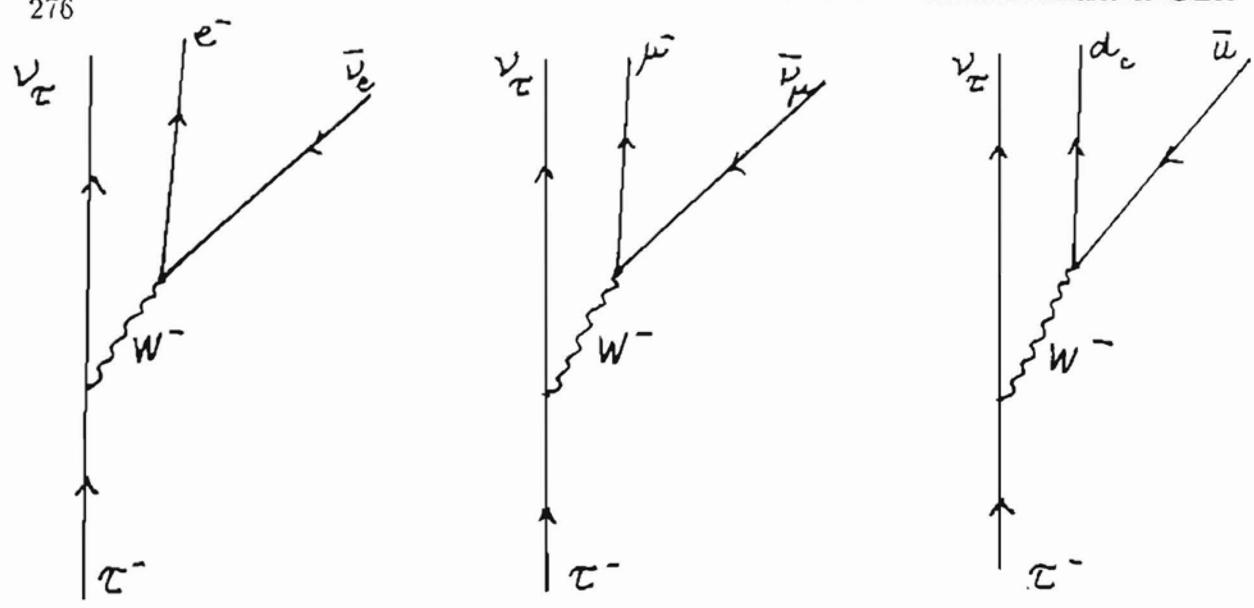
$$\Gamma(K - \mu) = \frac{0.635}{1.237 \times 10^{-8}\text{sek}}$$

og

$$\Gamma(\pi - \mu) = \frac{1}{2.603 \times 10^{-8}\text{sek}}$$

får vi heraf

$$tg\ \theta_C = 0.28 \quad \text{eller} \quad \sin\theta_C \simeq 0.27$$



Figur 8.11: Feynman-diagrammer for τ-henfald.

En tilsvarende, men langt mere kompliceret analyse af K_{e3}-henfaldet: $K^- \to \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$, samt af leptoniske baryonhenfald, viser sig at give anledning til en bestemmelse af Cabibbo-vinklen uden antagelsen $f_K \simeq f_\pi$. Resultatet er

$$\sin\theta_C = 0.221 \pm 0.002 \tag{8.55}$$

Med denne værdi kan svage leptoniske henfald af alle kendte hadroner forstås i betydelig detalje. Iflg. ovenstående betyder det så at f_K er en smule forskellig fra f_π, hvad der ikke kan forbavse. Værdien (8.55) giver os

$$f_\pi = 131.8 \pm 0.2 \text{ MeV} \tag{8.56}$$

en værdi, der stemmer kvalitativt med vores opfattelse af, at f_π er nært forbundet til $\psi(0)$, "pionens bølgefunktion", og dermed til pionens udstrækning.

8.6 τ-henfald

Idet vi antager, at τ-leptonen er ledsaget af sin egen masseløse neutrino, kan vi klassificere τ-henfald som følger:

$$\left.\begin{array}{l} \tau^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \\ \tau^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \\ \tau^- \to \text{hadroner} + \nu_\tau \end{array}\right\} \tag{8.57}$$

Med sin masse på $m_\tau = 1.784\ GeV$ (jfr. afsn 7.8) er τ-leptonen så tung, at vi kan negligere både m_e og m_μ. Vi vil endvidere negligere kvarkmasserne, hvilket er tilladeligt i hvert fald for u- og d-kvarkerne. Vi får så følgende "gratis" teori for forgreningsforholdene for (8.57), idet henfaldene foregår efter fig. (8.11) (tiden opad). Alle processer foregår efter præcist samme matrikselement, og faserummet er givet ved m_τ. For henfald til hadroner må vi antage, at konverteringen fra kvarker til hadroner foregår med sandsynligheden 1. Vi negligerer mulighed for produktion af $(s_c\bar{c})$-kvarkparret, da charmkvarken er lige så tung som τ-leptonen. Imidlertid forekommer hvert kvarkpar i *3 farver*. Vi får derfor for forgreningsforholdene

$$B(\tau \to e) : B(\tau \to \mu) : B(\tau \to \text{hadroner}) = \frac{1}{5} : \frac{1}{5} : \frac{3}{5} \tag{8.58}$$

Vi har tidligere set, at produktionshyppigheden for $\tau^+\tau^-$ er kendt i e^+e^--stød. For at måle forgreningsforholdene behøver man derfor blot at optælle antal begivenheder med henholdsvis elektroner, myoner og hadroner. Herved findes eksperimentelt

$$B(\tau \to e) \simeq B(\tau \to \mu) \simeq 17.8 \pm 0.4\% \tag{8.59}$$

og altså

$$B(\tau \to \text{hadroner}) \simeq 64\%$$

Dette er for det første i imponerende overensstemmelse med vores uhyre simple billede af $\tau \to$ hadroner $+\nu_\tau$, fig.(8.11) (c). For det andet viser QCD-regninger, at gluonudveksling mellem kvarkerne vil forøge amplituden, så at $B(\tau \to e) = B(\tau \to \mu)$ netop kommer ned på ca. 18% (!).

Vi kan nu også vurdere τ-leptonens levetid. Henfaldene til e og μ følger helt formlen for μ-henfald (8.41). Vi finder herved for levetiden af τ (som vi kalder τ_τ - undskyld!)

$$\tau_\tau^{-1} = \tau_\mu^{-1} \cdot \left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right)^5 \cdot 5 \tag{8.60}$$

eller

$$\tau_\tau = 3.2 \times 10^{-13}\text{sek}$$

svarende til, at en τ-lepton vil løbe ca. 10^{-2} cm, før den henfalder. Takket være Lorentz-tidsforlængelsen, løber leptonen dog længere med en faktor γ, som nemt kan blive 10. Det har herved været muligt at måle levetiden til

$$\tau_\tau = 3.08 \pm 0.08 \times 10^{-13}\text{sek}$$

i imponerende overensstemmelse med vores simple overslag.

Af fig.(8.11)(c) og ligning (8.46) kan vi videre slutte, at amplituden for produktion af $d\bar{u}$ forholder sig til amplituden for produktion af $s\bar{u}$ som $\cos\theta_C$ til $\sin\theta_C$. Heraf følger, at

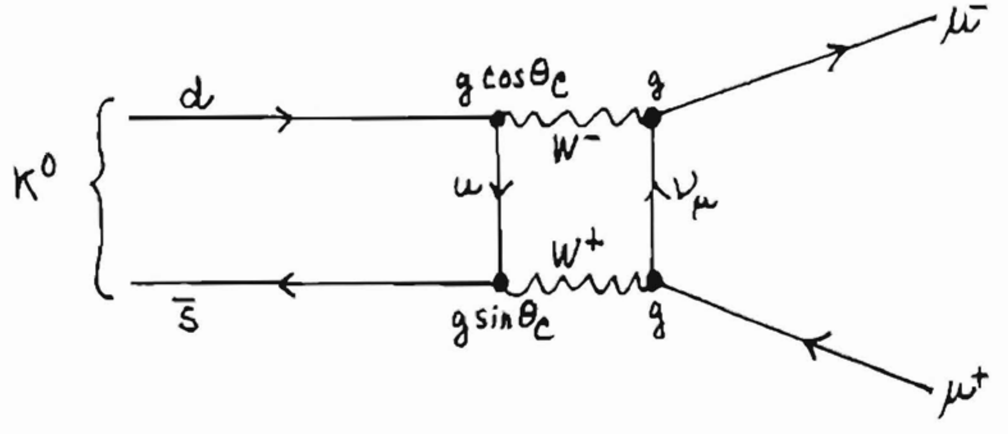
$$\frac{\Gamma(\tau \to K + X)}{\Gamma(\tau \to \pi + X)} \simeq tg^2\theta_C \simeq 5.6\%$$

i flot overensstemmelse med data, som giver $(6.0 \pm 0.4)\%$.

8.7 GIM-mekanismen. Forudsigelsen af charm-kvarken

I 1970 gjorde Glashow, Iliopoulos og Maiani opmærksom på, at en alvorlig vanskelighed ved at forstå henfaldet $K^0 \to \mu^+\mu^-$ kunne løses ved at postulere eksistensen af en ny kvark, c, som kobler som i (8.46).

Fig. (8.12) illustrerer problemet. Ifølge dette diagram burde henfaldet kunne ske.



Figur 8.12: Feynman-diagram for $K^0 \to \mu^+\mu^-$ under udveksling af u-kvark.

Lad os forsøge at give en heuristisk vurdering af styrken af en sådant henfald. Som tidligere nævnt går vi ud fra, at den svage Fermi-konstant G kan forstås som kvadratet på en fundamental koblingskonstant g, nært beslægtet med ladning (så $g^2 \sim e^2 \sim \alpha$). divideret med en W-propagatormasse M_W^2 : $G \sim \alpha/M_W^2$.

Vi ved, at for et rent leptonisk henfald af en pseudoskalar. har matrikselementet dimensionen af G (E^{-2}) på nær en bølgefunktionsfaktor. Vi finder altså for matrikselementet af fig. (8.12)

$$T \sim f_K \sin\theta_C \cos\theta_C \frac{g^4}{M_W^2} \sim f_K \sin\theta_C \cos\theta_C G \cdot \alpha$$

Faktoren $f_K \sin\theta_C \cdot G$ er fælles for alle "normale" K-henfald. og da θ_C er ret lille ($\cos\theta_C \simeq 1$), vil vi vente fra fig. (8.12), at forgreningsforholdet for $K^0 \to \mu^+\mu^-$ er af størrelsesordenen

$$B(K^0 \to \mu^+\mu^-) \sim \alpha^2 \sim 10^{-4} \tag{8.61}$$

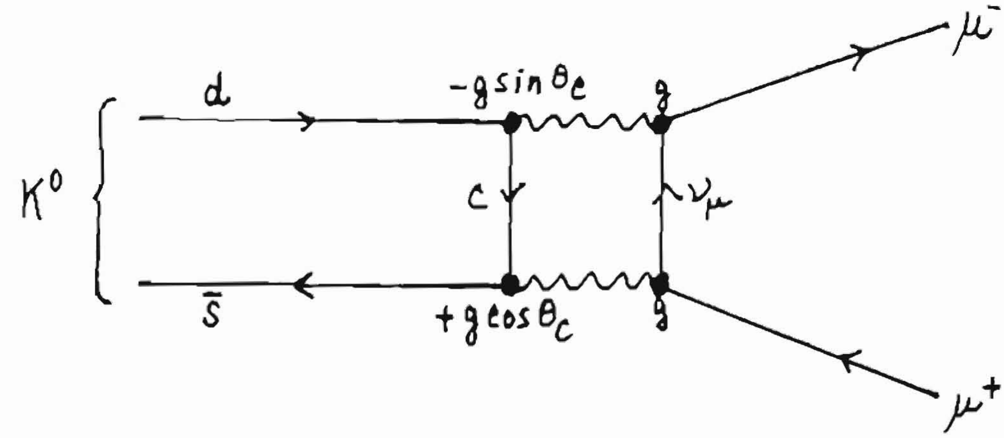
Eksperimentelt fandtes $B(K^0 \to \mu^+\mu^-) < 3 \times 10^{-7}$. Vi behøver ikke at nævne, at Glashow, Iliopoulos og Maiani gennemførte en mere omhyggelig beregning !

GIM-mekanismen beror på, at hvis vi postulerer eksistensen af en c-kvark med den i (8.46) foreskrevne kobling, skal vi også tage hensyn til diagrammet, fig. (8.13).

Det ses umiddelbart, at hvis u- og c-kvarkerne har samme masse. vil de to diagrammer hæve hinanden eksakt. GIM kunne endda sige, at hvis c-kvarkens masse var større end 2-3 GeV, ville kancellationen blive tilpas udvandet til, at vi igen kommer i vanskelighed med den lille værdi af $K^0 \to \mu^+\mu^-$.

Vi bemærker, at argumentet benytter eksistensen af kvarker og deres rolle i Feynmandiagrammer på en særdeles håndfast måde. Den omstændighed, at e^+e^--eksperimenter fra 1974-1977 kunne eftervise GIM's forudsigelser i utrolig detalje blev derfor et egentligt gennembrud både for kvark*modellen* men også for en overbevisning om, at de fundamentale vekselvirkninger virkelig kan beskrives simpelt ved hjælp af kvark*felter*.

Den mest ejendommelige egenskab ved GIM's charmkvark er, at dens Cabibbo-foretrukne henfald (det med $\cos\theta_C$ ikke $\sin\theta_C$) er $c \to s$ henfaldet, medens $c \to d$ henfaldet er Cabibbo-undertrykt (jfr. (8.46)). Charm-hadroner med svage henfald vil altså fortrinsvis indeholde strange partikler i deres henfaldsprodukter, i modsætning til hvad der gælder for de gode gammeldags hadroner uden c-kvarker.



Figur 8.13: Feynman-diagram for $K^0 \to \mu^+\mu^-$ under udveksling af c-kvark.

8.8 Løst og fast om charmpartikler

Det anbefales læseren at følge med i PDG tabellerne over partikler med charm-kvarker under den følgende diskussion.

(i) *Massen* af partikler med charm kan forstås i forbavsende detalje ved at tildele c, s og (u, d)-kvarkerne karakteristiske bidrag (jfr. tabel 4.1).

(ii) Charm *produceres* mest effektivt i e^+e^--eksperimenter ved en energi svarende til en resonanstop (charmoniumresonans) over charmtærsklen. Resonansen, $\psi(3770)$, umiddelbart over tærsklen er af særlig interesse, idet henfaldet stort set kun er til $D^0\overline{D}^0$ eller D^+D^-. Disse kan herved studeres. At charm især produceres gennem en charmoniumresonans er i overensstemmelse med, hvad vi venter efter OZI-reglen.

(iii) *Levetiden* af charmpartikler kan vi vurdere ved at behandle $c \to s$-henfaldet analogt til $\tau \to \nu_\tau$-henfaldet, idet vi antager, at de øvrige kvarker spiller en relativt passiv rolle i charmhenfaldet. Approksimationen $\cos^2\theta_C \cong 1$ (jfr. (8.55) og (8.46)) fører så som i (8.60) til

$$\tau_D = \frac{1}{5}\,\tau_\mu \left(\frac{m_\mu}{m_D}\right)^5 \sim 3 \cdot 10^{-13}\text{sek} \tag{8.62}$$

Emulsionseksperimenter har givet værdierne

$$\begin{aligned} \tau_{D^\pm} &= 10.6 \pm 0.3 \times 10^{-13}s \\ \tau_{D^0} &= 4.2 \pm 0.1 \times 10^{-13}s \end{aligned} \tag{8.63}$$

Afvigelsen (som er beskeden i betragtning af at vi har med et relativt indviklet hadronsystem at gøre) tilskrives gluon- og andre korrektioner.

(iv) Den omstændighed, at de observerede partikler overhovedet har henfald til kanaler med *leptoner*, viser, at der må være tale om partikler, som er stabile over for stærke henfald.

(v) Hvis man alligevel forsøgte at antage, at D-partiklerne "blot" er tunge anslåede K^*-mesoner (jfr. deres foretrukne henfald til $K\pi\ldots$), ville man komme i alvorlige vanskeligheder. Fig.(8.14) viser henfald af en K^{*+}-resonans, medens fig.(8.15) viser henfald af en D^+-meson.

Figur (8.14) viser, at en K^{*+} altid vil indeholde en K^+- eller en K^0-meson, da dens $\bar{s}$-kvark er uændret i det stærke henfald. Modsat vil en D^+ altid indeholde en *anti-K*-meson, idet D^+-mesonens c-kvark henfalder til en s-kvark (ikke en anti-s-kvark). Eksperimentelt ser man for eksempel aldrig henfaldet

$$D^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^- \qquad \text{(forbudt)}$$

men nok

$$D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$$

Vi ser, at sådanne henfald ville være helt uforklarlige uden c-kvarken.

(vi) Vi kan få en interessant hurtig vurdering af forgreningsforholdene for charm-kvarkhenfald ved at se på den del af den effektive vekselvirkning, som kan komme på tale:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\text{c-henfald}) &= \frac{G}{\sqrt{2}}[\cos\theta_C\bar{s}\gamma_\mu(1-\gamma_5)c - \sin\theta_C\bar{d}\gamma_\mu(1-\gamma_5)c] \\ &\times \{[\cos\theta_C\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d + \sin\theta_C\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)s] \\ &+ \sum_{l=e,\mu}\bar{\nu}_l\gamma^\mu(1-\gamma_5)l \quad + \text{h.c.}\}\end{aligned} \tag{8.64}$$

(jfr. (8.46), (8.16) og (8.20); vi bruger her den sædvanlige notation, hvor feltet hørende til en partikel noteres med partiklens navn). Af (8.64) kan vi aflæse den relative styrke for følgende overgangssandsynligheder:

$$\begin{aligned} c &\rightarrow su\bar{d} &:&\ 3\cos^4\theta_C \\ c &\rightarrow du\bar{d} &:&\ 3\cos^2\theta\sin^2\theta_C \\ c &\rightarrow su\bar{s} &:&\ 3\cos^2\theta\sin^2\theta_C \\ c &\rightarrow du\bar{s} &:&\ 3\sin^4\theta_C \\ c &\rightarrow sl^+\nu_l &:&\ \cos^2\theta_C \\ c &\rightarrow dl^+\nu_l &:&\ \sin^2\theta_C \end{aligned} \tag{8.65}$$

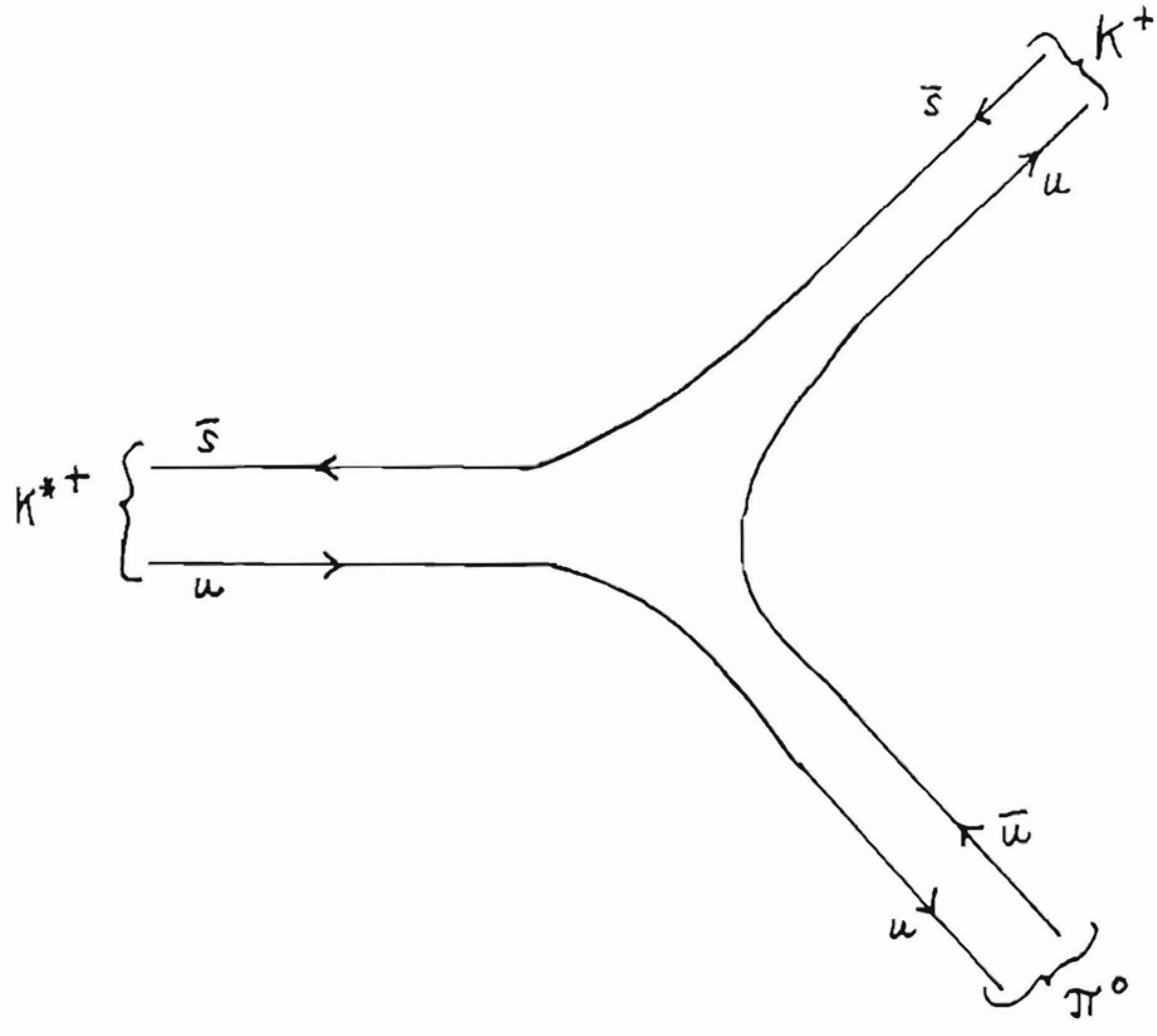
hvor $l = e, \mu$. Da $\sin\theta_C = 0.22$ og derfor $\sin^2\theta_C = 0.05$ og $\cos^2\theta_C = 0.95$, siger vi, at henfald med $\sin^2\theta_C$ og $\cos^2\theta_C$ er hhv Cabibbo-undertrykt og -favoriseret. Vi ser, at for charmpartikler er henfald til anti-strangepartikler[4] favoriseret og alle andre undertrykt. Dette yderst ejendommelige signal rummer essensen af GIM-mekanismen. Det er nu eksperimentelt bekræftet.

Hvis tallene (8.65) kan tages som udtryk for forholdet mellem forgreningsforholdene, venter vi (som for τ-henfald), at

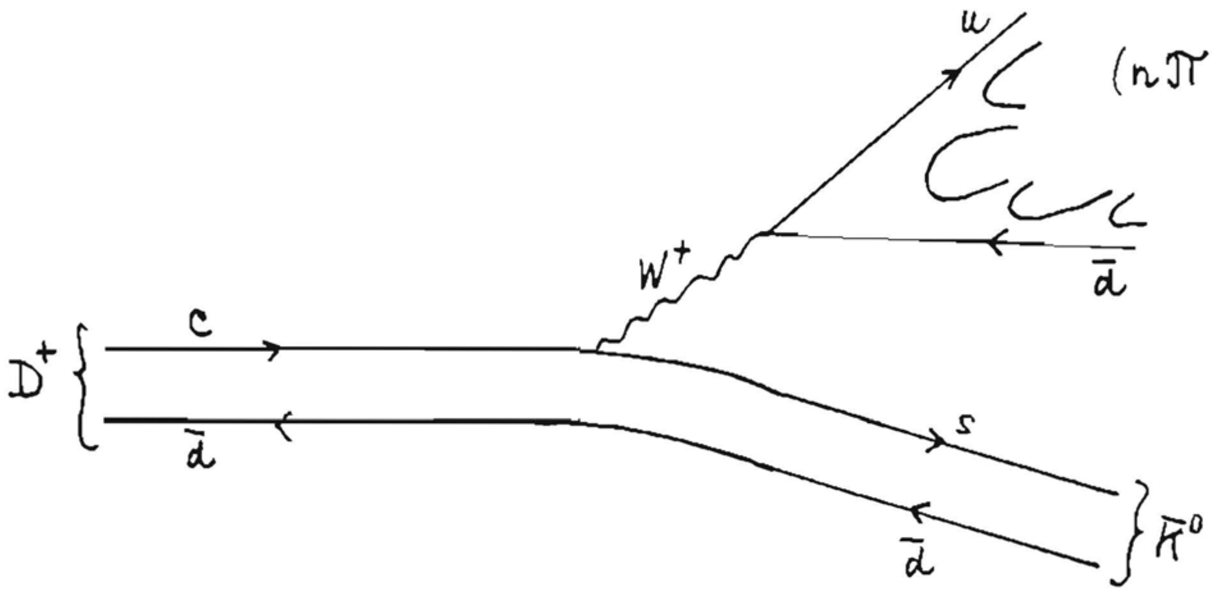
$$B_e = B_\mu \sim 20\%$$

Af PDG tabellerne ses, at dette passer fint for $D^\pm$, men at værdien snarere er 8% for D^0, men der er stadig god kvalitativ overensstemmelse.

[4]Sådanne, som indeholder en s-kvark og derfor har negative strangeness.



Figur 8.14: Kvark-diagram for K^{*+}-henfald.



Figur 8.15: Kvark-diagram for D^+-henfald.

8.9 Glashow-Salam-Weinberg-modellen

Den direkte 4-fermionvekselvirkning (8.16) kan ikke betragtes som en tilfredsstillende teori for de svage vekselvirkninger. Den involverer nemlig en koblingskonstant (G) med negativ dimension, og som tidligere fremhævet betyder dette, at teorien ikke er renormerbar.

Gennem 50'erne og 60'erne blev der gjort en lang række forsøg på at konstruerer fænomenologisk tilfredsstillende renormerbare teorier for de svage vekselvirkninger. Omkring 1970 skete et gennembrud, idet 't Hooft var i stand til at vise, at en klasse af gaugeteorier med såkaldt spontant symmetribrud var renormerbare. Gaugeteorier uden symmetribrud er utilfredsstillende, idet de lader de svage vekselvirkninger foregå under udveksling af gaugebosoner analoge til fotonen og gluonerne, og de er, som vi har set, *masseløse*. Dette er i skarp modstrid med strøm × strømformen (8.16), der svarer til udveksling af et uendeligt tungt objekt og som beskriver eksperimenter vedrørende svage vekselvirkninger ved lave energier.

Omkring midten af 60'erne blev man opmærksom på, at hvis man i en gaugeteori indførte en kobling til et *skalarfelt* (Higgs-felt), så var der mulighed for, at den laveste energitilstand (vacuumtilstanden) for passende parametervalg kunne blive *ikke*-gaugeinvariant, på trods af at Lagrangefunktionen *er* fuldt gaugeinvariant. I en sådan situation vil nogle (men ikke alle) af de oprindelige gaugebosoner opføre sig, som om de havde en masse.

Ved hjælp af denne Higgs-mekanisme kan man forsyne partikler med en dynamisk masse, som udelukkende er et resultat af, at vacuumtilstanden bryder gaugeinvarians. Lagrangefunktionen er stadig gaugeinvariant, og 't Hooft kunne vise, at dette var nok til at bevare teoriens renormerbarhed.

Allerede i 1961 havde Glashow foreslået den $SU(2) \otimes U(1)$-gaugemodel for svage *og* elektromagnetiske vekselvirkninger, som vi snart skal formulere, men han manglede Higgs-mekanismen, og hans arbejde vakte ikke større opmærksomhed. Det blev Weinberg og Salam, der gjorde opmærksom på nytten af denne, og i 1967 nedskrev Weinberg den fulde teori. Han kunne imidlertid ikke vise dens renormerbarhed, og først efter 't Hoofts arbejde fik modellen sit gennembrud.

Ved lave energier (dvs mindre end Z^0-massen på ca. 90 GeV) er den mest slående forudsigelse af teorien, som er blevet bekræftet, eksistensen af *neutrale strømme* med helt specificerede egenskaber. Hidtil har vi kun studeret svage vekselvirkninger formidlet af *ladede* strømme, som vi har betegnet med $W^\pm$, men i $SU(2) \otimes U(1)$-teorien findes svage overgange svarende til udveksling af en tung *neutral* boson kaldet Z^0. Sådanne strømme blev i 1973 observeret i Gargamelle boblekammeret i CERN i reaktioner af typen

$$\nu_\mu + \text{kerne} \rightarrow \nu_\mu + \text{hadroner} \tag{8.66}$$

en proces, der adskiller sig fra den "normale" ladede proces

$$\nu_\mu + \text{kerne} \rightarrow \mu^- + \text{hadroner} \tag{8.67}$$

ved *ikke* at indeholde en ladet lepton (μ^-) i sluttilstanden. Neutrinoen i sluttilstanden i (8.66) kan naturligvis ikke identificeres, men manglen på en μ^- sammen med en hadron-shower er et tydeligt signal.

$SU(2) \otimes U(1)$-teorien giver en lang række detaljerede forudsigelser om strukturen af disse neutrale strømme, og disse forudsigelser er så godt som alle blevet eksperimentelt efterprøvet (jfr. Nobelprisen i fysik for 1979 til Glashow, Salam og Weinberg).

Teoriens mest bemærkelsesværdige forudsigelser er dog kravet om eksistensen af vektorbosonerne $W^{\pm}$ og Z^0, også med nøje specificerede egenskaber. Efter at styrken af de neutrale, svage strømme var blevet målt, kunne disse masser forudsiges. $W^{\pm}$ og Z^0 blev fundet på CERN i 1983 i proton-antiprotoneksperimenter ganske som forudsagt, og siden 1989 er Z^0-bosonen blevet studeret i enorm detalje ved CERN's LEP-accelerator.

Vi skal nu udarbejde de simpleste træk ved denne $SU(2)\otimes U(1)$- model. Vi kan ikke i detalje her gøre rede for Higgs-fænomenet (ikke fordi det er svært at forstå - det kræver blot for meget plads). Vi skal især koncentrere os om *formen* for de svage strømme i modellen.

Vi begynder med på sædvanlig vis at konstruere en gaugeteori for *masseløse* fermioner, baseret på gruppen $SU(2)\otimes U(1)$. Valget af denne gruppe er ikke så simpel at argumentere for. Det er nok den enkleste gruppe, som kan reproducere de træk ved svage og elektromagnetiske vekselvirkninger, som vi kender. Men der er foreslået et utal af teorier baseret på andre grupper. De er idag eksperimentelt afkræftet stort set alle sammen, så vi nøjes med at studere gruppen $SU(2)\otimes U(1)$. Når vi har konstrueret teorien for masseløse fermioner og masseløse gaugebosoner, skal vi kort skitsere, hvorledes Higgs-fænomenet kan tildele nogle af partiklerne effektive masser.

Generatorerne for $SU(2)\otimes U(1)$ består dels af de tre generatorer $\vec{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ for $SU(2)$, dels af en generator, som vi kalder $\frac{1}{2}\mathcal{Y}$, for $U(1)$. Der gælder

$$\left.\begin{array}{rcl} [\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j] & = & i\,\varepsilon_{ijk}\mathcal{T}_k \\ [\mathcal{T}_i, \frac{1}{2}\mathcal{Y}] & = & 0 \end{array}\right\} \tag{8.68}$$

Vi betragter nu et sæt af fermionfelter ψ, som transformerer under $SU(2)\otimes U(1)$ efter en vis matriksrepræsentation. Den frie Lagrange-funktion er

$$\mathcal{L}_0 = \overline{\psi} i\ \partial\!\!\!/ \psi$$

som vi "gauger" til (jfr. kap. 6.2)

$$\mathcal{L}_F = \overline{\psi} i\ D\!\!\!\!/ \psi \tag{8.69}$$

hvor

$$D_\mu = \partial_\mu \mathbf{1} + \mathcal{A}_\mu \tag{8.70}$$

og hvor matriksfeltet $\mathcal{A}_\mu$ kan skrives (jfr. (6.64))

$$\mathcal{A}_\mu = -ig\ \mathbf{T}^a A^a_\mu - ig'\frac{1}{2}\mathbf{Y} B_\mu \tag{8.71}$$

Her er $\mathbf{T}^a$ $(a = 1,2,3)$ matricer svarende til $\mathcal{T}^a$ i den repræsentation, som Fermi-felterne ψ transformerer efter:

$$e^{-i\varepsilon^a \mathcal{T}^a}\psi_i\ e^{+i\varepsilon^a \mathcal{T}^a} = \left(e^{-i\varepsilon^a \mathbf{T}^a}\right)_{ij}\psi_j \tag{8.72}$$

$$e^{-i\varepsilon\frac{1}{2}\mathcal{Y}}\psi_i e^{+i\varepsilon\frac{1}{2}\mathcal{Y}} = e^{-i\varepsilon\frac{1}{2}Y}\psi_i \tag{8.73}$$

Fermi-felterne er nummereret af index i, og i en bestemt multiplet af $SU(2)$ har alle medlemmer samme værdi, $\frac{1}{2}Y$, af operatoren $\frac{1}{2}\mathcal{Y}$, da $\frac{1}{2}\mathcal{Y}$ kommuterer med $\mathcal{T}^a$ ((8.68)).

Gruppen $SU(2)$ betegnes *weak isospin* og generatoren $\frac{1}{2}\mathcal{Y}$ betegnes *weak hypercharge*.

Bemærk, at der i (8.71) optræder to koblingskonstanter: g for $SU(2)$ og g' for $U(1)$. I kap. 6 bemærkede vi den fundamentale egenskab ved gaugeteorier, at der kun er én koblingskontant for en *simpel* gruppe (kap. 6.4). Gruppen $SU(2) \otimes U(1)$ er ikke simpel, derfor de to koblingskonstanter.

Vi vil nu postulere, hvorledes de forskellige fermionfelter skal *transformere*.

Vi betragter leptonparret (ν_e, e^-) og kvarkparret (u, d_c). Andre lepton- og kvarkpar behandles identisk hermed. $SU(2)\otimes U(1)$- generatorerne antages at kommutere med $SU(3)_c$-colour generatorerne.

Først postulerer vi, at ladningsoperatoren Q er repræsenteret ved

$$Q = \mathbf{T}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{Y} \tag{8.74}$$

i enhver repræsentation.

Dernæst dekomponerer vi alle fermionfelter ψ i deres venstre- og højrehåndede komponenter

$$\psi = \psi_L + \psi_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi + \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \tag{8.75}$$

Det ejendommeligste træk ved teorien er, at vi vælger at lade ψ_L og ψ_R transformere *forskelligt* under gruppen. Måske er denne fremgangsmåde ikke så mærkelig endda. Vi har set, at for masseløse partikler er der ingen egentlig PoincarÜ-transformation, der forbinder højre og venstrehåndede tilstande, og i svage vekselvirkninger er der heller ingen paritetsinvarians, der kan komme til hjælp (jfr. afsn. 2.8).

Reglen er nu følgende:

alle højrehåndede felter transformerer som $SU(2)$-singletter;
alle venstrehåndede felter transformerer som $SU(2)$-dubletter.

Både

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}_L \tag{8.76}$$

har således svagt isospin $I = \frac{1}{2}$ og $I_3 = \pm\frac{1}{2}$.

Ved hjælp heraf og (8.74) kan vi nu angive alle kvantetal for disse fermioner:

<u>Tabel 8.2</u>

felt	I	I_3	Q	$Y = 2(Q - I_3)$
ν_R	0	0	0	0
l_R	0	0	-1	-2
u_R	0	0	2/3	4/3
d_R	0	0	- 1/3	- 2/3
ν_L	1/2	1/2	0	-1
l_L	1/2	- 1/2	-1	-1
u_L	1/2	1/2	2/3	1/3
d_L	1/2	- 1/2	- 1/3	1/3

Lad

$$\psi_L \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_L$$

være en venstrehåndet dublet (leptoner eller kvarker). Så er dens vekselvirkning med gaugebosonerne $\vec{A}_\mu$ og B_μ efter (8.69), (8.70) og (8.71) givet ved

$$g\overline{\psi}_L \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\not{A}}\psi_L + g' \frac{Y_L}{2} \overline{\psi}_L \not{B}\psi_L \tag{8.77}$$

idet isospinmatricerne i dubletrepræsentationen er givet ved Pauli-matricerne $\vec{\tau}$ (divideret med 2), medens $U(1)$-generatoren $\frac{1}{2}\mathcal{Y}$ er repræsenteret ved 2×2-enhedsmatricen multipliceret med tallet $\frac{1}{2}Y_L$ (jfr. nedre halvdel af tabel 8.2).

Lad tilsvarende ψ_R være et vilkårligt højrehåndet felt, så er dets vekselvirkning med gaugebosonerne givet ved

$$0 + g' \frac{Y_R}{2} \overline{\psi}_R \not{B} \psi_R \tag{8.78}$$

idet isospin-generatorerne er repræsenteret ved $\vec{T} \to (0, 0, 0)$, da de højrehåndede felter transformerer som isosingletter.

Lad os først betragte de ladningsændrende svage strømme, som vi allerede har studeret i betydelig detalje. Vi ser, at de kun optræder i forbindelse med de venstrehåndede strømme. Dette er i overensstemmelse med hvad vi ved, der bør gælde (i hvert fald for masseløse felter). Det er naturligvis grunden til, at ψ_R må vælges som en isosinglet.

Lad os skrive

$$\begin{aligned}\frac{\tau_1}{2}A^1_\mu + \frac{\tau_2}{2}A^2_\mu &= \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_1}{2} + i\frac{\tau_2}{2}\right)\left(A^1_\mu - iA^2_\mu\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_1}{2} - i\frac{\tau_2}{2}\right)\left(A^1_\mu + iA^2_\mu\right) \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\tau^+ W^+_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}}\tau^- W^-_\mu \end{aligned} \tag{8.79}$$

hvor vi har sat

$$W^\pm_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^1_\mu \mp iA^2_\mu) \quad \text{og} \quad \tau^\pm = \frac{\tau_1}{2} \pm i\frac{\tau_2}{2} \tag{8.80}$$

Nu er

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.81}$$

Vi får derfor for den ladningsændrende del af (8.77)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}g(\overline{\psi}_{1L} \not{W}^+ \psi_{2L} + \overline{\psi}_{2L} \not{W}^- \psi_{1L})$$

Da

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \quad \text{og} \quad \overline{\psi}_L = \frac{1}{2}\overline{\psi}(1 + \gamma_5)$$

og

$$\overline{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L = \frac{1}{4}\overline{\psi}(1 + \gamma_5)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\psi = \frac{1}{4}\overline{\psi}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)^2\psi = \frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\psi$$

har vi endelig for den ladningsændrende svage Lagrange-funktion

$$\frac{g}{2\sqrt{2}}(\overline{\psi}_1 \not{W}^+(1 - \gamma_5)\psi_2 \quad + \text{h.c.}) \tag{8.82}$$

som præcist har den form, vi har benyttet både i (8.22) og i (8.47). Specielt ser vi, at i vores gaugeteori *skal* koblingen være den samme (gauge-koblingskonstant) både for leptoner og for kvarker. Denne eksperimentelt set yderst ejendommelige universalitet er en karakteristisk konsekvens af at have en gaugeteori (jfr. diskussionen i afsn. 6.4).

Efter at vi således har overbevist os om, at modellen reproducerer, hvad vi har lært om den svage *ladningsændrende* strøm, ser vi nu på modellens mest karakteristiske forudsigelse: Strukturen af den *neutrale* svage og elektromagnetiske strøm.

Vi betragter et bestemt kvark- eller leptonfelt ψ, der kan være højre- eller venstrehåndet, men som har egenværdien I_3 og $\frac{1}{2}Y$, og altså ladning $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$.

Af (8.77) og (8.78) finder vi for vekselvirkningen af dette med de ikke-ladningsændrende gaugebosoner A_μ^3 og B_μ :

$$gI_3\overline{\psi}\,\not{A}^3\psi + g'(Q - I_3)\overline{\psi}\,\not{B}\psi \tag{8.83}$$

Vi indfører nu en ny notation, hvis betydning snart vil fremgå. Først definerer vi Weinberg-vinklen θ_W ved

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad , \quad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{8.84}$$

Dernæst definerer vi følgende linearkombinationer af A_μ^3 og B_μ :

$$Z_\mu \equiv \sin\theta_W B_\mu - \cos\theta_W A_\mu^3 \quad ; \quad A_\mu \equiv \cos\theta_W B_\mu + \sin\theta_W A_\mu^3 \tag{8.85}$$

eller

$$A_\mu^3 = \sin\theta_W A_\mu - \cos\theta_W Z_\mu \quad ; \quad B_\mu = \cos\theta_W A_\mu + \sin\theta_W Z_\mu$$

Når disse udtryk indsættes i (8.83), får vi, ved at bruge (8.84)

$$g\sin\theta_W Q\overline{\psi}\,\not{A}\psi + \frac{g}{\cos\theta_W}(Q\sin^2\theta_W - I_3)\overline{\psi}\,\not{Z}\psi \tag{8.86}$$

Dette udtryk frister os til at identificere A_μ-feltet (8.85) med det *sædvanlige elektromagnetiske fotonfelt!* Der er to grunde hertil: For det første er koblingen proportional med partiklens elektriske ladning, og for det andet har vi (derfor) nøjagtig samme kobling for højrehåndede som for venstrehåndede felter. Betragter vi derfor *summen* af A_μ's kobling til både de højre- og venstrehåndede frihedsgrader af et bestemt felt, får vi

$$g\sin\theta_W\cdot Q[\overline{\psi}_L\,\not{A}\psi_L + \overline{\psi}_R\,\not{A}\psi_R]$$

men

$$\begin{aligned}\overline{\psi}_L\gamma_\mu\psi_L + \overline{\psi}_R\gamma_\mu\psi_R &= \frac{1}{4}\overline{\psi}(1+\gamma_5)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi + \frac{1}{4}\overline{\psi}(1-\gamma_5)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi \\ &= \frac{1}{4}\overline{\psi}\gamma_\mu(1-\gamma_5)^2\psi + \frac{1}{4}\overline{\psi}\gamma_\mu(1+\gamma_5)^2\psi \\ &= \frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi + \frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi \end{aligned} \tag{8.87}$$

Vi ser altså, at A_μ-feltet kobler præcist som fotonfeltet: Ligeligt til højre- og venstrehåndede komponenter og derfor til den sædvanlige 4-strøm.

Heraf følger også, at

$$g\sin\theta_W = e \tag{8.88}$$

Feltet Z_μ derimod kobler *uens* til højre- og venstrehåndede komponenter på grund af I_3-afhængigheden. Imidlertid kobler Z_μ både til højre- og venstrehåndede komponenter i modsætning til $W_\mu^\pm$, der *kun* kobler til de venstrehåndede.

8.9.1 Higgs-mekanismen

Lad os til sidst gøre nogle enkle bemærkninger om Higgs-mekanismen, som på indirekte måde tildeler masser til visse af partiklerne. Vores diskussion forløber som om felterne var *klassiske felter*. En fuldstændig behandling af den kvantiserede teori er ganske kompliceret.

Lad os først betragte en simpel feltteorimodel for et neutralt skalarfelt:

$$\mathcal{L}_G(\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \tag{8.89}$$

For et *frit* skalarfelt har vi set, at $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$, hvor m^2 er massen af partiklerne i den kvantiserede teori. Vi ønsker nu at studere mere generelle former for $V(\phi)$. Først bemærker vi, at for en felt-konfiguration, hvor

$$\phi(\vec{x}, t) = \text{konstant} = \phi_0 \quad \text{uafhængig af } \vec{x} \text{ og } t$$

er Hamilton-tætheden

$$\mathcal{H}(\phi_0) = +V(\phi_0)$$

For sted- og tidsafhængige felter kommer der *positive* ekstraled hertil (øvelse). Den feltkonfiguration, der svarer til *vacuumtilstanden* er den, hvor $\mathcal{H}$ har den lavest mulige værdi. For $V(\phi_0) = \frac{1}{2}m^2\phi_0^2$ svarer det til $\phi = 0$: Vacuum er den tilstand, hvor feltet er 0, - ikke særligt overraskende.

Men lad os nu betragte en teori, hvor

$$V(\phi) = \lambda(\phi^2 - v^2)^2 \quad , \quad \lambda, \ v > 0 \tag{8.90}$$

Så er vacuumtilstanden den feltfiguration, hvor

$$\phi = \text{konstant} = \pm v \neq 0 \quad (!)$$

Vi siger, at feltet har vacuumforventningsværdien $\pm v$ (som et første skridt i retning af en kvantiseret teori).

Vi kan nu se, at et felt ψ, der kobler til Higgs-feltet ϕ efter en kobling af formen

$$g\overline{\psi}\psi\phi \tag{8.91}$$

vil have en "induceret effektiv masse" af størrelsen m, hvor

$$m\overline{\psi}\psi \sim g\overline{\psi}\psi v$$

eller

$$m \sim g \cdot v \tag{8.92}$$

I forbindelse med $SU(2)\otimes U(1)$-modellen for svage og elektromagnetiske vekselvirkninger må vi erstatte (8.89) med en form, som er invariant under $SU(2)\otimes U(1)$. Den *simpleste* mulighed, som vi her kun vil behandle, består i at benytte en kompleks isodublet

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(0)} \end{pmatrix} \tag{8.93}$$

hvor $\phi^{(+)}$ henholdsvis annihilerer og skaber kvanter φ^+ og φ^-, medens $\phi^{(0)}$ henholdsvis annihilerer og skaber kvanter φ^0 og $\overline{\varphi}^0$ (omvendt for $\phi^\dagger = (\phi^{(+)\dagger}, \phi^{(0)\dagger})$). Egenværdien $\frac{1}{2}Y$ vælges, så $\varphi^\pm$ og φ^0 får elektrisk ladning ± 1 og 0.

Den kinetiske del af Higgs-Lagrange-funktionen har så formen

$$\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \tag{8.94}$$

hvortil kommer et "potentialled" (jfr. (8.89)) $V(\phi)$, som gør vacuumforventningsværdien af det neutrale felt $\phi^{(0)}$

$$\langle 0|\phi^{(0)}|0\rangle = v > 0$$

Idet vi "gauger" (8.94) samt indskrænker os til ikke-exciterede tilstande af ϕ :

$$\phi \sim \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

(for hvilke $\partial_\mu \phi \equiv 0$) får vi

$$\phi^\dagger \left(ig\,\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu + ig'\frac{Y}{2}B_\mu \right) \left(-ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}^\mu - ig'\frac{Y}{2}B^\mu \right) \phi$$

hvor $\frac{1}{2}Y = Q - I_3 = +\frac{1}{2}$, og hvor $\frac{1}{2}\vec{\tau}$ er dubletrepræsentationen for $\vec{\tau}$. Som i (8.79) får vi så

$$\begin{aligned} & (0, v)[\frac{ig}{\sqrt{2}}(\tau^+ W_\mu^+ + \tau^- W_\mu^-) + \frac{ig}{2}\tau_3 A_\mu^3 + i\frac{g'}{2}B_\mu] \\ \times \quad & [-\frac{g}{\sqrt{2}}(\tau^+ W^{+\mu} + \tau^- W^{-\mu}) - \frac{ig}{2}\tau_3 A^{3\mu} - i\frac{g'}{2}B^\mu] \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ = \quad & v^2 \left\{ \frac{g^2}{2} W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{4}(g'B_\mu - gA_\mu^3)^2 \right\} \end{aligned} \tag{8.95}$$

som viser, at Higgs-koblingen har tildelt en masse til $W^\pm$-feltet og til feltet

$$g'B_\mu - gA_\mu^3 = \sqrt{g^2 + g'^2}\,[\sin\theta_W B_\mu - \cos\theta_W A_\mu^3] = \sqrt{g^2 + g'^2}\; Z_\mu$$

jfr. (8.85).

Derimod er der *ikke* noget masseled for fotonfeltet

$$A_\mu = \cos\theta_W B_\mu + \sin\theta_W A_\mu^3 \propto gB_\mu + g'A_\mu^3$$

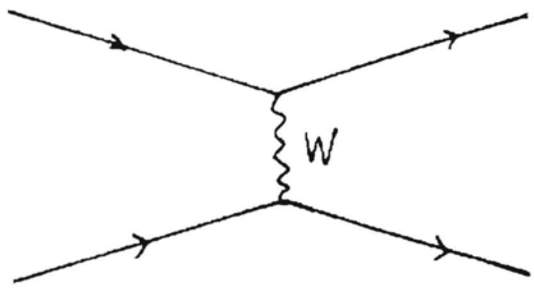
Vi ser, at Higgs-koblingen præcist har udført, hvad vi ønskede: Teoriens masseløse gaugepartikler er erstattet af en masseløs foton samt af massive partikler $W^\pm$ og Z^0.

Normale masseled for disse partikler ville give følgende bidrag til Lagrange-funktionen (jfr. (8.80))

$$-\left(\frac{1}{2}M_{Z^0}^2 Z_\mu Z^\mu + M_W^2 W_\mu^- W^{+\mu} \right)$$

Ved at sammenligne med (8.95) får vi så

$$\begin{aligned} M_{Z^0}^2 &= \frac{v^2}{2}(g^2 + g'^2) \\ M_W^2 &= \frac{v^2}{2}g^2 \end{aligned} \tag{8.96}$$



Figur 8.16: W-udveksling i 4-fermion vekselvirkning.

eller

$$\frac{M_Z}{M_W} = \frac{1}{\cos\theta_W} > 1 \tag{8.97}$$

Vi nævner uden bevis (se dog kap. 9), at propagatoren for en massiv vektorboson med masse M_W og 4-impuls k er

$$D_W^{\mu\nu}(k^2) = \frac{i}{k^2 - M_W^2}\left(\frac{k^\mu k^\nu}{M_W^2} - g^{\mu\nu}\right) \tag{8.98}$$

For den effektive 4-fermionvekselvirkning får vi så af (8.82) og (8.98) efter fig.(8.16)

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{M_W^2} = \frac{g^2}{8M_Z^2\cos^2\theta_W} \tag{8.99}$$

idet $k^\mu k^\nu$-leddet i (8.98) giver 0 via Dirac-ligningen for de ydre fermioner.

Indsættes (8.88) får vi (jfr. (8.18))

$$M_W^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}\sin^2\theta_W G} = \frac{e^2}{4\sqrt{2}\sin^2\theta_W G} = \frac{g^2}{4\sqrt{2}G} \tag{8.100}$$

Måling af styrken af den neutrale svage strøm (afsn. 8.10 og kap. 10) har givet

$$\sin^2\theta_W \simeq 0.23 \tag{8.101}$$

Heraf får vi

$$M_W \simeq 78\text{GeV} \qquad M_{Z^0} \simeq 89\text{GeV} \tag{8.102}$$

i god overensstemmelse med de eksperimentelle værdier, se afsn. 8.11. Disse sidste ligger få GeV højere, men når diverse strålingskorrektioner omhyggeligt indregnes, bliver overensstemmelsen mellem teori og eksperiment helt perfekt.

Hermed er hele teorien fastlagt, hvad angår sædvanlige vekselvirkninger.

Det er i princippet en ganske kompliceret teori: Foruden at indeholde sædvanlige svage- og elektromagnetiske vekselvirkninger findes alle mulige vekselvirkninger mellem Higgs-felter og fermioner og vektorbosoner, mellem vektorbosoner og fotoner indbyrdes, og mellem Higgs-mesoner indbyrdes.

8.10 Svage, neutrale strømme

$SU(2) \otimes U(1)$-modellens succes ved lave energier beror på, at den ved hjælp af den *ene* parameter $\sin^2\theta_W$, har kunnet beskrive et meget betydeligt eksperimentelt materiale vedrørende sådanne svage vekselvirkninger, hvor der ikke udveksles elektrisk ladning mellem lepton- og hadronsiden.

I løbet af 60'erne opstod der en vis formodning om, at svage neutrale strømme slet ikke eksisterede. Formodningen var især baseret på den meget lille værdi af forgreningsforholdet for $K^0 \to \mu^+\mu^-$ (jfr. kap. 8.7), som viste, at der måtte være tale om en *2.ordens* svag proces, hvor *to* ladede strømme tilsammen giver ladningsudveksling nul.

I $SU(2) \otimes U(1)$-modellen er der, som vi har set, svage neutrale strømme til stede, men de er fuldstændigt *flavour-diagonale*, dvs at en proces som $K^0 \to \mu^+\mu^-$ ikke finder sted (i 1.orden), da den involverer en udveksling af flavour (strangeness) mellem K^0-mesonens $\bar{s}$- og d-kvarker. I udtrykket (8.86) for Z^0-koblingen ser vi, at det er det samme felt, der står på hver side af Z^0. Dette er i modsætning til koblingen (8.82) for de ladede strømme.

Den omstændighed gør det vanskeligt at studere neutrale strømme. En π^0-meson kan ganske vist henfalde svagt via en Z^0 (π^0'en består af $u\bar{u}$ og $d\bar{d}$), men den kan jo netop derfor også henfalde elektromagnetisk, og da $\alpha \gg Gm_\pi^2$, er det elektromagnetiske henfald fuldstændigt dominerende.

De eneste svage, neutrale processer, som *ikke* kan domineres af elektromagnetiske, er *neutrino*-reaktioner. Med en enkelt (meget vigtig) undtagelse stammer al vor viden om neutrale strømme fra sådanne neutrinoreaktioner. Vi skal i kap. 10 beskæftige os i detalje med, hvorledes de kan analyseres i kvark-partonmodellen. Her vil vi blot nævne hvilke reaktioner, der har været studeret, og hvorledes resultatet stemmer med $SU(2) \otimes U(1)$-modellen.

Problemet med neutrinofysik er det utroligt lille tværsnit, som disse reaktioner har. Amplituden indeholder en faktor $G \sim 10^{-5} \times m_p^{-2}$, og tværsnittet derfor en faktor G^2. Da imidlertid tværsnittet har dimension af en længde kvadreret $\sim$ (energi)$^{-2}$, må det totale, invariante neutrinotværsnit være af formen

$$\sigma_T \sim s \cdot G^2$$

hvor s er kvadratet på den invariante tyngdepunktsenergi. Betragter vi et eksperiment, hvor neutrinoer (produceret via henfaldende π- og K-mesoner) med energi E i laboratoriet rammer en targetpartikel med masse m, så er

$$s = (E + m;\ \ 0, 0, E)^2 = 2Em + m^2 \simeq 2Em$$

og derfor

$$\sigma_T(\text{neutrino}) \sim E \cdot m \cdot G^2 \tag{8.103}$$

Denne form er kun gyldig ved (c.m.)-energier, der er lave i forhold til Z- og W-masserne. Vi ser det meget karakteristiske forhold, at tværsnittet vokser lineært med laboratorieenergien. Denne opførsel er testet med stor nøjagtighed, og man kan heraf slutte, at Z- og W-masserne må være større end ca. 20 GeV, hvilket er langt under værdierne (8.102).

Lad os vurdere tværsnittet (8.103) numerisk, idet vi sætter $G \sim 10^{-5} m_p^{-2}$ og betragter $\nu + p$-spredning:

$$\sigma_T \sim \left(\frac{E}{m_p}\right) \cdot m_p^{-2} \times 10^{-10}$$

Faktoren m_p^{-2} er, hvad vi har for et typisk *hadron*tværsnit (som er geometrisk). Neutrinotværsnittet er altså mindre end hadron-tværsnittet med faktoren

$$\frac{E}{m_p} \cdot 10^{-10}$$

For neutrinoer med $E \sim$ MeV og $E/m_p \sim 10^{-3}$, som vi har i kernereaktioner, er det tydeligvis næsten håbløst at studere deres tværsnit. Ved moderne acceleratorer har vi imidlertid $E/m_p \sim 10 - 200$, og ved at benytte meget store targets (mange hundrede tons jern !) er det muligt at studere neutrinoreaktioner i ganske imponerende detalje.

Vi ser også af (8.103), at tværsnittet for $\nu + e$-spredning er mindre end tværsnittet for $\nu + p$-spredning med en faktor $m_e/m_p \sim 1/2000$.

Som tidligere forklaret (kap. 8.5) henfalder K- og π-mesoner så godt som kun til μ-neutrinoer. I praksis er det derfor kun μ-neutrino- (og antineutrino-) beams, der kan produceres med høj energi. Ved lave energier (få MeV) kan meget intense e-neutrinobeams fås fra kommercielle eller eksperimentelle kernereaktorer.

De eksperimenter, som er udført, er

$$\left.\begin{array}{llr} \nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^- & & (a) \\ \overline{\nu}_\mu + e^- \to \overline{\nu}_\mu + e^- & & (b) \\ \nu_\mu + u \to \nu_\mu + u & \nu_\mu + d \to \nu_\mu + d & (c) \\ \overline{\nu}_\mu + u \to \overline{\nu}_\mu + u & \overline{\nu}_\mu + d \to \overline{\nu}_\mu + d & (d) \end{array}\right\} \quad (8.104)$$

hvor u og d betegner u- og d-kvarker. Vi udsætter til kapitel 10 at forklare nærmere, hvorledes neutrino-kvark-vekselvirkningen bestemmes, men idéen er selvfølgelig at skyde neutrinoer ind på de kvarker, der ligger inde i kernens protoner og neutroner. Ved de høje energier, vi har med at gøre, er neutrinobølgelængden 10–100 gange mindre end protondiameteren, så idéen (sammenholdt med forestillingen om asymptotisk frihed) forekommer fornuftig.

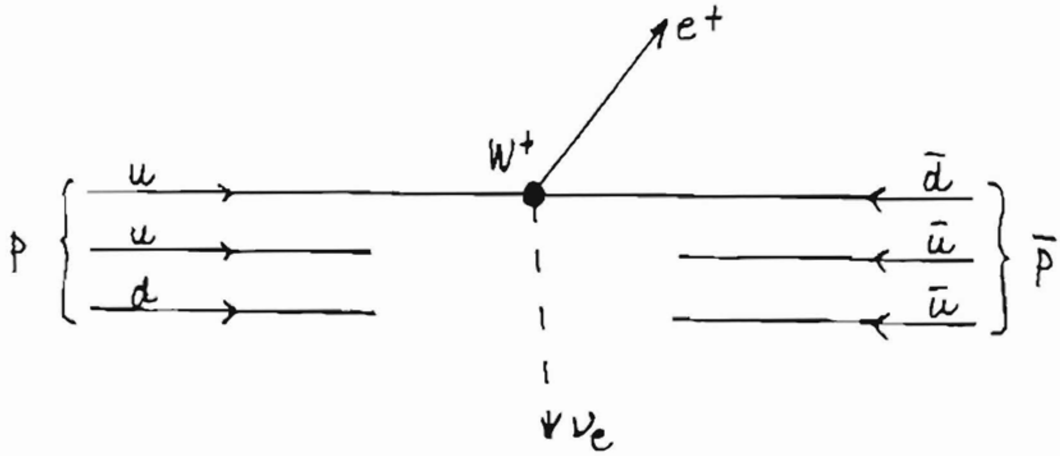
Det afgørende signal i alle disse eksperimenter er forekomsten af en sluttilstand *uden en ladet myon*. Processerne (a) og (b) udføres typisk i et boblekammer, og begivenheden registreres ved, at et elektronspor "pludselig" kommer til syne "ud af ingenting". I (c) og (d) ses en hadronshower, men ingen myon. I de store eksperimenter med jernblokke vekslende med tællerudstyr er det meget nemt at se forskel på hadroner og myoner: De sidste kan løbe gennem hele target's 20 m, medens hadronerne ikke løber mere end 0.5–1 m, før de absorberes.

Det sidste og meget smukke eksperiment, vi vil nævne, er af typen

$$e^- + (u, d) \to e^- + (u, d) \qquad (8.105)$$

Denne proces er selvfølgelig helt domineret af den elektromagnetiske fotonudveksling, men man benytter sig nu af, at de neutrale strømme har forskellig styrke for højre og for venstrehåndede elektroner. Hvis de neutrale strømme havde haft samme struktur som de ladede, ville der overhovedet kun ske vekselvirkning med de venstrehåndede elektroner, og koblingen til den højrehåndede ville være nul. Af (8.86) ser vi, at dette i $SU(2) \otimes U(1)$-modellen kun vil være tilfældet, hvis $sin^2\theta_W = 0$. Under alle omstændigheder opfører de elektromagnetiske kræfter sig *ens* over for højre- og venstrehåndede elektroner.

Eksperimentet er blevet muligt, efter at man ved SLAC har været i stand til at producere *polariserede* elektronbeams. Man studerer så *forskellen* i tværsnittet for højre- og venstrehåndede elektroner. Denne forskel kan kun hidrøre fra de svage, neutrale strømme.



Figur 8.17: W-produktion i $p\overline{p}$-kollisioner.

Vi ser, at der er mange slags eksperimenter, hvor neutrale strømme har kunnet undersøges. At disse *alle* har kunnet beskrives af $SU(2) \otimes U(1)$-modellen blot ved at justere den ene frie parameter $\sin^2 \theta_W$, er en triumf for modellen.

Resultatet er (1992)

$$\sin^2 \theta_W = 0.230 \pm 0.006 \tag{8.106}$$

En endnu bedre bestemmelse fås fra masserne af $W^\pm$ og Z^0. Herved skal fremhæves, at for overhovedet at kunne definere Weinbergvinklen til denne nøjagtighed, må en række strålingskorrektioner medtages. Men sådanne kvantekorrektioner giver anledning til, at de *effektive* eller *renormerede* parametre får en logaritmisk energiafhængighed, ganske som vi så for den stærke finstrukturkonstant: "The running coupling constant". Derfor må man fortælle ved hvilken (invariant) energi, Weinbergvinklen opgives. Det drejer sig selvfølgelig her om Z^0-massen selv. Resultatet er (1992)

$$\sin^2 \theta_W = 0.230 \pm 0.003 \tag{8.107}$$

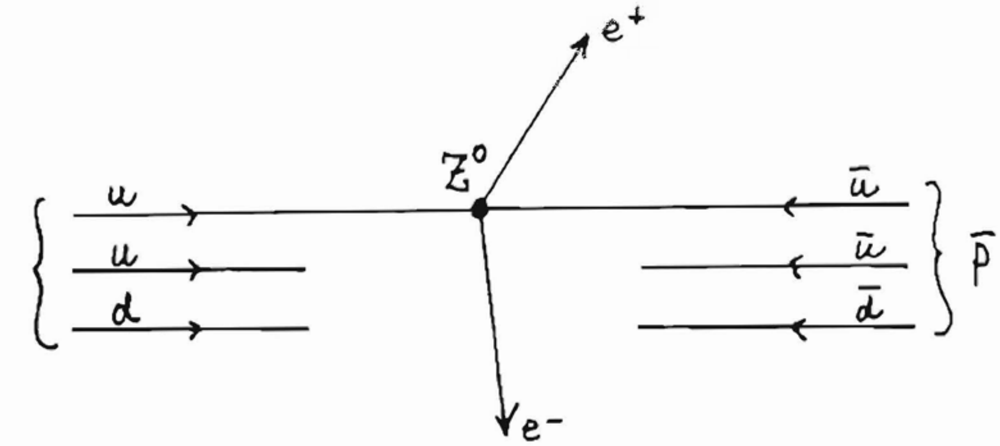
8.11 Den eksperimentelle opdagelse af W^+ og Z^0 bosonerne

Nobelprisen i fysik for 1984 gik til S. van der Meer og C. Rubbia for deres indsats ved udviklingen af det CERN-eksperiment baseret på et højenergetisk antiprotonbeam, som i 1983 førte til opdagelsen af $W^\pm$- og Z^0-partiklerne og dermed til en særdeles overbevisende efterprøvning af GSW-teorien. Her skal idéen i eksperimentet kort skitseres.

Fig. (8.17) og (8.18) viser eksempler på, hvad der sker i en $p\overline{p}$-kollision, der fører til $W^\pm$- eller Z^0-produktion.

Delprocesserne er altså

$$u + \overline{d} \to W^+ \to e^+ + \nu_e$$
$$\overline{u} + d \to W^- \to e^- + \overline{\nu}_e$$



Figur 8.18: Z^0-produktion i $p\overline{p}$-kollisjoner.

$$\begin{aligned} u+\overline{u} &\to Z^0 \to e^+ + e^- \quad (\text{eller}\ \ \mu^+ + \mu^-) \\ d+\overline{d} &\to Z^0 \to e^+ + e^- \quad (\text{eller}\ \ \mu^+ + \mu^-) \end{aligned} \tag{8.108}$$

Det første års eksperimentelle indsats resulterede for de to gruppers (UA1 og UA2)'s vedkommende i sammenlagt ca. $100 W^{\pm}$-begivenheder og $10 - 15 Z^0$-begivenheder.

Lad os se en lille smule nærmere på de eksperimentelle enkeltheder. Det omtalte antal $W^{\pm}$ og Z^0 partikler var resultatet af at analysere ca. $10^{10} p\overline{p}$-kollisioner. Dette tal viser, dels at eksperimentet i ekstrem grad er afhængig af meget avanceret dataanalyse, dels at der behøves et meget intenst antiprotonbeam. Endelig skal energien være så høj, at de tunge partikler kan produceres. I kap. 10 skal vi se, at en kvark i en proton typisk har 1/6 af protonens energi. Altså vil vi behøve modsat rettede beams af protoner og antiprotoner på hver ca.

$$6 \times \frac{1}{2} M_{Z^0} \simeq 280\text{GeV}$$

hvilket ca. var den anvendte energi.

Det er derfor klart, at man måtte anvende CERN's store SPS-accelerator som en lagerringsmaskine. Hovedproblemet var at få et tilstrækkeligt intenst antiprotonbeam. Dette blev muligt takket være en bemærkelsesværdig ny acceleratorteknisk idé kaldet stokastisk afkøling opfundet af van der Meer.

På CERN foregik $\overline{p}$-produktionen kort fortalt på følgende måde:

Ca. hvert 3. sekund sendtes et 26 GeV protonbeam fra CERN's gamle PS-accelerator ind i en metalplade. Resultatet er et enormt antal sekundærpartikler, hvoraf nogle få er antiprotoner. De $\overline{p}$-partikler, der har energi omkring 3.5 GeV samt en passende retning, opsamles. Dette giver én $\overline{p}$ pr. $4 \cdot 10^6$ protoner. Efter et døgn (30 000 PS-pulser) fås ca. 10^{11} antiprotoner, der er opsamlet i et cirkulerende beam i en speciel lille akkumulatorlagerring (AA). De 10^{11} $\overline{p}$-partikler er uanvendelige som beam, da deres energier og impulser trods alt er for forskellige.

Ideen i stokastisk afkøling er nu at forbedre (nedkøle) beamet. Dette foregår gennem en statistisk måling af impulsfordelingen. Resultatet af målingen sendes (med lyshastighed) tværs over AA-ringen, hvortil $\overline{p}$'erne netop endnu ikke er kommet, men hvor de "sparkes" på plads af passende elektromagnetiske felter, hvis virkning afhænger af målingen. Ved at gentage denne proces et stort antal gange opnås beamforbedringer med en faktor 10^9.

Det nedkølede beam vendes, sendes tilbage i PS'en, accelereres til 26 GeV, sendes til SPS'en og accelereres til 270 GeV. Tilsvarende behandles et protonbeam, der løber den modsatte vej rundt i SPS'en (som nu er blevet en SP$\overline{P}$S).

Pointen ved $W^{\pm}$ og Z^0-henfaldene i (8.108) er ikke, at de er de hyppigste, men at de giver det reneste eksperimentelle signal på grund af elektronerne, der giver karakteristiske signaler i de elektromagnetiske "shower counters".

I tilfælde af Z^0-partiklerne kan deres masser direkte konstrueres, når 4-impulserne af e^+ og e^- (eller μ^+ og μ^-) er målt. For W-henfaldene er situationen kompliceret af, at neutrinoen ikke detekteres. I dette tilfælde er det karakteristiske signal: (i) tilstedeværelsen af en enkelt energirig lepton, og (ii) mangel på en stor portion 4-impuls, efter at alle synlige partiklers 4-impuls er målt.

Det skal fremhæves, at analysen af eksperimentet i øvrigt er ekstremt kompliceret, men $W^{\pm}$ og Z^0-begivenhederne er set på overbevisende måde af begge grupper; masseværdierne fandtes at være

$$\text{UA1:} \quad M_W = 80.9 \pm 2.8 \text{ GeV}/c^2 \quad , \quad M_Z = 96.6 \pm 3.3 \text{ GeV}/c^2$$

$$\text{UA2:} \quad M_W = 81.0 \pm 2.8 \text{ GeV}/c^2 \quad , \quad M_Z = 91.2 \pm 2.1 \text{ GeV}/c^2$$

i overensstemmelse med teorien, lign. (8.102).

Siden 1989 har CERN's LEP accelerator fungeret som en fabrik til masseproduktion af Z^0 partikler. Det observerede antal det første par år er over to millioner. Herved kan langt mere nøjagtige resultater opnås. Masseværdier (1992) er

$$M_W = 80.6 \pm 0.4 \text{ GeV}/c^2 \quad , \quad M_Z = 91.18 \pm 0.03 \text{ GeV}/c^2$$

8.12 Sammenfatning og fremtidsmusik

Lad os forsøge kort at opsummere Standardmodellens billede af strukturen af de stærke, svage og elektromagnetiske vekselvirkninger, som vi har behandlet dem i vores teoretiske ramme i dette kursus. Samtidigt angiver vi de vigtigste kvantetal og egenskaber i øvrigt for "byggestenene".

Når bortses fra de gravitationelle vekselvirkninger, kan de øvrige tilsyneladende beskrives ved en gaugeteori baseret på gruppen

$$SU(3)_C \otimes SU(2) \otimes U(1) \tag{8.109}$$

Vi ser (lidt flot) bort fra komplikationer med Higgs-felter og kan så sige, at elementarpartiklerne er opbygget ved hjælp af to slags byggesten:

(a) spin-$\frac{1}{2}$ fermioner og

(b) spin-1 gaugebosoner

Fermionerne deles igen i to klasser:

Leptoner, der transformerer som singletter under $SU(3)_C$, og

kvarker, der transformerer som tripletter.

Både leptoner og kvarker har flavours. Der findes tilsyneladende to slags: Et "lodret" kaldet "svagt isospin" og et vandret, kaldet generation eller familie. Disse flavours er sat op i tabellerne 8.3 og 8.4.

Tabel 8.3: Lepton flavours

1.	2.	3.
ν_e	ν_μ	ν_τ
e^-	μ^-	τ^-

Tabel 8.4: Kvark flavours

1.	2.	3.
u	c	t ?
d_c	s_c	b

De vandrette flavours kaldes for leptonerne: e-tal, μ-tal og τ-tal. Såvel for leptoner som for kvarker kaldes de også 1., 2. og 3. generation. De lodrette flavourtal afhænger af fermionens helicitet: *Venstre*håndede fermioner er svage isodubletter med $I = \frac{1}{2}$ og $I_3 = \pm\frac{1}{2}$ i henholdsvis 1. og 2. linje. *Højre*håndede fermioner er isosingletter med $I = I_3 = 0$ (bemærk, at hvis der fandtes højrehåndede neutrinoer, så ville deres kobling til Z^0 være 0 efter (8.86)).

Endelig har fermionerne kvantetallet, elektrisk ladning. Værdien er 0 for de øverste leptoner, -1 for de nederste, og $+2/3$ for de øverste kvarker og $-1/3$ for de nederste. Generatoren af $U(1)$-gruppen i (8.109) er *ikke* ladningen Q, men derimod den såkaldte "svage hyperladning", $\mathcal{Y}$

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}\mathcal{Y}$$

Antallet af generationer er blevet afgørende belyst af LEP resultaterne for Z^0-henfald, se kap. 9. En sammenligning mellem teori og eksperiment er perfekt for de tre viste generationer, medens et bidrag fra en 4. masseløs neutrino definitivt kan udelukkes. Også astrofysiske argumenter (forholdet mellem hydrogen og helium i det tidlige univers) peger stærkt på at der netop er tre fermiongenerationer!

Af gaugebosoner har vi behandlet de 12, som hører til gruppen (8.109):

- 8 gluoner hører til $SU(3)_C$. De kobler til colour, men kan hverken se ladning, flavour eller helicitet.

- Fotonen, γ, kobler til ladning, men kan hverken se colour, flavour eller helicitet.

- $W^\pm$ kobler til fermioner med $I \neq 0$, altså kun til de venstrehåndede. De kan ikke se colour. De ændrer I_3 med 1, men de kan ikke ændre I eller flavourgenerationen.

- Z^0 kobler både til højre- og venstrehåndede fermioner med forskellig styrke, men koblingen er i øvrigt diagonal i samtlige andre kvantetal: Den neutrale strøm er dannet af et felt *sammen med det tilsvarende antifelt.*

Dette billede af de fundamentale vekselvirkninger og elementarpartikler repræsenterer på mange måder et gennembrud i 70'ernes højenergifysik. Der er dog mange, der føler, at vi endnu kun står overfor en fragmentarisk forståelse. En meget populær idé går ud på at "den sande" gaugegruppe er større end (8.109), men blot indeholder denne som en undergruppe. Den mindste *simple* gruppe, der kan komme på tale, er $SU(5)$. En gaugeteori for en simpel gruppe har kun *en* gaugekoblingskonstant. Forskellen i g_s, g, g' må så bero på at disse selvfølgelig skal forstås som "running coupling constants" (jfr. kap. 6.5), hvor argumentet så for de forskellige vekselvirkninger hører til de forskellige masseskalaer. Disse forskellige masseskalaer beskrives ved forskellige vacuumforventningsværdier af forskellige Higgs-felter, men deres eventuelle oprindelse er ganske uafklaret. Et meget karakteristisk træk ved sådanne teorier, der på ægte måde forener vekselvirkningerne, er forekomsten af mange flere gaugebosoner (for $SU(5)$) : $5^2 - 1 = 24$). De ukendte af disse postuleres at være meget tunge, men de er typisk i stand til at omdanne kvarker til leptoner (!!!) i modsætning til de 12 ovenfor nævnte. Herved forudsiges fx, at protonen skal være ustabil! I $SU(5)$-teorien er dens levetid

$$\tau_p \sim 10^{31\pm1} \text{ år}$$

Eksperimenter, der vil forsøge at detektere protonhenfald som

$$p \rightarrow \pi^0 + e^+$$

og lignende, har i en årrække taget data. Protonhenfald er imidlertid ikke iagttaget, og de eksperimentelle grænser er nu (1992) så stringente, at den simple udgave af $SU(5)$-teorien må opgives. Andre, for eksempel "supersymmetriske", generaliseringer og/eller sådanne, der baserer sig på et strengteoretisk billede, kan ikke udelukkes.

Kapitel 9

Z^0-FYSIK

9.1 Partialbredder for Z^0

En af de mest dramatiske forudsigelser af GSW-teorien er selvfølgelig den yderst detaljerede forudsigelse af $W^{\pm}$- og Z^0-bosonerne, herunder af svage, neutrale strømme via Z^0-partiklen. Og en af de mest dramatiske triumfer for Stadardmodellen er, at disse forudsigelser har vist sig at holde stik. Det er en tilsvarende triumf for eksperimentel fysik, at man via LEP-acceleratoren har kunnet bygge en veritabel Z^0-fabrik, til efterprøvning af disse forudsigelser, foreløbigt især for selve Z^0-bosonen.

Vi vil nu gennemføre beregningen af partialbredder for de forskellige mulige Z^0-henfald til laveste orden i perturbationsteori i Standardmodellen. Denne behandling fungerer godt til ca. 1%. Det har også været muligt at behandle diverse strålingskorrektioner kommende fra virtuelle fotoner og gluoner. Disse bidrag bringer teorien i perfekt overensstemmelse med data, men vi vil ikke gå ind på dem her.

De henfaldsmåder for Z^0, der er relevante til laveste orden er

$$
\begin{aligned}
Z^0 &\rightarrow e^+e^- \\
Z^0 &\rightarrow \nu_e\overline{\nu}_e \\
Z^0 &\rightarrow u_i\overline{u}_i \\
Z^0 &\rightarrow (d_i)_C(\overline{d}_i)_C \\
Z^0 &\rightarrow \mu^+\mu^- \\
Z^0 &\rightarrow \nu_\mu\overline{\nu}_\mu \\
Z^0 &\rightarrow c_i\overline{c}_i \\
Z^0 &\rightarrow (s_i)_C(\overline{s}_i)_C \\
Z^0 &\rightarrow \tau^+\tau^- \\
Z^0 &\rightarrow \nu_\tau\overline{\nu}_\tau \\
Z^0 &\rightarrow b_i\overline{b}_i
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

Her er $i = 1, 2, 3$ colourindices. Det er klart, at bidragene fra de forskellige fermiongennerationer er ens til den approksimation, hvor vi kan negligere masserne. Bortset fra en 2-3% fejl (som vi negligerer) for b-kvarken, er dette rimeligt. Vi har indført de Cabibbo-roterede kvark-felter, men dette spiller for så vidt ingen rolle, når bare vi anvender orthonormerede kombinationer. Det bemærkes også, at t-kvarken ikke bidrager, da den er for tung til at kunne produceres selv i Z^0-henfald.

Bidraget fra Z^0 til GSW teoriens lagrangetæthed er (kap. 8, (8.86))

$$\mathcal{L}_{Z^0} = \frac{g}{\cos\theta_W}(Q\sin^2\theta_W - I_3)\overline{\psi}\not{Z}\psi \tag{9.2}$$

hvor (8.99).(8.97)

$$\frac{g^2}{\cos^2\theta_W} = 8M_Z^2\frac{G}{\sqrt{2}}$$

og hvor $\psi(x)$ er et venstre- eller højrehåndet fermionfelt, hvis planbølgeudvikling vi er fortrolige med.

For Z^μ-feltet skriver vi tilsvarende planbølgeudviklingen som

$$Z^\mu(x) = \sum_{\vec{p},\lambda}\left[\epsilon_\lambda^\mu(\vec{p})z(\vec{p},\lambda)e^{-ipx} + \epsilon_\lambda^{*\mu}(\vec{p})z^\dagger(\vec{p},\lambda)e^{ipx}\right] \tag{9.3}$$

Her er som sædvanlig $p^\mu = (p^0, \vec{p})$ med

$$p^0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + M_Z^2}$$

og vi har indført skabelses og annihilationsoperatorer med

$$[z(\vec{p}', \lambda'), z^\dagger(\vec{p},\lambda)] = \delta_{\vec{p}',\vec{p}}\delta_{\lambda',\lambda}$$

Videre er λ et polarisationsindeks og $\epsilon^\mu(\vec{p},\lambda)$ den tilhørende polarisationsvektor.

9.1.1 Massive vektorbosoners spin

Lad os gøre et par bemærkninger om polarisationsvektorerne for massive vektorbosoner. Vi har tidligere set, hvordan man indfører polarisationsvektorer for de masseløse fotoner og andre masseløse gauge-bosoner. Forholdet er dér, at skønt felterne er behandlet som 4-vektor-felter, så har partikel-ekscitationerne kun 2 polarisationstilstande, som følge af masseløshed og/eller gauge-invarians. I vores aktuelle anvendelse er situationen modificeret på grund af Higgs-mekanismen. Vi kan her have fornøjelse af at tælle frihedsgrader på to forskellige måder:

1. I den ubrudte gauge-teori er der 4 gauge-felter, W^+, W^-, Z^0, γ, hver med 2 polarisationstilstande. Efter at Higgs-felterne er indført, har vi yderligere 2 komplekse skalar-frihedsgrader, eller 4 reelle skalar-frihedsgrader. Det giver ialt

$$4 \cdot 2 + 4 = 12$$

frihedsgrader.

2. Efter at Higgs-mekanismen har virket og spontant brudt gauge-invariansen ned fra

$$SU(2)_W \otimes U(1)_Y$$

til

$$U(1)_{QED}$$

er 3 af Higgs-frihedsgraderne blevet "opslugt" af W- og Z- gauge-felterne. Disse sidste er derved blevet massive ("har spist sig tunge"), og har derfor som alle ordentlige, massive spin-1 partikler fået 3 polarisationstilstande. Til gengæld er der kun en enkelt fysisk (ikke-gauge-) Higgs-frihedsgrad tilbage som felt til at beskrive en enkelt, neutral Higgs-partikel. Vi har derfor følgende antal frihedsgrader for hhv fotonen, W'erne, Z og Higgs'en:

$$2 + 3 \cdot 3 + 1 = 12$$

i overensstemmelse med, hvad vi fandt før.

Det er ikke helt simpelt i detalje at redgøre for forholdene omkring de forskellige gaugevalg, når man som her har med en spontant brudt gauge-invarians at gøre. Vi nøjes derfor med en simpel – forhåbentlig plausibel – procedure.

Lad os først betragte et helt generelt 4-vektor-felt, $V^\mu(x)$. Et sådant felt vil i almindelighed beskrive *både* spin 1 og spin 0 partikler. Spin 0 partiklerne hænger sammen med, at feltet

$$\phi(x) \equiv \partial_\mu V^\mu(x)$$

netop transformerer som en Lorentz-skalar, og derfor vil skabe/annihilere spin 0 ekscitationer. For et 4-vektor-felt, der udelukkende beskriver spin 1 ekscitationer, må derfor gælde

$$\partial_\mu V^\mu(x) \equiv 0.$$

Mere præcist: dette udsagn gælder, hvis vi *ikke* har en gaugeteori. I en gaugeteori, er det nok, at ovenstående er "en ren gauge": noget, der kan "gauges væk". Men det betyder netop, at vi ihvertfald kan finde en *gauge*, hvor betingelsen er opfyldt. Vi forudsætter nu, at vi anvender en sådan gauge.

For polarisationsvektorerne i impulsrummet, $\epsilon^\mu_\lambda(\vec{p})$, betyder det

$$p_\mu \epsilon^\mu_\lambda(\vec{p}) \equiv 0$$

Lad os så se på de tre polarisations-vektorer i den massive vektorbosons hvilesystem, hvor $\vec{p} = \vec{0}$. Der må da gælde

$$\epsilon^0_\lambda \equiv 0$$

i hvilesystemet for $\lambda = 1, 2, 3$. Vi kan følgelig simpelthen tage

$$\vec{\epsilon}_\lambda = \vec{e}_\lambda$$

hvor $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ er de 3 orthonormale enhedsvektorer i det almindelige 3-dimensionale rum. (Som i foton-tilfældet er det kombinationerne, $\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2$, der svarer til partikler med $J_3 = \pm 1$, men alle basisvalg er lige gode). Der gælder følgelig - stadig i hvilesystemet -

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \epsilon^i_\lambda \epsilon^j_\lambda = \delta^{ij}$$

der umiddelbart kan generaliseres til den Lorentz-invariante betingelse

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \epsilon^\mu_\lambda \epsilon^\nu_\lambda = -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M^2} \tag{9.4}$$

Dette bevises ved (i) at bemærke, at udtrykket transformerer Lorentz-kovariant (hvilket er trivielt), og (ii) ved at kontrollere, at det giver det rigtige resultat i hvilesystemet. For $\mu, \nu \neq 0$, er (ii) korrekt, idet så $p^\mu = p^\nu = 0$. For $\mu = \nu = 0$ er både

$$g^{00} = 1$$

og

$$\frac{p^0 p^0}{M^2} = 1$$

mens venstre side er 0 i hvilesystemet. Herved er påstanden bevist.

9.1.2 Amplituden for Z^0-henfald

Vi bruger Dyson's formel (kap. 5 (5.56))

$$S = T\{\exp[i \int d^4x \mathcal{L}_{Z^0}]\}$$

til laveste orden:

$$(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)T = \frac{g}{\cos\theta_W}(Q\sin^2\theta_W - I_3) \int d^4x \overline{\psi}(x) \not{Z}(x) \psi(x) \qquad (9.5)$$

Hvor fermionfelterne refererer til felter med bestemt chiralitet, og hvor forskellig chiralitet giver forskellige værdier for I_3: 0 for R og $\pm\frac{1}{2}$ for L. Det er imidlertid bekvemt at arbejde med de fulde fermionfelter, og dernæst for hvert felt reservere navnet, I_3, til den ikke-trivielle venstrehåndede komponent. Vi kan så skrive koblingen helt generelt for *summen* af bidragene fra højre- og venstre-komponenter i samme fermion, f, som

$$(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)T = \frac{g}{\cos\theta_W} \int d^4x \overline{\psi}_f(x) \gamma^\mu (Q\sin^2\theta_W - I_3 \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)) Z_\mu(x) \psi_f(x) \qquad (9.6)$$

Vi ser nemlig, at med denne notation vil bidraget fra den højrehåndede feltkomponent automatisk komme med koefficient 0 for såvidt angår leddet med I_3: nullet skyldes venstrehånds-projektions-operatoren, ikke værdien af I_3, men resultatet er det samme. Tilsvarende vil bidraget fra venstrekomponenten også blive reproduceret korrekt. Vi omformer udtrykket endnu en gang til

$$(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)T = -\frac{g}{2\cos\theta_W} \int d^4x \overline{\psi}_f(x) \{V_f \gamma^\mu - A_f \gamma^\mu \gamma_5\}) Z_\mu(x) \psi_f(x) \qquad (9.7)$$

hvor vektor- og aksial-koblingerne er

$$\begin{aligned} A_f &= I_3(f_L) \\ V_f &= [I_3(f_L) - 2Q_f \sin^2\theta_W] \end{aligned} \qquad (9.8)$$

For eksempel har vi så for enhver lepton, l:

$$\begin{aligned} A_\nu &= \frac{1}{2} \\ V_\nu &= \frac{1}{2} \\ A_{l^-} &= -\frac{1}{2} \\ V_{l^-} &= -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W \end{aligned} \qquad (9.9)$$

medens vi for up- og down-agtige kvarker finder:

$$\begin{aligned} A_u &= \frac{1}{2} \\ V_u &= \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W \\ A_d &= -\frac{1}{2} \\ V_d &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_W \end{aligned} \tag{9.10}$$

Ved hjælp af de sædvanlige planbølgeudviklinger er det nu meget nemt at finde matrixelementer af T-operatoren:

$$\langle f(p)\bar{f}(q)|T|Z(P)\rangle = -\frac{g}{2\cos\theta_W}\bar{u}(p)\gamma^\mu[V_f - A_f\gamma_5]v(q)\epsilon_{\mu\lambda}(P) \tag{9.11}$$

idet integrationen på højre side af (9.5) netop vil reproducere en deltafunktion for 4-impulsbevarelse. $\epsilon_{\mu\lambda}(P)$ er polarisations-4-vektoren for Z^0-bosonen svarende til polsarisationsindeks, λ, medens fermionernes spin-indeks ikke er eksplicit noteret. Hvad vi her har gjort er selvfølgelig blot at udlede Feynman-reglerne i dette specielle tilfælde.

9.1.3 De partielle henfald

Vi benytter formlen fra kap. 1 (1.134) for 2-partikelhenfald, her

$$\Gamma(Z^0 \to f\bar{f}) = \frac{p_f}{32\pi^2 M_Z^2}\int |\overline{T}|^2 d\Omega \tag{9.12}$$

hvor $|\overline{T}|^2$ repræsenterer kvadratet på amplituden (9.11), summeret over slutspin og midlet over de 3 spintilstande for Z^0 i begyndelsestilstanden. Dette giver os nu på sædvanlig måde ved at benytte fermionernes spinprojektionsoperatorer (kap.5)

$$\begin{aligned} |\overline{T}|^2 &= \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}\frac{1}{3}\sum_{\lambda=1}^{3}\epsilon_\mu^\lambda\epsilon_\nu^{*\lambda} \\ &\cdot \mathrm{Tr}\{(\not p + m_f)\gamma^\mu(V_f - A_f\gamma_5)(\not q - m_f)(V_f + A_f\gamma_5)\gamma^\nu\} \end{aligned} \tag{9.13}$$

Summen over Z^0-polarisationerne er givet ved (9.4) og giver os en *symmetrisk* tensor i μ,ν. Vi behøver derfor kun at evaluere den symmetriske del at sporet. Vi finder

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\{(\not p + m_f)\gamma^\mu(V_f - A_f\gamma_5)(\not q - m_f)(V_f + A_f\gamma_5)\gamma^\nu\} \\ = \; & V_f^2 T_1^{\mu\nu} + A_f^2 T_2^{\mu\nu} + V_f A_f(T_3^{\mu\nu} + T_4^{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{9.14}$$

hvor

$$\begin{aligned} T_1^{\mu\nu} &= \mathrm{Tr}\{(\not p + m_f)\gamma^\mu(\not q - m_f)\gamma^\nu\} \\ T_2^{\mu\nu} &= \mathrm{Tr}\{(\not p + m_f)\gamma^\mu(\not q + m_f)\gamma^\nu\} \\ T_3^{\mu\nu} &= -\mathrm{Tr}\{(\not p + m_f)\gamma^\mu\gamma_5(\not q - m_f)\gamma^\nu\} \\ T_4^{\mu\nu} &= -\mathrm{Tr}\{(\not p + m_f)\gamma^\mu(\not q - m_f)\gamma^\nu\gamma_5\} \end{aligned} \tag{9.15}$$

I T_2 har vi brugt $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ og $\gamma_5^2 = I$. De to sidste spor med γ_5 giver anledning til *anti-symmetriske* tensorer i μ, ν (jfr. (8.32)) og vi behøver derfor ikke at udregne dem. For de to første finder vi, idet vi benytter, at sporet af et ulige antal gamma-matricer er nul,

$$
\begin{aligned}
T_1^{\mu\nu} &= \mathrm{Tr}\{\not p\gamma^\mu \not q\gamma^\nu\} - m_f^2\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} \\
T_2^{\prime\mu\nu} &= \mathrm{Tr}\{\not p\gamma^\mu \not q\gamma^\nu\} + m_f^2\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\}
\end{aligned} \tag{9.16}
$$

Vi ser, at i den approksimation hvor vi negligerer fermionmassen, er disse to spor identiske. Denne approksimation vil vi nu følge, men det er åbenbart trivielt at beholde fermionmassen. Bidraget herfra er imidlertid ikke større end mange andre (strålings-) korrektioner, som vi alligevel her negligerer. Vi får så (jfr. afsn. 5.8)

$$
T_1^{\mu\nu} = 4\{p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot q\} \tag{9.17}
$$

Dette giver os så følgende formel for kvadratet på den spinsummerede og -midlede amplitude

$$
|\overline{T}|^2 = \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}\frac{1}{3}P_{\mu\nu}T_1^{\mu\nu}(V_f^2 + A_f^2) \tag{9.18}
$$

hvor Z^0-polarisationstensoren er

$$
P_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{(p+q)_\mu (p+q)_\nu}{M_Z^2}
$$

Vi benytter nu

$$
p^2 = q^2 = m_f^2 \simeq 0
$$

og

$$
M_Z^2 = (p+q)^2 = 2p \cdot q
$$

og finder så ret let

$$
P_{\mu\nu}T_1^{\mu\nu} = 4M_Z^2 \tag{9.19}
$$

Man kan eventuelt udregne

$$
A_f^2 + V_f^2 = [\frac{1}{2} + 4Q_f^2 \sin^4\theta_W - 4I_3(f)Q_f \sin^2\theta_W] \tag{9.20}
$$

Herefter fås resultatet for partialbredden for Z^0-henfald til et fermion-anti-fermion-par af arten f:

$$
\Gamma(Z^0 \to f\overline{f}) = \frac{g^2}{\cos^2\theta_W}\frac{1}{24\pi}p_f(A_f^2 + V_f^2) \tag{9.21}
$$

hvor størrelsen af fermionens 3-impuls, p_f, i Z^0-partiklens hvilesystem er

$$
p_f = \frac{1}{2}M_Z
$$

når vi negligerer fermionmassen. Lad os igen indføre

$$
\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_Z^2\cos^2\theta_W}
$$

og derved få vores endelige udtryk, idet vi anvender følgende talværdier

$$\begin{aligned} G &= 1.166 \cdot 10^{-5} GeV \\ M_Z &= 91.18 GeV \\ \sin^2\theta_W &= 0.234 \end{aligned} \tag{9.22}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(Z^0 \to f\bar{f}) &= N_C \frac{G M_Z^3}{6\sqrt{2}\pi}(A_f^2 + V_f^2) \\ &= N_C (A_f^2 + V_f^2) \cdot 332 \text{ MeV} \end{aligned} \tag{9.23}$$

Her har vi eksplicit indført colurfaktoren, N_C, med $N_C = 3$ for kvarker (hadroner) og 1 for leptoner, idet vi jo ikke kan studere henfald til kvarker af kun en enkelt farve. Overensstemmelsen mellem teori og eksperiment, som vi nu skal se på, er her langt det mest præcise udtryk, som vi kender for en de facto måling af tallet, 3, for antallet af farver. Den er langt mere nøjagtig end tilfældet var ved det berømte R-forhold i e^+e^--produktion, og også væsentlig mere nøjagtig end ved τ-henfald.

Vi har hermed en komplet teori for Z^0-henfald. Som nævnt flere gange er der strålingskorrektioner på procent-niveauet, som man imidlertid også har kunnet beregne. Den perfekte overensstemmelse mellem teori og eksperiment viser med stor tydelighed, at Standardmodellens billede af de svage vekselvirkninger må være uhyre tæt på "sandheden".

Lad os imidlertid sammenligne vores ganske simple beregninger med data. Vi finder:

- For alle neutrinoarter er

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \\ A &= \frac{1}{2} \\ (V^2 + A^2) &= \frac{1}{2} \\ \Gamma_\nu &= 166 MeV \end{aligned} \tag{9.24}$$

- For alle ladede leptoner, l, er

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W = -0.032 \\ A &= -\frac{1}{2} \\ (V^2 + A^2) &= 0.251 \\ \Gamma_{l^-} &= 83 MeV \end{aligned} \tag{9.25}$$

- For alle kvarker af "up"-type

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W = 0.188 \\ A &= \frac{1}{2} \\ (V^2 + A^2) &= 0.285 \\ \Gamma_u &= 283 MeV \end{aligned} \tag{9.26}$$

- For alle kvarker af "down"-type

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_W = -0.344 \\ A &= -\frac{1}{2} \\ (V^2 + A^2) &= 0.368 \\ \Gamma_d &= 366MeV \end{aligned} \tag{9.27}$$

Ved at addere bidragene fra (u, d) og (c, s) samt b kvarken, finder vi

$$\Gamma_{\text{hadron}} = 1.66GeV \tag{9.28}$$

Adderes desuden bidragene fra 3 neutrinoer og 3 ladede leptoner, fås

$$\Gamma_Z \equiv \Gamma_{\text{total}} = 2.41GeV \tag{9.29}$$

Disse forudsigelser kan nu sammenlignes med data, som giver

$$\begin{aligned} \Gamma_e &= 83.1 \pm 0.5MeV \\ \Gamma_\mu &= 84 \pm 1MeV \\ \Gamma_\tau &= 83 \pm 1MeV \\ \Gamma_Z &= 2.49 \pm 0.01GeV \end{aligned} \tag{9.30}$$

Overensstemmelsen fremstår som nærmest fantastisk. Vi ser, at den totale bredde forudsiges for lille i vores laveste ordens beregning. Ekstra bidrag kommer for eksempel fra sluttilstande svarende til kvark-anti-kvark-gluon, af lignende type som omtalt i kap. 7.

9.1.4 $W^{\pm}$-partialbredder

Disse er meget lettere at beregne da W-koblingen simpelthen har $A = V = 1$. Vi nævner blot resultatet for fuldstændighedens skyld, men læseren kan nemt reproducere dem ved hjælp af de allerede angivne formler. Man finder

$$\Gamma(W \to f_1\overline{f}_2) = N_C \frac{GM_W^3}{6\sqrt{2}\pi} = N_C \cdot 229MeV \tag{9.31}$$

for det partielle henfald til fermiondubletten $(f_1, \overline{f}_2)$. Der er her 2 mulige kvarkdubletter og 3 mulige leptondubletter. Det giver et forgreningsforhold på

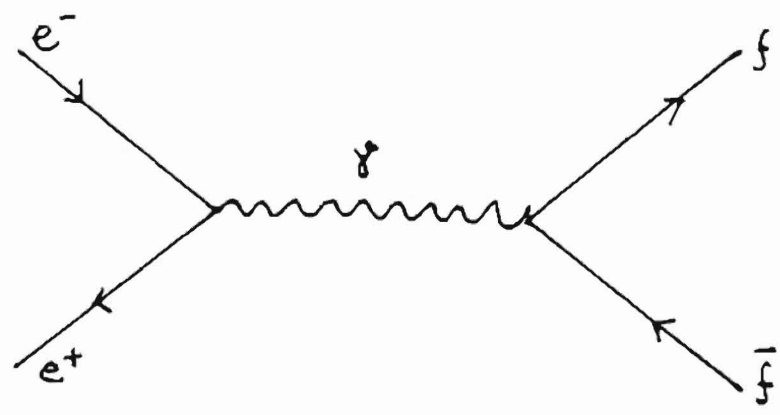
$$B(W \to \text{leptoner}) = \frac{1}{9}$$

for hver leptonflavour. Eksperimentelt er fundet forgreningsforhold på ca. $10\% \pm 2.5\%$ for alle tre leptoner, altså overensstemmelse. Den totale bredde findes også meget let af ovenstående til

$$\Gamma_W = 2.1GeV$$

mod eksperimentelt

$$\Gamma_W = 2.25 \pm 0.14GeV$$



Figur 9.1: $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ via en virtuel foton.

9.2 Elektron-positron-produktion af Z^0

I kap. 7, lgn. (7.21) fandt vi følgende Breit-Wigner udtryk for det vinkelintegrerede tværsnit for resonansproduktion fra e^+e^- med efterfølgende henfald til en bestemt kanal:

$$\sigma_{BW} = \frac{3\pi}{M^2} \frac{\Gamma_e \Gamma_f}{(\sqrt{s} - M)^2 + \Gamma^2/4} \tag{9.32}$$

Lad os omforme udtrykket idet vi multiplicerer i tæller og nævner med

$$(\sqrt{s} + M)^2 \simeq 4M^2$$

i nærheden af resonansen:

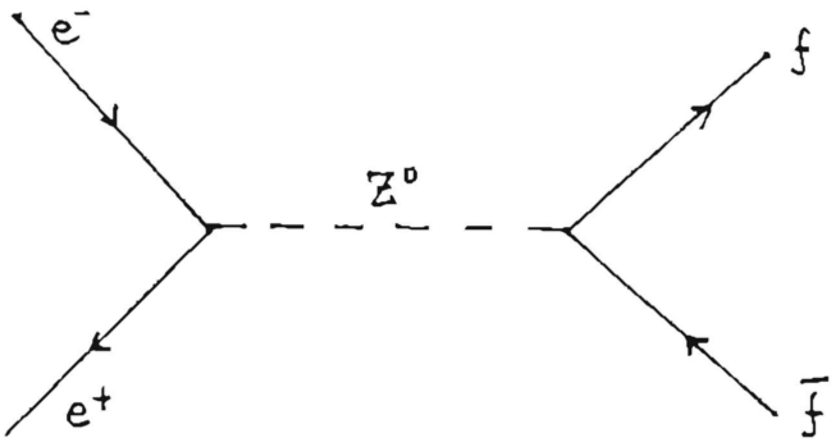
$$\sigma_{BW} = \frac{12\pi \Gamma_e \Gamma_f}{(s - M^2)^2 + M^2\Gamma^2} \tag{9.33}$$

Lad os nu se hvordan en beregning af teoriens Feynman-diagrammer giver en generalisering heraf. Først bemærker vi, at "produktion af Z^0" strengt taget er et lidt meningsløst begreb: Det eneste vi kan måle på, er produktion af en bestemt sluttilstand af stabile partikler. Denne produktion kan så eventuelt være *domineret* af Z^0-resonansen, men vi må altid i en kvantmekanisk behandling medtage *samtlige* andre produktions-amplituder (evt. til en bestemt orden i koblingskonstanter). I vores aktuelle tilfælde må vi således medtage produktion via en virtuel foton.

Til laveste orden er der de 2 Feynman-diagrammer, fig. (9.1) og (9.2). Amplituderne for disse 2 diagrammer skal adderes for at konstruere den fulde amplitude. Når resultatet absolutkvadreres fås (i) kvadratet på første diagram, som vi allerede har behandlet i stor detalje i kap. 5; (ii) kvadratet på sidste diagram, som vi nu vil behandle; og endelig (iii) interferensledet.

Med en indlysende notation finder vi for amplituderne:

$$T = T(\gamma) + T(Z^0)$$



Figur 9.2: $e^+e^- \to f\bar{f}$ via Z^0-resonansen.

$$
\begin{aligned}
T(\gamma) &= \frac{e^2 Q_f}{k^2}\bar{u}(p_f)\gamma^\mu v(p_{\bar{f}})\bar{v}(p_+)\gamma_\mu u(p_-) \\
T(Z^0) &= \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}\left(\frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/M_Z^2}{k^2 - M_Z^2}\right) \\
&\cdot \quad \bar{u}(p_f)\gamma^\mu(V_f - A_f\gamma_5)v(p_{\bar{f}})\bar{v}(p_+)\gamma^\nu(V_e - A_e\gamma_5)u(p_-)
\end{aligned}
\tag{9.34}
$$

hvor vi har brugt propagatoren for en massiv vektorboson fra kap.8. Bemærk, at tælleren i dette udtryk simpelthen er spinprojektionsoperatoren, (9.4) som det er tilfældet for alle propagatorer. Vektorboson-propagatoren har sin pol ved $k^2 = M_Z^2$, som vi også har lært, at forvente. Dens tæller adskiller sig altså fra foton-propagatorens $g_{\mu\nu}$, men faktisk kan vi negligere denne forskel i grænsen hvor fermionernes masser kan negligeres. Vi får så nemlig for elektronfaktoren i $T(Z^0)$:

$$
k_\nu\bar{v}(p_+)\gamma^\nu(V_e - A_e\gamma_5)u(p_-) = \bar{v}(p_+)(\not{p}_+ + \not{p}_-)(V_e - A_e\gamma_5)u(p_-) = 0 \tag{9.35}
$$

idet nemlig både

$$
\begin{aligned}
\not{p}_- u(p_-) &= 0 \\
\bar{v}(p_+)\,\not{p}_+ &= 0
\end{aligned}
\tag{9.36}
$$

som en følge af Dirac-ligningen når masserne forsvinder.

Forsåvidt angår propagatorens pol, fører den til det alvorlige problem, at vi får en singularitet for $s = M_Z^2$. Dette helt ufysiske resultat er en konsekvens af, at vi her har behandlet Z-bosonen som en stabil partikel, medens vi udmærket godt ved, at den henfalder som beskrevet i afsn. 9.1. Som videre omtalt i afsn. 7.5.3, betyder det, at polen flyttes ud i den komplekse energi-plan til positionen:

$$
\sqrt{s} = M_Z - i\frac{\Gamma_Z}{2}
$$

Vi vil derfor få en "reparation" af skavanken ved at substituere

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s-M_Z^2} &\rightarrow \frac{1}{s-(M_Z-i\Gamma_Z/2)^2} \\
&\sim \frac{1}{s-M_Z^2+iM_Z\Gamma_Z} \\
&\equiv -r_0 e^{i\delta_0}
\end{aligned}
\tag{9.37}
$$

Her har vi først negligeret $\Gamma_Z^2/4$ i forhold til M_Z^2, da forholdet mellem dem er $\sim 10^{-4}$, og dernæst har vi indført sædvanlige navne for modulus og argument af den "kompleksificerede" propagator. Vi finder

$$
\begin{aligned}
r_0 &= \frac{1}{[(s-M_Z^2)^2+M_Z^2\Gamma_Z^2]^{1/2}} \\
\tan\delta_0 &= \frac{M_Z\Gamma_Z}{M_Z^2-s} \\
\cos\delta_0 &= (M_Z^2-s)r_0
\end{aligned}
\tag{9.38}
$$

Størrelsen δ_0 betegnes som resonansens "faseforskydning" (eng. phase shift). En sådan udviser en karakteristisk opførsel: For energier langt under resonansmassen er den tæt på 0, og for energier langt over resonansmassen er den tæt på π. I nærheden af resonansen vokser den ret pludseligt inden for et energiinterval af størrelsesorden som resonansens bredde. Præcist på resonansmassen er den $\pi/2$.

Vi har så

$$
Re\{\frac{1}{s-M_Z^2+iM_Z\Gamma_Z}\} = (\cos\delta_0)r_0
$$

Man indfører betegnelsen

$$
\begin{aligned}
\chi_0 &\equiv \frac{s}{e^2}\frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}r_0 \\
&= \frac{G}{2\sqrt{2}\pi\alpha}sM_Z^2r_0 \\
&= \frac{G}{2\sqrt{2}\pi\alpha}\frac{sM_Z^2}{[(s-M_Z^2)^2+M_Z^2\Gamma_Z^2]^{1/2}}
\end{aligned}
\tag{9.39}
$$

For de spin-summerede og -midlede amplitudekvadrater fås derfor ($s\equiv k^2$)

$$
\begin{aligned}
|\overline{T}(\gamma)|^2 &= \frac{e^4Q_f^2}{4s^2}Tr(\not{p}_f\gamma^\mu\ \not{p}_{\bar{f}}\gamma^\nu) \\
&\cdot\ Tr(\not{p}_+\gamma_\mu\ \not{p}_-\gamma_\nu) \\
|\overline{T}(Z^0)|^2 &= \frac{e^4}{4s^2}\chi_0^2 \\
&\cdot\ Tr(\not{p}_f\gamma^\mu(V_f-A_f\gamma_5)\ \not{p}_{\bar{f}}(V_f+A_f\gamma_5)\gamma^\nu) \\
&\cdot\ Tr(\not{p}_+(V_e-A_e\gamma_5)\gamma_\mu\ \not{p}_-(V_e+A_e\gamma_5)\gamma_\nu) \\
&= \frac{g^4}{64\cos^4\theta_W}\frac{1}{(s-M_Z^2)^2+M_Z^2\Gamma_Z^2} \\
&\cdot\ Tr(\not{p}_f\gamma^\mu(V_f-A_f\gamma_5)^2\ \not{p}_{\bar{f}}\gamma^\nu)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \cdot \quad Tr(\not{p}_+ \gamma_\mu (V_e - A_e\gamma_5)^2 \not{p}_- \gamma_\nu) \\
2Re[T(Z^0)T(\gamma)^*] &= \frac{e^4}{2s^2} Q_f \chi_0 \cos\delta_0 \\
& \cdot \quad Tr(\not{p}_f \gamma^\mu (V_f - A_f\gamma_5) \not{p}_{\bar{f}} \gamma^\nu) \\
& \cdot \quad Tr(\not{p}_+ \gamma_\mu (V_e - A_e\gamma_5) \not{p}_- \gamma_\nu) \qquad (9.40)
\end{aligned}
$$

Disse spor kan nu uden videre beregnes som beskrevet flere gange tidligere. Det rene fotonbidrag har vi behandlet i kap. 5 med resultatet

$$|\overline{T}(\gamma)|^2 = 16\pi^2\alpha^2 Q_f^2(1+\cos^2\theta)$$

hvor θ er "spredningsvinklen" mellem den indkommende elektron og den udgående fermion, f, i CM systemet.

For sporene i det rene Z^0-bidrag finder vi først

$$(V_f - A_f\gamma_5)^2 = V_f^2 + A_f^2 - 2V_f A_f \gamma_5$$

Dernæst bemærker vi, at sporene uden γ_5 er symmetriske i $\mu\nu$, medens sporene med γ_5 er antisymmetriske. Når derfor (f)-delen kontraheres med (e)-delen, fås kun de to led, der består af hhv (symmetrisk)$\times$(symmetrisk) og (anti-symmetrisk)$\times$(anti-symmetrisk). Den symmetriske del er herved identisk med sporene i den rene foton-del. I de antisymmetriske dele benyttes (8.32)

$$Tr\{\gamma_5 \not{p}_f \gamma^\mu \not{p}_{\bar{f}} \gamma^\nu\} = 4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{f\alpha} k_\beta$$

etc. Vi får så

$$
\begin{aligned}
|\overline{T}(\gamma)|^2 &= 16\pi^2\alpha^2 Q_f^2(1+\cos^2\theta) \\
|\overline{T}(Z^0)|^2 &= 16\pi^2\alpha^2\chi_0^2 \\
& \cdot \quad \{(V_f^2 + A_f^2)(V_e^2 + A_e^2)(1+\cos^2\theta) + 8V_f A_f V_e A_e \cos\theta\} \\
2Re[T(Z^0)T(\gamma)^*] &= 32\pi^2\alpha^2 Q_f \chi_0 \cos\delta_0 \\
& \cdot \quad \{V_f V_e(1+\cos^2\theta) + A_f A_e \cos\theta\} \qquad (9.41)
\end{aligned}
$$

Det differentielle tværsnit fås ved at addere disse bidrag og dividere resultatet med $64\pi^2 s$. Lad os nedskrive det eksplicit som følger:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{d\sigma}{d\Omega}(\gamma) + \frac{d\sigma}{d\Omega}(Z^0) + \frac{d\sigma}{d\Omega}(\gamma/Z^0) \\
\frac{d\sigma}{d\Omega}(\gamma) &= N_C^f \frac{\alpha^2 Q_f^2}{4s}(1+\cos^2\theta) \\
\frac{d\sigma}{d\Omega}(Z^0) &= N_C^f \frac{9}{4} \cdot \frac{\Gamma_e\Gamma_f}{(s-M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2} \cdot \frac{s}{M_Z^2} \\
& \cdot \quad \{(1+\cos^2\theta) - \frac{4V_f A_f V_e A_e}{(V_f^2 + A_f^2)(V_e^2 + A_e^2)} \cos\theta\} \\
\frac{d\sigma}{d\Omega}(\gamma/Z^0) &= N_C^f \frac{Q_f \alpha G M_Z^2}{4\sqrt{2}\pi} \frac{(s-M_Z^2)}{(s-M_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2 M_Z^2} \\
& \cdot \quad \{V_f V_e(1+\cos^2\theta) + A_f A_e \cos\theta\} \qquad (9.42)
\end{aligned}
$$

Hvis vi først tænker på tværsnittet integreret over alle vinkler, finder vi

$$\begin{aligned} \int d\phi \int_{-1}^{1} d\cos\theta(1+\cos^2\theta) &= \frac{16\pi}{3} \\ \int d\phi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \cos\theta &= 0 \end{aligned} \tag{9.43}$$

Vi ser nu, at første led i (9.42) giver os det sædvanlige rene QED tværsnit fra kap. 5. Næste led giver os en generalisering af Breit-Wigner udtrykket (9.33). De to udtryk stemmer overens i nærheden af resonansen, hvor begge dominerer tværsnittet fuldstændigt, men lidt væk fra resonansen bliver afvigelserne mere og mere betydningsfulde. Endelig angiver sidste led inteferensen mellem diagrammerne med en virtuel foton, hhv en virtuel Z^0-partikel. Det ses, at værdien af interferensleddet skifter fortegn på resonansen.

Vi kan også danne forholdet, R_Z

$$R_Z \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \gamma + Z \to f\bar{f})}{\sigma_{pt}}$$

hvor (jfr. kap. 5 og 7)

$$\sigma_{pt} \equiv \frac{4\pi}{3}\frac{\alpha^2}{s}$$

er det "punktformede" tværsnit svarende til den rene QED proces. Vi finder nu

$$R_Z = N_C^f[Q_f^2 + 2\chi_0 V_f V_e Q_f \cos\delta_0 + \chi_0^2(V_f^2 + A_f^2)(V_e^2 + A_e^2)] \tag{9.44}$$

Specielt finder vi

$$\begin{aligned} \chi_0(s = M_Z^2) &\equiv \overline{\chi_0} \\ &= \frac{GM_Z^2}{2\sqrt{2}\pi\alpha}\frac{M_Z}{\Gamma_Z} = 54.7 \\ \cos\delta_0(s = M_Z^2) &= 0 \\ R_Z(s = M_Z^2) &= N_C^f[Q_f^2 + \overline{\chi_0}^2(V_f^2 + A_f^2)(V_e^2 + A_e^2)] \\ &\simeq 2.99 \cdot 10^3 \cdot N_C^f(V_f^2 + A_f^2)(V_e^2 + A_e^2) \end{aligned} \tag{9.45}$$

Dette resultat viser for det første, at Z^0-resonansen virker som en kollossal "luminositets-forstærker": der kommer *mange* flere begivenheder på grund af resonansen. Udtrykket, "luminositetsforstærker" er selvfølgelig jargon: Det er ikke acceleratorens luminositet, der forøges, men produktionstværsnittet. Resultatet er dog nogenlude det samme. Summeres således over alle fermionarter, og benyttes talværdier fra forrige afsnit fås

$$R_Z(\text{Max}) \simeq 5.5 \cdot 10^3$$

For det andet viser resultatet, at *højden* af resonanstoppen er en værdifuld parameter.

En anden værdifuld og interessant parameter er A_{FB}: forward/backward asymmetrien. Lad σ_F og σ_B betegne vinkelintegrationer over det differentielle tværsnit, restringeret til henholdsvis den forlæns ("forward") halvkugle: $0 \leq \cos\theta \leq 1$, og den baglæns ("backward") halvkugle: $-1 \leq \cos\theta \leq 0$. De relevante integraler er nu

$$\begin{aligned} \int d\phi \int_{0}^{1} d\cos\theta(1+\cos^2\theta) &= \frac{8\pi}{3} \\ \int d\phi \int_{0}^{1} d\cos\theta \cos\theta &= \pi \end{aligned} \tag{9.46}$$

Det er let at se, at

$$A_{FB} \equiv \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B} = \frac{3}{4R_Z}[2\chi_0 Q_f A_f A_e \cos\delta_0 + 4\chi_0^2 V_f V_e A_f A_e] \tag{9.47}$$

For mere nøjagtige sammenligninger mellem teori og data må en række strålings-korrektioner medtages. For eksempel viser det sig, at der er et betydeligt tværsnit for reaktioner i hvilke de indkommende elektroner og/eller positroner udsender en eller flere "bløde" fotoner inden annihilationen. Hovedeffekten heraf er, at deres energi lige inden annihilationen er mindre end deres nominelle beam-energi. Resultatet er, at for energier noget over resonansmassen, er det observerede antal tællinger større end forventet ud fra ovenstående formler. Tilsvarende er det mindre under resonansmassen.

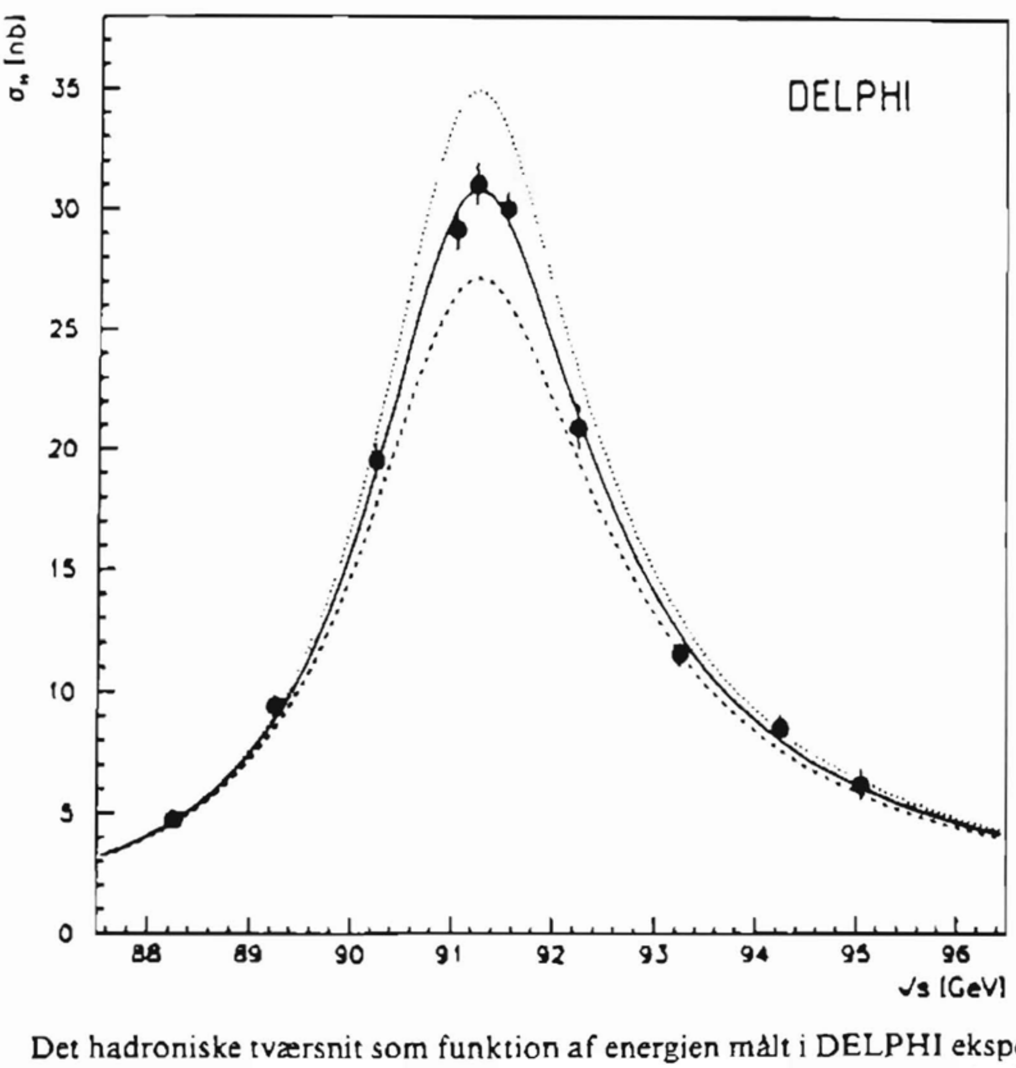
9.3 Antallet af neutrino-flavours

Fig. (9.3) viser data for det totale tværsnit i nærheden af Z^0-resonansen, sammenlignet med forskellige forudsigelser baseret på forskellige antagelser om antallet af fermion-generationer. Pointen er her følgende: Neutrinoer registreres ikke i detektorerne, men deres bidrag er alligevel ret tydeligt på to måder: dels via deres bidrag til Z^0-bosonens totale bredde, dels via højden af resonanskurven, for eksempel ved maksimum.

Vi kunne nu stille spørgsmålet: Kunne det tænkes, at der fandtes flere fermion-generationer, end de 3 kendte? Og kunne det tænkes, der hertil svarede neutrinoer, som koblede normalt til Z^0 som foreskrevet af Standardmodellen? Svaret kan nu entydigt leveres: Nej! En ekstra neutrinoflavour ville således bidrage med et beløb på 166 MeV til den totale Z^0 bredde, (afsn. 9.1.3) og det er helt udelukket, da vi har sammenfald mellem teori og eksperiment med de 3 kendte neutrinoer, og da den eksperimentelle usikkerhed på den totale bredde er kun ca. 10 MeV (afsn. 9.1.3). Endnu mere overbevisende bliver konklusionen når man som i fig. (9.3) sammenligner størrelsen af tværsnittet for forskellige antagelser om antallet af neutrino-flavours.

Konklusionen er, at der ikke kan findes flere end de 3 kendte neutrinotyper, i hvert fald ikke med masser på mindre end halvdelen af Z^0-massen. Det er interessant, at astrofysiske argumenter baseret på energi og temperatur forhold i det tidlige univers giver samme resultat. Den afgørende parameter er her forholdet mellem helium og hydrogen i det tidlige univers (inden det blev "beriget" med tungere grundstoffer som et resultat af supernova-eksplosioner). Det er interessant, at det astrofysiske argument ikke forudsætter de samme grænser på neutrinomassen.

Det turde være et fundamentalt resultat, at vi herved har fået grund til at formode, at der kun findes 3 fermiongenerationer i Naturen!



Det hadroniske tværsnit som funktion af energien målt i DELPHI eksperimentet. Den prikkede kurve svarer til Standardmodellens forudsigelse for $N_\nu = 2$, den fuldt optrukne til $N_\nu = 3$ og den stiplede til $N_\nu = 4$.

Figur 9.3: Tværsnittet for Z^0-produktion i LEP sammenlignet med forskellige Standardmodel-forudsigelser

Kapitel 10

DYBT UELASTISK LEPTON-HADRONSPREDNING

10.1 Indledning

I forbindelse med bygningen af Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) i 60'erne foreslog Bjorken i 1966, at eksperimenter af typen

$$e^- + N \to e^- + X \tag{10.1}$$

kunne tænkes at give fundamentale oplysninger om nukleonens struktur, specielt om dens hypotetiske kvarkindhold. I (10.1) betegner X, at sluttilstandens hadronsystem ikke observeres, dvs at man skal summere tværsnittet over alle mulige hadronsluttilstande: Danne det inklusive tværsnit. Denne omstændighed gør studiet af begivenheder (10.1) til et særlig simpelt eksperimentelt problem. Det var før 1966 uklart for de fleste, hvorfor det at *undlade* at klassificere begivenheder efter hadronindhold skulle føre til særlig interessant information om nukleonens struktur. Men Bjorken argumenterede for, at kvarkmodellen måske burde medføre den fundamentale *scaling* egenskab af tværsnittet (10.1). Hans argumenter var baseret på Gell-Mann's strømalgebra og temmelig abstrakte i forhold til, hvad vi har diskuteret i indeværende kursus.

I 1969 blev scaling i dybt uelastisk elektronspredning (dvs reaktionen (10.1)) eksperimentelt etableret ved SLAC. Denne opdagelse skulle få gennemgribende indflydelse på udviklingen af partikelfysikken i 70'erne.

Det blev Feynman, som i sin partonmodel gav en overmåde simpel fysisk fortolkning af scalingfænomenet og som herigennem gav stødet til formodningen om, at kvark-kvark vekselvirkningen burde være asymptotisk fri, således som det er tilfældet i QCD.

Idéen bag de dybt uelastiske leptoneksperimenter forstås lettest ved en analogi til Rutherfords berømte eksperiment, i hvilket han opdagede atomkernen i 1910.

Rutherford formodede (ukorrekt), at atomets positive ladning var jævnt fordelt over atomet. Han indså, at denne ladnings*fordeling* måtte kunne bestemmes ved at undersøge afbøjningen af α-partikler i atomets ladningsfordeling. Hvis ladningen *var* (næsten) jævnt fordelt over atomet, ville α-partiklerne aldrig afbøjes ret meget. Han blev derfor meget forbavset ved at observere, at de ikke sjældent blev afbøjet så kraftigt, at de endog fløj tilbage i den retning, de kom fra. Rutherford konkluderede korrekt, at den positive ladning måtte være samlet i en ganske lille kerne, og at det var det stærke elektriske felt nær kernen, som var skyld i de store afbøjninger.

Vi kan udtrykke det såden, at som funktion af impulsoverførslen falder tværsnittet *ikke* som ventet: Det er stort selv for meget store impulsoverførsler. Ved at studere spredningen som funktion af impulsoverførslen får vi så at sige dannet et Fourier-transformeret "billede" af ladningsfordelingen. At høje Fourier-komponenter forekommer betyder, at ladningsfordelingen er "tæt på " en δ-funktion i rummet: Atomkernen er lille.

I (10.1) studerer vi nukleonens struktur efter en lignende idé. α-partiklen er erstattet af en elektron, men det er stadig via det elektromagnetiske felt, at nukleonens ladningsfordeling studeres. For virkelig at kunne se "ind i" protoner og neutroner må vi bruge impulsoverførsler Q, der er store i forhold til protonens inverse udstrækning $\sim 1\text{fm}^{-1} \sim 0.2$ GeV. Det var derfor først efter fremkomsten af elektronbeams på mange GeV, at undersøgelser af denne art blev mulige. Bemærk, at vi *ikke* uden komplikationer kan erstatte elektronen med en hadron, som selv har en kompliceret struktur[1]. Tilsvarende beror successen af Rutherfords eksperiment på, at en α-partikel selv er meget lille i forhold til et atom.

Eksperimentelt findes tværsnittet af (10.1) at være (meget nær) *uafhængigt* af impulsoverførslen Q,[2] såfremt det undersøges i et nøje specificeret kinematisk område, som Bjorken angav. Dette fænomen kaldes Bjorken-scaling og blev af Feynman fortolket som en opdagelse af nukleonens "kerner" eller partoner, som han kaldte dem: Punktformede bestanddele, som bærer nukleonens ladning. Det er i dag den almindeligste opfattelse, at Feynmans *ladede* partoner er identiske med kvarkerne, medens de uladede (som eksperimenterne kræver) antages at være gluonerne.

Efter at neutrinoeksperimenter i 70'erne er blev udviklet, har det været muligt at studere processer af typen

$$\begin{aligned} \nu + N &\to l^{\pm} + X \qquad (CC) \\ \nu + N &\to \nu + X \qquad (NC) \end{aligned} \tag{10.2}$$

hvor ν i praksis enten er en ν_μ eller en $\bar{\nu}_\mu$, og $l^{\pm}$ står for $\mu^{\pm}$. CC betyder charged current og NC neutral current. Som vi skal se i dette kapitel, kan man herigennem ikke alene få bekræftet partonmodellen, men også dels uddybe sin viden om nukleonens struktur, dels efterprøve $SU(2) \otimes U(1)$-modellen for svage vekselvirkninger.

Disse indledende bemærkninger kan forhåbentlig tjene som ledetråd gennem den stedvis lidt tunge formalisme, vi nu skal i gang med.

10.2 Kinematiske variable

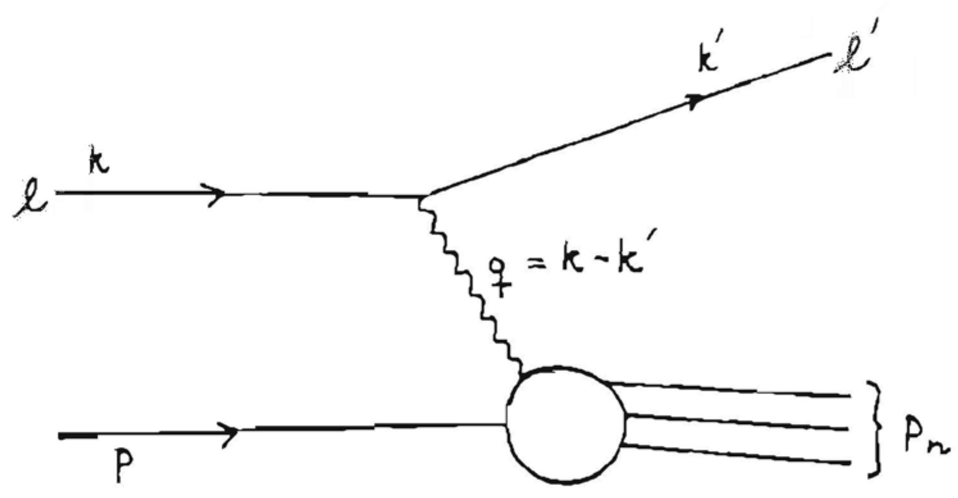
Fig. (10.1) illustrerer de kinematiske forhold. Begyndelsestilstanden består af en nukleon med 4-impuls p^μ og masse M samt en lepton (eller antilepton) med 4-impuls k^μ. Sluttilstanden består af et vist hadronsystem i en tilstand, vi betegner ved $|n\rangle$ og med 4-impuls p_n^μ samt af en lepton l' med 4-impuls k'^μ. Vi vil negligere leptonernes masser.

På fig.(10.1) symboliserer bølgelinjen med 4-impuls q enten en virtuel foton (elektron- eller myonproduktion) eller en $W^{\pm}$ (CC neutrinoeksperiment) eller en Z^0 (NC neutrinoeksperiment). Vertexet ved leptonens udsendelse af en vektorboson vil vi tænke os bekendt og strukturløst (γ^μ-kobling). Cirklen ved nukleonens omdannelse

$$\text{“}q\text{”} + p \to |n\rangle \tag{10.3}$$

[1] Hadron–hadron spredning har dog bestemt ført til afgørende ny indsigt på flere punkter!

[2] På nær en triviel faktor; jfr. (10.48), (10.49).



Figur 10.1: Skitse af de kinematiske variable i dybt uelastisk spredning.

derimod anses foreløbig for ubekendt. Ideen er netop at benytte kendte egenskaber ved elektromagnetiske og svage vekselvirkninger til at undersøge nukleonens struktur. Eksperimentelt måles 4-impulserne k og k', hvorved q er bestemt.

Derefter interesserer vi os for de kinematiske forhold vedrørende "processen" (10.3). Da detaljer vedrørende tilstanden $|n\rangle$ ikke observeres, er kinematikken fastlagt af de 3 invarianter p^2, q^2 og p_n^2. Da $p^2 \equiv M^2$, er der således kun to "interessante" kinematiske variable i problemet.

Som disse vælger vi

$$\begin{aligned} Q^2 &\equiv -q^2 \qquad (>0) \\ \nu &\equiv \frac{p \cdot q}{M} = E - E' \end{aligned} \tag{10.4}$$

Her er E og E' størrelsen af energierne af l og l' i laboratoriesystemet, hvor der gælder

$$p^\mu = (M, \vec{0}) \quad , \quad k^\mu = (E, \vec{k}) \quad , \quad k'^\mu = (E', \vec{k}') \tag{10.5}$$

hvoraf udtrykket for ν fremgår.

Vi skal snart se, hvorledes det inklusive tværsnit bekvemt kan udtrykkes ved hjælp af visse strukturfunktioner, som indeholder den dynamiske information om nukleonens struktur, som vi er interesseret i at undersøge. Strukturfunktionerne vil i almindelighed afhænge af både ν og Q^2. Bjorkens fundamentale forslag var, at de ved høje energier *kun* skulle afhænge af *Bjorkens scalingvariabel* x, defineret ved

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} \tag{10.6}$$

Lad os bestemme det tilladte kinematiske område for x. Hvis vi lader $\vec{k}$ falde sammen med $\hat{z}$ (beamaksen), betegner (l')'s spredningsvinkel med θ samt negligerer leptonmasserne, kan vi skrive (spredning i y-z-planen)

$$k^\mu = (E, 0, 0, E) \quad ; \quad k'^\mu = (E', 0, E' \sin\theta, E' \cos\theta)$$

og

$$q^2 = (k - k')^2 = -2kk' = -2EE'(1 - \cos\theta) \tag{10.7}$$

hvoraf

$$Q^2 > 0$$

Kvadratet på massen af hadronsystemet i sluttilstanden er

$$W^2 \equiv (p + q)^2 = M^2 + 2M\nu - Q^2 \geq M^2 \tag{10.8}$$

da sluttilstanden må indeholde mindst én nukleon. Heraf fås

$$0 < x \leq 1 \tag{10.9}$$

En anden bekvem variabel, som vi vil bruge, er

$$y \equiv \frac{p \cdot q}{p \cdot k} = \left(1 - \frac{E'}{E}\right) \tag{10.10}$$

for hvilken der trivielt gælder

$$0 < y < 1$$

10.3 Strukturfunktionerne

Vor beskrivelse af processen i fig.(10.1) er som nævnt og som figuren antyder, baseret på laveste ordens perturbationsteori i α (for elektromagnetiske processer) eller G (for svage processer). Derimod ønsker vi endnu ikke at foretage nogen antagelser om de stærke vekselvirkninger, dvs om nukleonens struktur. Det venter vi med til næste afsnit.

Perturbationsteori i α eller G tillader os imidlertid - efter hvad vi har lært - at nedskrive amplituden for processen på følgende form:

$$T = \Phi\langle l'|j_\mu|l\rangle\langle n|J^\mu|p\rangle \tag{10.11}$$

Her refererer matrikselementet $\langle l'|j_\mu|l\rangle$ til vertexet $l \to l' +$ "q", som antages bekendt, da leptonerne formodes strukturløse. Matrikselementet $\langle n|J^\mu|p\rangle$ refererer tilsvarende til vertexet $p +$ "q" $\to |n\rangle$, som er den proces, vi ønsker at studere. Faktoren Φ indeholder koblingskonstanter og vektormeson propagatorer.

Lad os gennemgå de forskellige tilfælde, vi vil interessere os for:

1. Elektron- eller myon-produktion:

$$\Phi = \frac{e^2}{q^2} \tag{10.12}$$

svarende til en fotonpropagator og den sædvanlige elektromagnetiske koblingskonstant. Fasen på Φ er uinteressant, da vi kun skal interessere os for tværsnit, dvs absolutkvadratet på T.

Leptonstrømmen j^μ er givet ved

$$j^\mu(x) = \bar{e}(x)\gamma^\mu e(x) + \bar{\mu}(x)\gamma^\mu \mu(x) + \dots \tag{10.13}$$

hvor Dirac-feltet $e(x)$ hører til elektronen etc. Hadronstrømmen kan udtrykkes i kvarkfelter som

$$J^\mu(x) = \sum_i Q_i \bar{q}_i(x)\gamma^\mu q_i(x) \tag{10.14}$$

hvor i nummererer kvarkflavours, og hvor vi kan underforstå en passende coloursum, der gør J^μ til en coloursinglet.

Bemærk, at medens matrikselementet dannes relativt trivielt af j^μ, er dette ikke tilfældet med J^μ, da de relevante tilstande her er fysiske hadrontilstande, som er opbygget på kompliceret og delvis ukendt måde af kvarkfelterne i (10.14). Det er netop denne opbygning, vi ønsker at studere.

2. Charged Current neutrinoproduktion:

   Efter kap. 8.2 og 8.4 får vi

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{G}{\sqrt{2}} && (10.15)\\ j^\mu &= \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{l}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_l \quad \text{eller h.c} && (10.16)\\ J^\mu &= \bar{\psi}_{d_c}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_u + \bar{\psi}_{s_c}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_c \quad \text{eller h.c.} && (10.17) \end{aligned}$$

3. Neutral Current neutrinoproduktion:

   Her kan vi foreløbig kun på simpel måde nedskrive udtryk, såfremt vi tillader os selv at betragte kvark*tilstande*. Vi betragter altså processen

$$\text{“}\nu\text{”} + \text{“}q\text{”} \to \text{“}\nu\text{”} + \text{“}q\text{”} \tag{10.18}$$

   Her betegner “ν” en venstrehåndet neutrino af et bestemt leptontal eller en tilsvarende højrehåndet antineutrino. Analogt betegner “q” en venstre- eller højrehåndet kvark eller antikvark af bestemt flavour. Vi finder så ved at kombinere resultater fra kap. 8, specielt ligningerne (8.82), (8.84), (8.86), (8.88), (8.97) og (8.99)

$$\begin{aligned} \Phi &= \sqrt{2}\,G(I_3 - Q\sin^2\theta_W)_{\text{“}\nu\text{”}}(I_3 - Q\sin^2\theta_W)_{\text{“}q\text{”}} && (10.19)\\ j^\mu &= \sum_l \bar{\nu}_l\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_l && (10.20)\\ J^\mu &= \sum_q \bar{q}^\mu(1\pm\gamma_5)q && (10.21) \end{aligned}$$

   hvor $(1\pm\gamma_5)$ skal bruges, alt efter om vi betragter højre- eller venstrehåndede kvarker.

   Bemærk, at da $I_3 = +\frac{1}{2}$ for venstrehåndede neutrinoer, medens $Q = 0$, gælder altid

$$(I_3 - Q\sin^2\theta_W)_{\text{“}\nu\text{”}} = \frac{1}{2} \tag{10.22}$$

   for neutrinoreaktioner.

I det følgende vil vi overalt benytte ovenstående, hvad leptonstrømmen angår. Derimod vil vi endnu i dette afsnit danne en modeluafhængig formalisme for matrikselementer af hadronstrømmen.

Lad os først opskrive udtrykket for det inklusive tværsnit (efter kap. 1):

$$d\sigma = \frac{d^3k'}{2E'(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\sum_n (2\pi)^4\delta^4(p+k-p_n-k')|T|^2 \tag{10.23}$$

Her tænker vi os, at $\sum_n$ dels inkluderer en sum over de forskellige hadronkanaler $N+\pi, N+2\pi, \ldots$, dels et flerdobbelt integral over de respektive 4-impulser:

$$\Pi \frac{d^3p_i}{2E_i(2\pi)^3}$$

endvidere er $2\sqrt{\lambda} \simeq 2p^0 \cdot 2k^0 = 4ME$ i laboratoriesystemet.

Endelig vil vi underforstå, at der er udført en sum over spin-egenværdier i sluttilstanden og en tilsvarende midling over dem i begyndelsestilstanden.

Ved hjælp af (10.11) skriver vi så ($q = k - k'$)

$$\sum_n (2\pi)^4\delta^4(p+q-p_n)|T|^2 \equiv 4\pi\Phi^2 w_{\mu\nu}W^{\mu\nu} \tag{10.24}$$

hvor vi har indført lepton- og hadrontensorer $w_{\mu\nu}$ og $W^{\mu\nu}$:

$$w_{\mu\nu} = (\text{spinsummeret/midlet})\ \langle l'|j_\mu(0)|l\rangle\langle l'|j_\nu(0)|l\rangle^* \tag{10.25}$$

som vi snart skal evaluere eksplicit, samt

$$W^{\mu\nu} = (\text{spinsummeret/midlet})\frac{1}{4\pi}\sum_n (2\pi)^4\delta^4(p+q-p_n)\langle p|J^{\nu\dagger}(0)|n\rangle\langle n|J^\mu(0)|p\rangle \tag{10.26}$$

Vi bruger nu (2.10), at

$$J_\mu(x) = e^{ixP}J_\mu(0)e^{-ixP}$$

hvoraf

$$\langle p|J^\dagger_\mu(x)|n\rangle = e^{ix(p-p_n)}\langle p|J^\dagger_\mu(0)|n\rangle$$

så

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi}\overline{\sum}_{\text{spin}}\sum_n\int d^4x\ e^{ixq}\langle p|J^{\dagger\nu}(x)|n\rangle\langle n|J^\mu(0)|p\rangle \\ &= \frac{1}{4\pi}\overline{\sum}_{\text{spin}}\int d^4x\ e^{ixq}\langle p|J^{\dagger\nu}(x)J^\mu(0)|p\rangle \end{aligned} \tag{10.27}$$

da $\sum_n |n\rangle\langle n| =$ identiteten.

Vi ser, at $W^{\mu\nu}$ er en Lorentz-tensor, som afhænger af de to 4-vektorer p og q. Heraf fås, idet vi udvikler på symmetriske og antisymmetriske tensorer, [3]

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu}W_1 + \frac{p^\mu p^\nu}{M^2}W_2 + \frac{q^\mu q^\nu}{M^2}W_5 + \frac{1}{2M^2}(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)W_4 \\ &+ \frac{i}{2M^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha q_\beta W_3 + \frac{i}{2M^2}(p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu)W_6 \end{aligned} \tag{10.28}$$

[3]Fortegnet på W_3 ses ofte modsat, men det skyldes en modsat konvention for ε. Vi benytter $\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = +1$.

hvor vi har indført 6 skalære *strukturfunktioner* $W_{1\ldots6}$, som afhænger af de to Lorentz-invarianter

$$Q^2 = -q^2 \quad \text{og} \quad \nu = \frac{p \cdot q}{M}$$

For at danne det differentielle tværsnit skal dette udtryk kontraheres med $w_{\mu\nu}$. I næste paragraf skal vi udregne $w_{\mu\nu}$ og herved se, at

$$0 = q^\mu w_{\mu\nu} = q^\nu w_{\mu\nu}$$

i grænsen, hvor vi negligerer leptonmasser. Vi kunne således egentlig se helt bort fra W_5, W_4 og W_6. Imidlertid er der tradition for at benytte en notation, der er inspireret af elektronproduktion tilfældet. Her har vi på grund af strømbevarelse

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

og ved at bruge (10.27) og partiel integration

$$q_\mu W^{\mu\nu} = 0 \tag{10.29}$$

Symmetriske tensorer med den egenskab, at kontraktion med q_μ giver nul, er

$$g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} = g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{Q^2}$$

og

$$\left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu\right)\left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu\right) = \left(p^\mu + \frac{M\nu}{Q^2} q^\mu\right)\left(p^\nu + \frac{M\nu}{Q^2} q^\nu\right)$$

Heraf fås, idet vi negligerer W_4, W_5, W_6,

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= -\left(g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{Q^2}\right) W_1 + \frac{1}{M^2}\left(p^\mu + \frac{M\nu}{Q^2} q^\mu\right)\left(p^\nu + \frac{M\nu}{Q^2} q^\nu\right) W_2 \\ &\quad + \frac{i}{2M^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta W_3 \end{aligned} \tag{10.30}$$

Bemærk, at $q_\mu[\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta] \equiv 0$ af symmetrigrunde. Det viser sig bekvemt at definere

$$\begin{aligned} F_1(Q^2, x) &\equiv W_1(Q^2, \nu) \\ F_2(Q^2, x) &\equiv \frac{1}{M} \nu W_2(Q^2, \nu) \\ F_3(Q^2, x) &\equiv \frac{1}{M} \nu W_3(Q^2, \nu) \end{aligned} \tag{10.31}$$

hvor vi har valgt de to uafhængige variable som Q^2 og $x \equiv Q^2/2M\nu$ fremfor Q^2 og ν. Vores endelige udtryk for $W^{\mu\nu}$ bliver så

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= -\left(g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{Q^2}\right) F_1 + \frac{1}{M\nu}\left(p^\mu + \frac{q^\mu}{2x}\right)\left(p^\nu + \frac{q^\nu}{2x}\right) F_2 \\ &\quad + \frac{i}{2M\nu} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta F_3 \end{aligned} \tag{10.32}$$

Bjorkens scalingsforslag var, at de dimensionsløse strukturfunktioner F_1, F_2, F_3 kun skulle afhænge af x for store værdier af Q^2. Dette resultat skal vi udlede i partonmodellen.

For den elektromagnetiske strøm er matrikselementer af J_μ reelle.[4] Det følger så af (10.26), at $W^{\mu\nu} = W^{\nu\mu}$, eller

$$F_3 \text{ (elektromagnetisk)} \equiv 0 \tag{10.33}$$

Vi skal senere se, at højre- og venstrehåndede kvarker giver modsatte bidrag til F_3. Heraf følger (10.33) igen, da de elektromagnetiske vekselvirkninger er paritetsinvariante.

10.4 Det dybt uelastiske tværsnit

Vi ønsker nu at udregne tværsnittet (10.23) i termer af strukturfunktionerne F_1, F_2, F_3. Som variable vil vi benytte scalingvariablene x og y (10.6) og (10.10) suppleret med beamleptonens laboratorieenergi E. Først udtrykker vi faserumsfaktoren for l' ved hjælp af x og y, og dernæst danner vi de relevante udtryk for leptontensoren $w_{\mu\nu}$, som skal kontraheres med $W^{\mu\nu}$ givet ved (10.26) og (10.32).

Af (10.4), (10.6), (10.7) og (10.10) fås

$$x = \frac{EE'(1-\cos\theta)}{M(E-E')} \quad , \quad y = 1 - \frac{E'}{E}$$

For faserumsfaktoren i (10.23) findes i laboratoriet, idet vi integrerer over azimutalvinkel

$$\begin{aligned} \frac{d^3k'}{2E'(2\pi)^3}\,\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} &= \frac{1}{4ME}\,\frac{1}{2E'(2\pi)^3}\,2\pi E'^2 dE' d\cos\theta \\ &= \frac{1}{32\pi^2}\,\frac{E'}{ME}\,dE' d\cos\theta \end{aligned} \tag{10.34}$$

Videre

$$dE' d\cos\theta = dx\ dy \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(E',\cos\theta)} \right|^{-1}$$

Da

$$\frac{\partial y}{\partial\cos\theta} = 0$$

behøver vi blot at udregne

$$\frac{\partial x}{\partial\cos\theta} = \frac{-EE'}{M(E-E')} = -\frac{E}{M}\,\frac{1-y}{y} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial y}{\partial E'} = -\frac{1}{E}$$

hvoraf

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(E',\cos\theta)} \right| = \frac{1}{M}\,\frac{1-y}{y}$$

Heraf fås endelig

$$\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{d^3k'}{2E'(2\pi)^3} = \frac{1}{32\pi^2}\,\frac{1}{M}(1-y)\cdot M\,\frac{y}{1-y} dx\ dy = \frac{y}{32\pi^2}\,dx\ dy \tag{10.35}$$

Vi har også

$$Q^2 = 2M(E-E')\cdot x = 2ME\ xy \tag{10.36}$$

[4] Som følge af P og T invarians. Vi skal senere udlede resultatet eksplicit i partonmodellen.

Dernæst evaluerer vi leptontensoren $w_{\mu\nu}$. For elektroproduktion har vi ($m_e \approx 0$)

$$w_{\mu\nu}(\text{elektron}) = \frac{1}{2} Tr\{ \not{k}'\gamma_\mu \not{k}\gamma_\nu \} \tag{10.37}$$

For neutrino- henholdsvis antineutrinoproduktion fås (jfr. (8.30), (8.31)), idet de indkommende neutrinoer automatisk er polariserede,

$$\begin{aligned} w_{\mu\nu}(\text{neutrino}) &= Tr\{ \not{k}'\gamma_\mu(1-\gamma_5) \not{k}(1+\gamma_5)\gamma_\nu \} \\ &= 2\{Tr\{ \not{k}'\gamma_\mu \not{k}\gamma_\nu\} - Tr\{\gamma_5 \not{k}'\gamma_\mu \not{k}\gamma_\nu\}\} \qquad (10.38) \\ w_{\mu\nu}(\text{antineutrino}) &= w_{\mu\nu}(\text{neutrino}\ ;\ \ k \leftrightarrow k') \qquad (10.39) \end{aligned}$$

Sammenfattende

$$\begin{aligned} w_{\mu\nu}(\text{elektron}) &\equiv 2\overline{w}_{\mu\nu} \\ w_{\mu\nu}\begin{pmatrix}\text{neutrino}\\ \text{antineutrino}\end{pmatrix} &\equiv 8(\overline{w}_{\mu\nu} \mp w^5_{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{10.40}$$

hvor

$$\begin{aligned} \overline{w}_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{4} Tr\{ \not{k}'\gamma_\mu \not{k}\gamma_\nu\} \\ w^5_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} Tr\{\gamma_5 \not{k}'\gamma_\mu \not{k}\gamma_\nu\} \end{aligned} \tag{10.41}$$

Nu er ifølge de sædvanlige sporregler

$$\overline{w}_{\mu\nu} = k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - k' \cdot k g_{\mu\nu}$$

eller, idet vi indfører $q = k - k'$ $(k' = k - q, \quad q^2 = -2k \cdot k')$,

$$\overline{w}_{\mu\nu} = 2k_\mu k_\nu - (q_\mu k_\nu + q_\nu k_\mu) + \frac{1}{2} q^2 g_{\mu\nu} \tag{10.42}$$

Af (8.32) fås også

$$w^5_{\mu\nu} = -i\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} k'^\alpha k^\beta = +i\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} q^\alpha k^\beta = -i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^\alpha k^\beta \tag{10.43}$$

Bemærk, at $q^\mu w_{\mu\nu} = q^\nu w_{\mu\nu} = 0$, som lovet i forrige afsnit.

Lad os nu udføre kontraktionen $\overline{w}_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$. Da $\overline{w}$ er symmetrisk, bidrager F_3 ikke, og da q kontraheret med $W^{\mu\nu}$ forsvinder, får vi kun bidrag fra første og sidste led i (10.42). Vi får så

$$\begin{aligned} \overline{w}_{\mu\nu} W^{\mu\nu} &= -2\left(k^2 - \frac{(k\cdot q)^2}{q^2}\right) F_1 - \frac{1}{2} q^2 \left(4 - \frac{q^2}{q^2}\right) F_1 \\ &\quad + \frac{1}{M\nu} F_2 \left\{ 2\left[p\cdot k + \frac{1}{2x} q \cdot k\right]^2 + \frac{1}{2} q^2 \left[p + \frac{1}{2x} q\right]^2 \right\} \end{aligned} \tag{10.44}$$

Nu er $k^2 = m^2 \simeq 0$, og af $k' = k - q$ fås $k \cdot k' = k^2 - k \cdot q \simeq -k \cdot q$ eller $k \cdot q = \frac{1}{2} q^2$, $p \cdot k = ME$ i laboratoriet.

Vi finder så af (10.36)

$$p \cdot k - \frac{1}{2x}\, q \cdot k = ME\left(1 - \frac{1}{2}y\right)$$

og, da $q \cdot (p + \frac{1}{2x}q) = 0$ og vi negligerer $p^2 = M^2$ ved høje energier, er

$$\left(p + \frac{1}{2x}q\right)^2 = \frac{p \cdot q}{2x} = ME\frac{y}{2x}.$$

Heraf fås

$$\begin{aligned}
\overline{w}_{\mu\nu} W^{\mu\nu} &= -q^2 F_1 + \frac{1}{MEy}\, F_2\, (ME)^2 \left\{2(1 - \frac{1}{2}y)^2 - xy \cdot \frac{y}{2x}\right\} \\
&= ME\left[2xyF_1 + \frac{1}{y}\, F_2(2 - 2y)\right] \\
&= \frac{ME}{y}\, \left\{\left[1 + (1 - y)^2\right] F_2 - y^2 R \cdot 2xF_1\right\}
\end{aligned} \tag{10.45}$$

hvor

$$R \equiv \frac{F_2 - 2xF_1}{2xF_1} \tag{10.46}$$

For at kontrahere $w^5_{\mu\nu}$ med $W^{\mu\nu}$ bemærker vi først, at antisymmetri af $w^5_{\mu\nu}$ i μ og ν betyder, at vi kun får bidrag fra F_3 i (10.32). Vi bruger, at

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} = -2\left[\delta^\gamma_\alpha \delta^\delta_\beta - \delta^\delta_\alpha \delta^\gamma_\beta\right]$$

hvoraf

$$\begin{aligned}
w^5_{\mu\nu} W^{\mu\nu} &= -\frac{1}{M\nu}\, p_\gamma q_\delta q^\alpha k^\beta \left[\delta^\gamma_\alpha \delta^\delta_\beta - \delta^\delta_\alpha \delta^\gamma_\beta\right] F_3 \\
&= -\frac{1}{M\nu}\, \left[(p \cdot q)(q \cdot k) - (q^2)(p \cdot k)\right] F_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^5_{\mu\nu} W^{\mu\nu} &= \frac{-1}{MEy}\, [MEy(-MExy) + 2MExy \cdot ME]\, F_3 \\
&= -\frac{ME}{y}\, [2y - y^2] x F_3 \\
&= -\frac{ME}{y}\, [1 - (1 - y)^2] x F_3
\end{aligned} \tag{10.47}$$

Vi kan nu samle alle resultater og nedskrive de dybt uelastiske inklusive tværsnit efter (10.23), (10.24), (10.12) ,(10.16), (10.35), (10.40),(10.45) og (10.47):
For elektromagnetisk produktion med elektron- eller myonbeams har vi

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(l)}{dx\ dy} &= \frac{1}{8\pi}\, \frac{e^4}{q^4}\, \cdot 2ME\left\{[1 + (1 - y)^2] F^l_2 - y^2 R 2x F^l_1\right\} \\
&= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} EM\left\{[1 + (1 - y)^2] F^l_2 - y^2 R \cdot 2x F^l_1\right\}
\end{aligned} \tag{10.48}$$

For neutrino- henholdsvis antineutrinobeams fås

$$\frac{d\sigma}{dxdy}\left[\frac{\nu}{\bar{\nu}}\right] = \frac{1}{\pi}\,\frac{G^2}{2}\cdot EM\left\{[1+(1-y)^2]F_2^{\frac{\nu}{\bar{\nu}}} - y^2 R 2x F_1^{\frac{\nu}{\bar{\nu}}} \pm [1-(1-y)^2]xF_3^{\frac{\nu}{\bar{\nu}}}\right\} \quad (10.49)$$

Vi bemærker det allerede i sidste kapitel nævnte faktum, at neutrinotværsnittet vokser lineært med beamenergien (når vi betragter $M_Z \sim M_W \sim \infty$), og at det er proportionalt med targetmassen. Det elektromagnetiske tværsnit derimod falder som $(ME)^{-1}$ ifølge (10.48) og (10.36). Begge dele kan føres tilbage til dimensionen af G og (manglen af samme af) α.

10.5 Partonmodellen I. Elektron- og myonproduktion

Lad os forsøge at forestille os en nukleon, som bevæger sig med en meget stor impuls P langs z-aksen, så dens 4-impuls er (for $P \gg M$)

$$p^\mu = (P, 0, 0, P) \quad (10.50)$$

Nukleonen må tænkes som en lille "sæk" indeholdende (1) *valens*kvarker (*uud* for protonen, *udd* for neutronen); (2) *sø*kvarker (eng. sea quarks), dvs et større eller mindre antal $(q\bar{q})$-par i alle mulige flavours; (3) gluoner.

Disse bestanddele kalder vi med et fælles navn *partoner*. På grund af vekselvirkningerne mellem dem finder der en stadig omdannelse sted mellem gluoner og søkvarker. I det "infinite momentum frame" (10.50), hvor vi vælger at betragte nukleonen, foregår imidlertid alle processer i "slow motion" som følge af Lorentz-tidsforlængelsen. Denne effekt må forventes at være særlig vigtig, hvis vi vælger at "se" på nukleonen med en højvirtuel foton med et meget stort Q^2. For en sådan foregår nemlig vekselvirkningen mellem foton og ladning inden for et meget kort tidsrum $\Delta\tau$ af størrelsen

$$\Delta\tau \sim \frac{1}{Q}$$

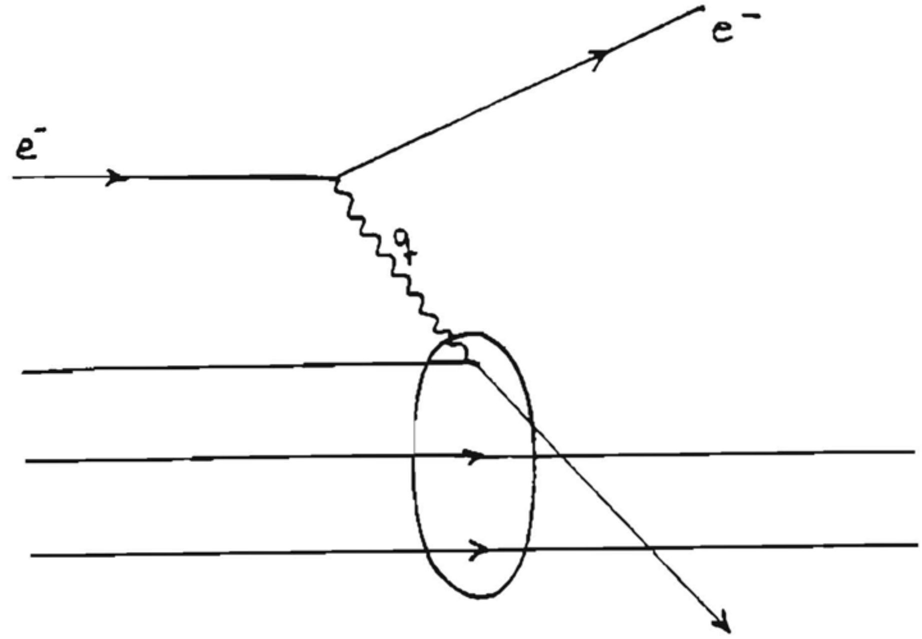
I korte tidsrum (små afstande, store impulsoverførsler) venter vi desuden, at vekselvirkningerne er "svage" - dette er indholdet af idéen om asymptotisk frihed, som QCD forudsiger.

Herved er vi ført til et billede af nukleonen, hvor denne kan beskrives ved en næsten *statisk*, karakteristisk fordeling af næsten *frie* kvarker, antikvarker og gluoner. Ved hjælp af virtuelle fotoner kan vi kun "se" ladninger, dvs kvarker, men ikke gluoner. Vi kan heller ikke se forskel på kvarker og antikvarker med samme ladning. De svage strømme kan heller ikke se gluonerne, men de *kan* se forskel på kvarker og antikvarker; herom senere.

Vi antager nu videre, at til hver kvarkflavour hører en *éndimensional* fordelingsfunktion

$$\frac{q(x)}{x}$$

således at $\frac{q(x)}{x}$ betegner tætheden af kvarker af den pågældende flavour med brøkdelen x af nukleonens totale impuls (eller energi) P. Dette betyder, at vi her (i den simpleste



Figur 10.2: Dybt uelastisk spredning i partonbilledet.

formulering) ser bort fra kvarkens eventuelle transversale impuls. Denne venter vi er begrænset af nukleonens inverse udstrækning, m.a.o. at dens betydning er forsvindende, når $P \to \infty$.

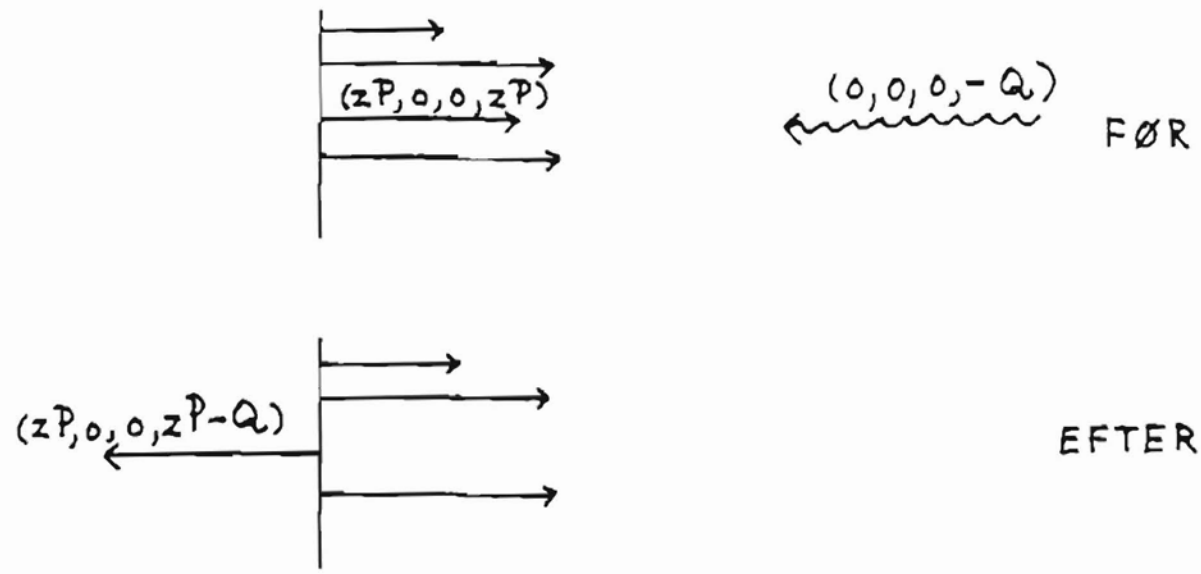
Fig. (10.2) viser skematisk den måde, en dybt uelastisk spredningsproces tænkes at foregå på i partonmodellen. Den virtuelle foton med 4-impuls q vekselvirker *ikke* med nukleonen som helhed, men kun med én af dens "punktformede", "frie" kvarker. Nukleonen er indtegnet Lorentz-forkortet, fordi vi tænker på at beskrive processen i "infinite momentum frame". Den ramte kvark har efter processen en 4-impuls, der afviger stærkt fra, hvad den kunne tillade sig, såfremt nukleonen skulle kunne fortsætte "ubeskadiget". Kvarken vil med sin "skæve" 4-impuls forsøge at løbe væk fra sit nukleonfængsel. Dette giver anledning til en række meget komplicerede processer domineret af "confinement"-mekanismer, som vi ikke forstår så godt. Men vi må forestille os, at kvarken trækker sit colourfelt med sig, - dette bryder så op under dannelse af nye kvark-antikvarkpar.
Slutresultatet er, at vi har fået en hel byge af hadroner, en jet, hvis 4-impuls må formodes at indeholde information om retningen af den virtuelle foton.

Imidlertid foregår alle disse komplicerede processer først "længe" efter, at kvarken er blevet ramt af fotonen. Da vi endvidere kun interesserer os for det inklusive tværsnit, hvor hadronsystemet ikke observeres, kan vi i en første tilnærmelse helt se bort fra kvarkens videre skæbne.

Lad os nu betragte en dybt uelastisk proces, hvor leptonen har afleveret en 4-impuls, q^μ, karakteriseret ved en bestemt værdi af

$$Q^2 = -q^2 \quad \text{og} \quad x = \frac{Q^2}{2p \cdot q}$$

I partonmodellen kan vi slutte, at den virtuelle foton har ramt en kvark (eller en antikvark), hvis brøkdel af nukleonens 4-impuls netop er x (!). Denne fundamentale fysiske



Figur 10.3: Parton fortolkning af Bjorken scaling.

betydning af Bjorkens scalingvariable forstås lettest ved at se på sammenstødet i et nyt inertialsystem, hvor nukleonen og fotonen bevæger sig mod hinanden (ikke nødvendigvis så deres totale 3-impuls er nul) langs z-aksen. Vi vælger systemet, så

$$q^\mu = (0, 0, 0, -Q)$$

Dette er altid muligt, da $q^2 = -Q^2 < 0$.

Idet vi sætter protonens 4-impuls til

$$p^\mu = (P, 0, 0, P)$$

har vi

$$p \cdot q = PQ \quad \text{og} \quad x = \frac{Q}{2P} \tag{10.51}$$

samt $P = M\nu/Q$.

Fig. (10.3) viser situationen før og efter vekselvirkningen mellem fotonen og en parton med impuls zP. Da fotonen ikke overfører nogen energi til partonen (kun 3-impuls), og vi negligerer alle masser (ved høje energier), så må der gælde

$$zP - Q = -zP$$

eller

$$Q = 2zP$$

som - sammenholdt med (10.51) - netop giver

$$z = x$$

Bemærk, at dette resultat er en konsekvens af, at partonen behandles som fri (på masseskallen) før og efter stødet.

Lad os nu i detalje udlede et udtryk for strukturfunktionerne F_1 og F_2 i partonmodellen. Vi betragter en kvark af en bestemt flavour, for hvilken tætheden i nukleonen er $q(x)/x$.

Det generelle udtryk for $W^{\mu\nu}$ er (10.26):

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{n \\ \text{(spinsummeret/midlet)}}} (2\pi)^4\delta^4(p+q-p_n)\langle p|J^{\nu\dagger}(0)|n\rangle\langle n|J^{\mu}(0)|p\rangle \qquad (10.52)$$

Pointen i partonmodellen er, at dynamikken for denne hadrontensor stort set er identisk med dynamikken for leptontensoren $w_{\mu\nu}$. Den væsentligste forskel er, at lepton-4-impulsen k^μ skal erstattes med parton-4-impulsen $\overline{p}^\mu = xp^\mu$, og at foton-4-impulsen q^μ skal erstattes med $-q^\mu$, da den regnes med fortegn *bort* fra leptonvertexet og *mod* hadronvertexet.

Vi tænker så på nukleonen som bestående af en parton med 4-impuls $\overline{p}^\mu = xp^\mu$ samt "resten" med 4-impuls $(1-x)p^\mu$. Tilstanden $|n\rangle$ består dels af den spredte parton med 4-impuls $\overline{p}\,'^\mu$, dels af den samme "rest" med 4-impuls $(1-x)p^\mu$. Vi har derfor

$$\begin{aligned}\sum_n (2\pi)^4\delta^4(p+q-p_n) &= \int \frac{d^3\overline{p}\,'}{2\overline{p}\,'_0(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(xp+(1-x)p+q-[\overline{p}\,'+(1-x)p]) \\ &= \int \frac{d^3\overline{p}\,'}{2\overline{p}\,'_0(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(xp+q-\overline{p}\,') \qquad (10.53)\end{aligned}$$

og

$$\langle p|J^\dagger_\mu(0)|n\rangle\langle n|J_\nu(0)|p\rangle = \int_0^1 dx \frac{\langle p|p\rangle}{\langle\overline{p}|\overline{p}\rangle}\langle p|J^\dagger_\mu|\overline{p}\,'\rangle\langle\overline{p}\,'|J_\nu|\overline{p}\rangle\frac{q(x)}{x}$$

hvor $|\overline{p}\rangle$ og $|\overline{p}\,'\rangle$ er partontilstande, medens $|p\rangle$ er en *nukleon*tilstand. For mere omhyggeligt at udlede dette sidste resultat, bibeholder vi tilstandsnormeringerne. Dernæst benytter vi, at vi som et fuldstændigt set af tilstande ($|n\rangle$) kan vælge tilstande, specificeret ved deres parton-indhold. Lad således

$$|\overline{p},r\rangle$$

betegne en partonkomponent af nukleontilstanden i begyndelsessituationen, med den parton, der vil blive ramt ($\overline{p}$) eksplicit specificeret, medens "resten" blot noteres som $|r\rangle$. efter at fotonen har ramt den omtalte parton, har den fået sin 4-impuls ændret til $\overline{p}\,'$, og som tilstanden $|n\rangle$ vælger vi derfor $|\overline{p}\,',r\rangle$. vi har så

$$\begin{aligned}&\frac{\langle p|J^\dagger_\mu|n\rangle\langle n|J_\nu|p\rangle}{\langle n|n\rangle} \\ &= \sum_{\overline{p}} \frac{\langle p|\overline{p},r\rangle\langle\overline{p},r|J^\dagger_\mu|\overline{p}\,',r\rangle\langle\overline{p}\,',r|J_\nu|\overline{p},r\rangle\langle\overline{p},r|p\rangle}{\langle\overline{p},r|\overline{p},r\rangle\langle\overline{p}\,',r|\overline{p}\,',r\rangle\langle\overline{p},r|\overline{p},r\rangle} \\ &= \sum_{\overline{p}} \left|\frac{\langle p|\overline{p},r\rangle}{\langle\overline{p}|\overline{p}\rangle\langle r|r\rangle}\right|^2 \frac{\langle r|r\rangle\langle\overline{p}|J^\dagger_\mu|\overline{p}\,'\rangle\langle\overline{p}\,'|J_\nu|\overline{p}\rangle\langle r|r\rangle}{\langle\overline{p}\,'|\overline{p}\,'\rangle\langle r|r\rangle} \qquad (10.54)\end{aligned}$$

Vi sætter nu

$$|\langle p|\overline{p},r\rangle|^2 = |\psi|^2\langle p|p\rangle\langle\overline{p}|\overline{p}\rangle\langle r|r\rangle$$

hvor ψ er "nukleonens bølgefunktion" i impulsrummet. Den er relateret til den indførte kvark-fordelingsfunktion ved

$$\left(\sum_{\overline{p}_\perp}|\psi|^2\right)\frac{dp_\parallel}{(2\pi)2E} \equiv \frac{q(x)}{x}dx$$

Herefter følger det påståede.

Der gælder så

$$\frac{\langle p|p\rangle}{\langle\overline{p}|\overline{p}\rangle} = \frac{2p^0}{2\overline{p}^0} = \frac{1}{x}$$

Endelig bruger vi partonmodellen til at sætte

$$\langle\overline{p}|J_\nu^\dagger|\overline{p}\,'\rangle\langle\overline{p}\,'|J_\mu|\overline{p}\rangle = Q_q^2 w_{\mu\nu}(\overline{p}, -q)$$

der udtrykker, at kvarken har ladning $Q_q \cdot e$, men ellers opfører sig dynamisk som en lepton. Vi har så

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\, Q_q^2 \int_0^1 dx\, \frac{q(x)}{x} \int \frac{d^3\overline{p}\,'}{(2\pi)^3 2\overline{p}\,'_0}\, (2\pi)^4\delta^4(\overline{p} + q - \overline{p}\,')w_{\mu\nu}(\overline{p}, -q)$$

hvor $\overline{p}\,'_0 \equiv |\vec{\overline{p}}\,'|$, idet vi negligerer kvarkmasser.

Her kan $d^3\overline{p}\,'$-integrationen uden videre udføres, og vi får så

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2}Q_q^2 \int_0^1 dx\, \frac{q(x)}{x}\, \frac{1}{x}\, \frac{1}{2|\vec{\overline{p}} + \vec{q}\,|}\, \delta(\overline{p} + q_0 - |\vec{\overline{p}} + \vec{q}\,|)w_{\mu\nu}(\overline{p}, -q)$$

Ved at bruge

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\, \delta(x - x_0) \qquad \text{for} \quad f(x_0) = 0$$

fås

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2|\vec{\overline{p}} + \vec{q}\,|}\, \delta(\overline{p}^0 + q^0 - |\vec{\overline{p}} + \vec{q}\,|) &= \delta\left[(\overline{p}^0 + q^0)^2 - (\vec{\overline{p}} + \vec{q}\,)^2\right] \\
&= \delta\left[(\overline{p}^2 + 2\overline{p}\cdot q + q^2\right] \simeq \delta\left[2xp\cdot q - Q^2\right] \\
&\simeq \frac{1}{2p\cdot q}\, \delta\left(x - \frac{Q^2}{2p\cdot q}\right) \\
&= \frac{1}{2M\nu}\, \delta(x - x_{Bj})
\end{aligned} \tag{10.55}$$

hvor

$$x_{Bj} \equiv \frac{Q^2}{2p\cdot q} = \frac{Q^2}{2M\nu}$$

igen er Bjorkens scalingvariabel.

dx-integration kan så udføres trivielt, og idet vi dropper index Bj, får vi

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4M\nu}\, Q_q^2\, \frac{q(x)}{x^2}\, w_{\mu\nu}(xp, -q) \tag{10.56}$$

Af (10.40) og (10.42) har vi

$$\begin{aligned}
w_{\mu\nu}(xp, -q) &= 4x^2 p_\mu p_\nu + 2x(q_\mu p_\nu + q_\nu p_\mu) - 2xp\cdot q g_{\mu\nu} \\
&= 4x^2\left[p_\mu p_\nu + \frac{1}{2x}(q_\mu p_\nu + q_\nu p_\mu) - \frac{pq}{2x} g_{\mu\nu}\right] \\
&= 4x^2\left[p_\mu p_\nu + \frac{1}{2x}(q_\mu p_\nu + q_\nu p_\mu) + \frac{1}{4x^2} q_\mu q_\nu - \frac{1}{4x^2} q_\mu q_\nu - \frac{M\nu}{2x} g_{\mu\nu}\right] \\
&= 4x^2\left[(p_\mu + \frac{1}{2x} q_\mu)(p_\nu + \frac{1}{2x} q_\nu) - \frac{M\nu}{2x}\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{10.57}$$

Indsættes i (10.56) fås omsider

$$W_{\mu\nu} = Q_q^2 q(x) \left[\frac{1}{M\nu} (p_\mu + \frac{1}{2x} q_\mu)(p_\nu + \frac{1}{2x} q_\nu) - \frac{1}{2x} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \right] \tag{10.58}$$

Sammenligning med (10.32) viser så at i en nukleon med flere kvarkfordelingsfunktioner $q_i(x)$ (i står for flavour, antiflavour etc.) haves

$$F_2(x, Q^2) = \sum_i Q_{q_i}^2 q_i(x) \tag{10.59}$$

$$F_2(x, Q^2) = 2x F_1(x, Q^2) \tag{10.60}$$

Disse fundamentale resultater indeholder essensen af partonmodellen:

(i) Strukturfunktionerne afhænger kun af x, ikke af Q^2;

(ii) F_2 måler kvarkfordelingsindholdet i nukleonen;

(iii) relationen (10.60) kaldes Callan-Gross relationen og kan vises at være en konsekvens af, at kvarkerne blev behandlet som spin-1/2 partikler (vi sætter jo hadrontensoren proportional med leptontensoren). Denne relation er ensbetydende med

$$R = 0 \tag{10.61}$$

hvor R blev defineret i (10.46).

Eksperimentelt angives tværsnit oftest som kurver for $F_2(x, Q^2)$ (eller $\nu W_2(x, Q^2)$) samt for $R(x, Q^2)$.

Lad os indføre følgende kvark/antikvark fordelingsfunktioner:

$$\begin{aligned}
u(x) &= x \text{ gange } u - \text{kvark fordelingen i en proton,} \\
&\quad\ \text{eller } d - \text{kvark fordelingen i en neutron;} \\[1em]
d(x) &= x \text{ gange } d - \text{kvark fordelingen i en proton,} \\
&\quad\ \text{eller } u - \text{kvark fordelingen i en neutron;} \\[1em]
\overline{u}(x) \text{ og } \overline{d}(x) & \quad \text{de tilhørende antikvark fordelinger;} \\
s(x) \equiv \overline{s}(x) &= x \text{gange } s - kvarkfordelingen\ i\ protoner \\
&\quad\ \text{eller neutroner;} \\
c(x) \equiv \overline{c}(x) &= \text{ gange } c - \text{kvarkfordelingen i protoner} \\
&\quad\ \text{eller neutroner}
\end{aligned} \tag{10.62}$$

Vi har her antaget, at protoners og neutroners kvarkfordelinger fremgår af hinanden ved at ombytte u og d. Videre har vi brugt, at nukleoner har strangeness og charm = 0 samt antaget, at protoner og neutroner har identiske sø-kvark fordelinger.

For dybt uelastisk elektron- eller myonspredning på protoner og neutroner har vi så i denne model efter (10.60) og (10.62)

$$\begin{aligned}
F_2^{ep} &= \frac{1}{9} \left[4(u + \overline{u} + c + \overline{c}) + d + \overline{d} + s + \overline{s} \right] \\
F_2^{en} &= \frac{1}{9} \left[4(d + \overline{d} + c + \overline{c}) + u + \overline{u} + s + \overline{s} \right]
\end{aligned} \tag{10.63}$$

I praksis udføres eksperimenter ofte på tunge, næsten isoskalære kerner, hvor vi kan sætte antallet af protoner lig med antallet af neutroner. For et sådant isoskalært target får vi så, idet $\bar{c} = c$ og $\bar{s} = s$:

$$F_2^{e,I=0} = \frac{1}{9}\left[\frac{5}{2}4(u + \bar{u} + d + \bar{d}) + 8c + 2s\right]$$

Indføres betegnelserne

$$q \equiv u + d + s + c \quad \text{og} \quad \bar{q} = \bar{u} + \bar{d} + \bar{s} + \bar{c} \tag{10.64}$$

haves

$$\begin{aligned} F_2^{e,I=0} &= \frac{5}{18}\left[q + \bar{q} - \frac{6}{5}s + \frac{6}{5}c\right] \\ &\simeq \frac{5}{18}(q + \bar{q}) \quad \text{for kun små mængder } s \text{ og } c \end{aligned} \tag{10.65}$$

10.6 Partonmodellen II. Neutrinoproduktion. CC

Vi ønsker igen at bruge vores behandling af leptontensoren $w_{\mu\nu}$ givet ved (10.40), (10.42) og (10.43) som en model for behandlingen af hadrontensoren. Analogien er her gyldig mellem dels

$$\nu_\mu \rightarrow W^+ + \mu^-$$

og

$$W^- + \text{“}u\text{”} \rightarrow \text{“}d\text{”} \quad \text{og} \quad W^- + \text{“}\bar{d}\text{”} \rightarrow \text{“}\bar{u}\text{”}; \tag{10.66}$$

dels mellem

$$\bar{\nu}_\mu \rightarrow W^- + \mu^+$$

og

$$W^+ + \text{“}\bar{u}\text{”} \rightarrow \text{“}\bar{d}\text{”} \quad \text{og} \quad W^+ + \text{“}d\text{”} \rightarrow \text{“}u\text{”} \tag{10.67}$$

Her står (“u”, “d”) for enten (u, d) eller (c, s). Sammenlignet med leptonvertexet har kvarkvertexet en faktor $\cos\theta_C$ eller $\pm\sin\theta_C$ på sig, og altså faktorer $\cos^2\theta_C$ og $\sin^2\theta_C$ i $W_{\mu\nu}$. Da $\sin^2\theta_C \simeq 0.05$, og $\cos^2\theta_C \simeq 0.95$ (jfr. (8.55)), vil vi for simpelheds skyld sætte $\cos^2\theta_C \simeq 1$ og $\sin^2\theta_C \simeq 0$, men korrektioner herfor er trivielle at indføre.

I *anti*-neutrinoreaktioner har vi således processerne:

$$\begin{aligned} &W^- + u \rightarrow d \;\text{ og }\; W^- + c \rightarrow s, \;\text{ der involverer } \textit{venstrehåndede kvarker}, \text{ samt} \\ &W^- + \bar{d} \rightarrow \bar{u} \;\text{ og }\; W^- + \bar{s} \rightarrow \bar{c}, \;\text{ der involverer } \textit{højrehåndede antikvarker} \end{aligned} \tag{10.68}$$

I *neutrino*-reaktioner har vi tilsvarende:

$$\begin{aligned} &W^+ + d \rightarrow u \;\text{ og }\; W^+ + s \rightarrow c, \;\text{ der involverer } \textit{venstrehåndede kvarker}, \text{ samt} \\ &W^+ + \bar{u} \rightarrow \bar{d} \;\text{ og }\; W^+ + \bar{c} \rightarrow \bar{s}, \;\text{ der involverer } \textit{højrehåndede antikvarker} \end{aligned} \tag{10.69}$$

Vores behandling af den ikke-paritetsbrydende del af $W_{\mu\nu}$ forløber nu fuldstændig som for elektronreaktioner i forrige paragraf. Vi skal blot huske på, at da nukleonen behandles som upolariseret, antager vi, at den i middel indeholder lige mange højre-og venstrehåndede kvarker (og antikvarker). Da de ladede strømme kun kan se venstrehåndede kvarker (og højrehåndede antikvarker), får vi kun en faktor 2 mere på $\overline{\nu}$-delen end i elektronproduktion (jfr. (10.40)). Sammenlignet med (10.60) er der ingen kvarkladningsfaktor (eller rettere: Den er enten $\cos^2\theta_C \simeq 1$ eller $\sin^2\theta_C \simeq 0$). Vi har så

$$\begin{aligned} F_2^{\overline{\nu}p} &= 2(u + c + \overline{d} + \overline{s}) \\ F_2^{\overline{\nu}n} &= 2(d + c + \overline{u} + \overline{s}) \end{aligned} \tag{10.70}$$

eller for et isoskalært target

$$\begin{aligned} F_2^{\overline{\nu},I=0} &= u + d + 2c + \overline{d} + \overline{u} + 2\overline{s} \\ &= u + d + s + c + \overline{u} + \overline{d} + \overline{s} + \overline{c} \\ &= q + \overline{q} \end{aligned} \tag{10.71}$$

hvor $q \equiv u + d + s + c$ (10.64).

Tilsvarende

$$\begin{aligned} F_2^{\nu p} &= 2(d + s + \overline{u} + \overline{c}) = F_2^{\overline{\nu}n} \\ F_2^{\nu n} &= 2(u + s + \overline{d} + \overline{c}) = F_2^{\overline{\nu}p} \\ F_2^{\nu,I=0} &= q + \overline{q} \end{aligned} \tag{10.72}$$

Igen har vi selvfølgelig Callan-Gross-relationen $F_2 = 2xF_1$.

Endelig skal vi udregne den interessante F_3-strukturfunktion, som optræder i formen (10.32):

$$+\frac{i}{2M\nu}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha q_\beta F_3 \tag{10.73}$$

i $W^{\mu\nu}$. Fra (10.43) og (10.40) får vi på sædvanlig måde partontensoren ved substitutionen $k^\mu \to xp^\mu$ og $q^\mu \to -q^\mu$:

$$\mp 4w^5_{\mu\nu}(xp, -q) = \pm i\ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(-q^\alpha)p^\beta(4x) = \pm 4xi\ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^\alpha q^\beta$$

hvor det øverste fortegn gælder venstrehåndede kvarker og det nederste højrehåndede antikvarker, og hvor vi har behandlet nukleonens kvarker som upolariserede.

Som i (10.56) får vi så bidraget til $W_{\mu\nu}$ hidrørende fra en bestemt slags kvark (antikvark) med tæthedsfordeling $q(x)/x$:

$$W^{(5)}_{\mu\nu} = \frac{1}{4M\nu}\,\frac{q(x)}{x^2}\,(\pm 4xi)\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^\alpha q^\beta$$

hvoraf fra (10.73)

$$xF_3 = \pm 2q(x) \tag{10.74}$$

for henholdsvis kvarker og antikvarker.

Heraf fås så specifikt

$$\begin{aligned} xF_3^{\overline{\nu}p} &= 2(u + c - \overline{d} - \overline{s}) \\ xF_3^{\overline{\nu}n} &= 2(d + c - \overline{u} - \overline{s}) \\ xF_3^{\nu p} &= 2(d + s - \overline{u} - \overline{c}) \\ xF_3^{\nu n} &= 2(u + s - \overline{d} - \overline{c}) \end{aligned} \tag{10.75}$$

og for et isoskalært target

$$\begin{aligned}
xF_3^{\bar{\nu},I=0} &= (u+d+2c-\bar{u}-\bar{d}-2\bar{s}) = q-\bar{q}+2c-2s \\
xF_3^{\nu,I=0} &= q-\bar{q}+2s-2c \\
\overline{xF_3} &\equiv \frac{1}{2}\left(xF_3^{\nu,I=0}+xF_3^{\bar{\nu},I=0}\right) = q-\bar{q}
\end{aligned} \tag{10.76}$$

Lad os endelig nedskrive $\partial\sigma/\partial x\partial y$ i partonmodellen i de forskellige tilfælde. For simpelheds skyld negligerer vi detaljer vedrørende de små s- og c-sø-kvark fordelinger og bibeholder kun q og $\bar{q}$-delene af alle ovenstående udtryk.

Fra (10.48) og (10.49) finder vi, idet $R=0$ på grund af Callan-Gross-relationen, og idet vi kun betragter isoskalære targets:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(e)}{dxdy} &= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}EM\cdot\frac{5}{18}\left[1+(1-y)^2\right](q(x)+\bar{q}(x)) \\
\frac{d\sigma(\nu)}{dxdy} &= \frac{G^2}{\pi}EM\left[q(x)+(1-y)^2\bar{q}(x)\right] \\
\frac{d\sigma(\bar{\nu})}{dxdy} &= \frac{G^2}{\pi}EM\left[\bar{q}(x)+(1-y)^2q(x)\right]
\end{aligned} \tag{10.77}$$

Vi ser her, hvorledes et studium af de eksperimentelle y-fordelinger kan bruges til at bestemme kvark/antikvark forholdet i nukleoner, og at resultaternes konsistens kan efterprøves ved at sammenligne data fra ν- og $\bar{\nu}$-beams.

Det er kvalitativt forståeligt, hvorfor νq og $\bar{\nu}\,\bar{q}$ spredningerne er "isotrope" i y, medens $\nu\bar{q}$ og $\bar{\nu}q$ spredningerne udviser en vis "vinkelfordeling": $(1-y)^2$. I begge tilfælde er sammenstødet "meget punktformigt" (da W-massen er så høj), således at kun s-bølger bidrager. Endvidere er for νq (og $\bar{\nu}\,\bar{q}$) det totale spin langs beamretningen nul. Såvel ν som q har nemlig helicitet $=-\frac{1}{2}$ (ellers vekselvirker de slet ikke). For $\nu\bar{q}$ derimod har ν helicitet $=-\frac{1}{2}$, men $\bar{q}$ helicitet $=+\frac{1}{2}$. Det totale angulære moment har derfor $|J_z|=1$ langs beamaksen, og vinkelfordelingen er bestemt af en ikke-isotrop kuglefunktion.

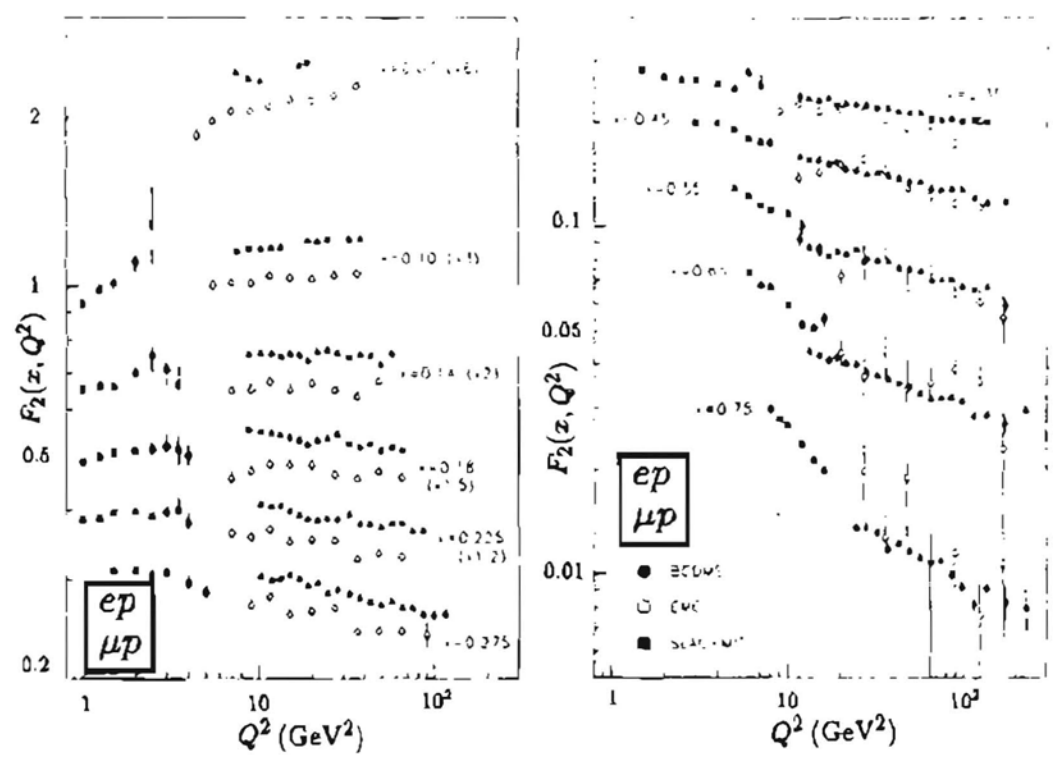
Af (10.77) fås følgende integrerede tværsnit

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(\nu)}{dx} &= \frac{G^2}{\pi}EM\left[q(x)+\frac{1}{3}\bar{q}(x)\right] \\
\frac{d\sigma(\bar{\nu})}{dx} &= \frac{G^2}{\pi}EM\left[\bar{q}(x)+\frac{1}{3}q(x)\right] \\
\sigma(\nu) &= \frac{G^2}{\pi}EM\int_0^1 dx\left[q(x)+\frac{1}{3}\bar{q}(x)\right] \\
\sigma(\bar{\nu}) &= \frac{G^2}{\pi}EM\int_0^1 dx\left[\bar{q}(x)+\frac{1}{3}q(x)\right]
\end{aligned} \tag{10.78}$$

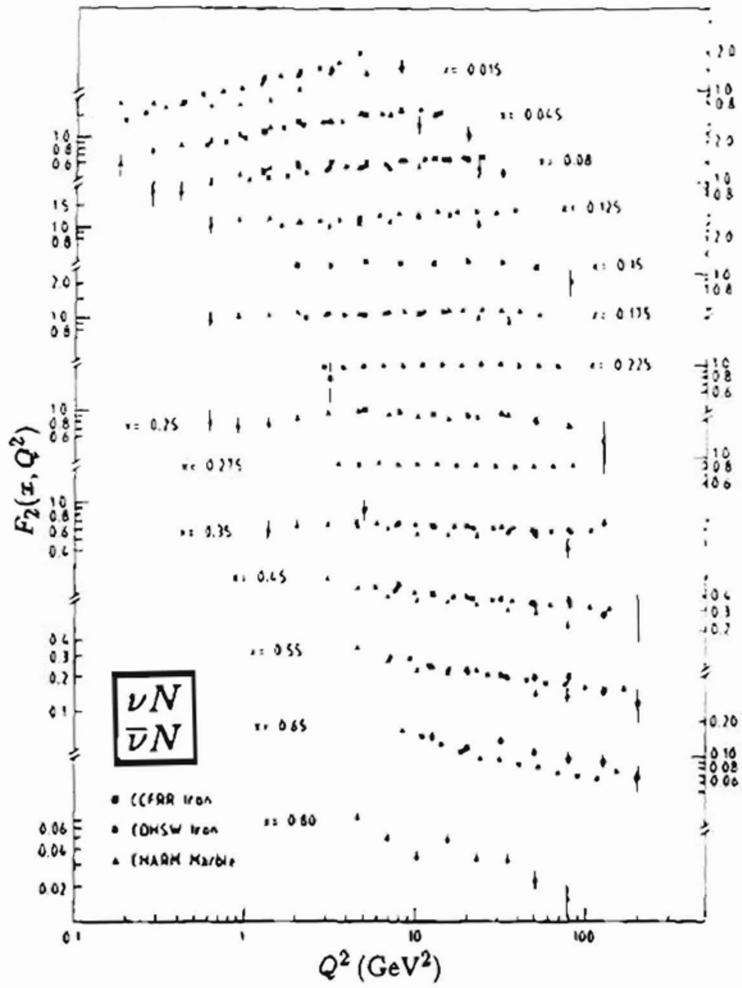
som vi også får brug for.

10.7 Eksperimentelle resultater

10.7.1 Bjorken-scaling



Figur 10.4: Elektron- og myon-produktionsdata over F_2 i forskellige x- intervaller.



Figur 10.5: Neutrino-produktionsdata for F_2 i forskellige x- intervaller.

Fig.(10.4) viser en række eksperimentelle målinger af strukturfunktionen $F_2(x, Q^2)$ dels fra elektron-nukleon-eksperimenter, dels fra myon-eksperimenter. Datpunkterne er multipliceret med de viste faktorer for at kunne adskilles. Resultaterne er angivet på den måde, at for et lille x-interval er funktionerne plottet som funktioner af Q^2. Bjorken-scaling - eller uafhængighed af Q^2 - skal så betyde, at datapunkterne falder på horisontale rette linier. Dette ses at være tilfældet med god nøjagtighed. Dog ses for store Q^2 og store x-værdier visse scalingbrud. Disse har i de seneste år optaget sindene meget. Det viser sig nemlig, at QCD giver meget præcise forudsigelser om små korrektioner til scaling (jfr. de optrukne kurver på den sidste figur i (10.4).) Disse scalingbrud vil vi kort omtale i sidste afsnit. Her vil vi nøjes med at konstatere, at de er små.

Fig. (10.5) viser tilsvarende resultater for strukturfunktionerne, F_2 og xF_3 fra neutrinoeksperimenter.

Bemærk, at de eksperimentelt opnåelige værdier af Q^2 er langt højere i neutrino- og myon-eksperimenter end i elektroneksperimenter. Dette hænger sammen med vanskeligheden ved at accelerere elektroner: Bruges en synchrotron, giver elektronernes afbøjning i magnetfelter anledning til synchrotronstråling og energitab. De højest opnåelige energier er for tiden o. 45 GeV i LEP, men denne maskine er ikke beregnet på dybt uelastiske forsøg. Netop nu (1992) begynder imidlertid indkøringen af et nyt stort anlæg, HERA ved DESY nær Hamborg. Her studeres sammenstød af 26 GeV elektroner med 280 GeV protoner, hvorved hidtil uhørt store værdier af Q^2 opnås. Tilsvarende vil man snart kende strukturfundtionerne meget mere nøjagtigt, og derved "protonens indre" langt mere detaljeret. Bruges en lineær accelerator (SLAC), kræves meget lange acceleratorer. Typisk opnåelige energier ligger o. 30 GeV. Til sammenligning har μ-beams og neutrinobeams god intensitet op til $\sim$ 200 GeV: Neutrinoerne produceres fra henfaldende π- og K-mesoner, som er produceret af protonsynchrotronernes protoner ved 400-500 GeV.

Det er meget instruktivt at sammenligne scaling i de *inklusive* tværsnit med resultater for *eksklusive* tværsnit, hvor man studerer processer med en fast, specificeret hadronkanal. Det simpleste tilfælde er elastisk spredning

$$e^- + N \to e^- + N$$

hvor (jfr. (10.8))

$$W^2 = M^2 + 2M\nu - Q^2 = M^2 + 2M\nu(1-x) = M^2 + Q^2\,\frac{1-x}{x} \equiv M^2$$

eller

$$x = 1$$

For en sådan proces afhænger "strukturfunktionerne" altså kun af én variabel, Q^2. For det elastiske tilfælde findes eksperimentelt

$$F_2^{elastisk}(Q^2) \sim (Q^2)^{-4}$$

Data plottet som i fig.(10.4) ville så udvise en voldsom Q^2-afhængighed: $F_2^{elastisk}$ ville falde med 4-5 størrelsesordener i det eksperimentelle område.

Hvorledes kan det da overhovedet lade sig gøre at få scaling frem? Forklaringen ligger i, at for et fast $x < 1$, vil voksende Q^2 betyde voksende W^2 (jfr. ovenfor). For disse højere og højere masser af hadronsystemet bliver der flere og flere kanaler åbne:

$$e^- + N \to e^- + N\pi \quad , \quad e^- + N \to e^- + N2\pi, \ldots$$

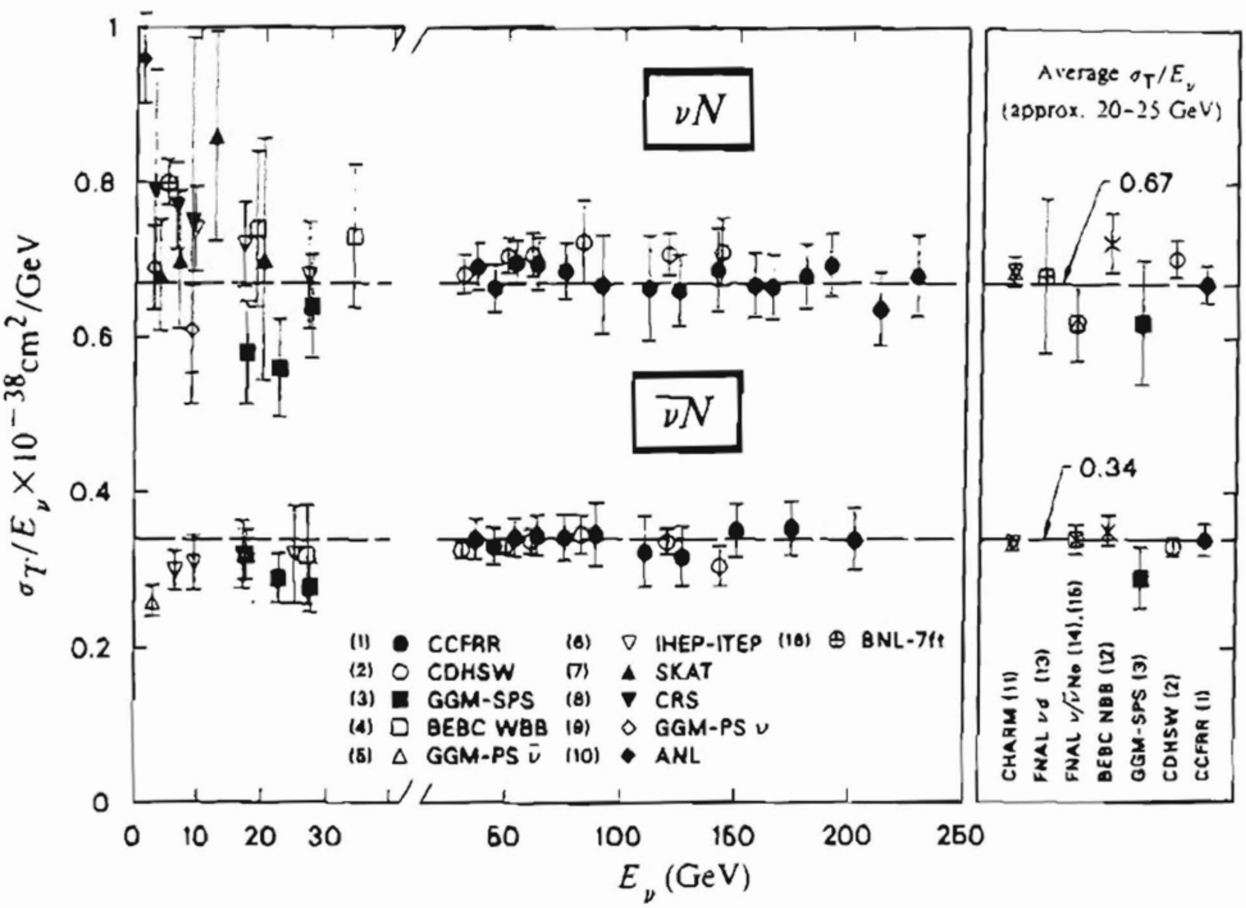
Skønt tværsnittet *for hver kanal for sig* falder voldsomt med Q^2, stiger antallet af kanaler og deres faserum åbenbart tilstrækkeligt til fuldstændigt at kompensere herfor.

Beskrevet på denne måde virker scalingfænomenet som noget yderst mystisk og ejendommeligt. Hvad vi har set under partonmodellen er imidlertid, at det har en meget simpel interpretation i termer af frie, punktformede kvarkbestanddele.

Som et sidste eksempel på scaling viser vi i fig.(10.6) data for de totale neutrino- og antineutrinotværsnit divideret med beamenergien. Af (10.78) ser vi, at disse størrelser forventes at have en fast værdi uafhængig af Q^2 (dvs af $E_{\nu,\bar{\nu}}$). Data er i smuk overensstemmelse hermed. Videre ser vi af (10.78), at hvis nukleonen kun indeholder kvarker (ingen antikvarker: $\bar{q}(x) \equiv 0$), så er

$$\frac{\sigma_{tot}(\nu)}{\sigma_{tot}(\bar{\nu})} = 3$$

Eksperimentelt er forholdet ca. 2, hvilket viser at kvarkindholdet nok dominerer, men antikvarker dog spiller en rolle.



Figur 10.6: Totale neutrinotværsnit divideret med beam-energien.

10.7.2 Callan-Gross-relationen

Vi husker fra (10.60), at antagelsen om spin-$\frac{1}{2}$ kvarker medfører

$$R \equiv \frac{F_2 - 2xF_1}{2xF_1} \equiv 0$$

Fig. (10.6) viser data for denne størrelse. Faktoren

$$1 + \frac{Q^2}{\nu^2} = 1 + \frac{2Mx}{\nu} = 1 + \frac{4M^2}{Q^2}x^2 \to 1 \quad \text{for} \quad Q^2 \to \infty$$

Vi har approksimeret den ved 1 i vores behandling. Data er stort set konsistente både med partonmodellens værdi på nul og med den lille af QCD forudsagte korrektion hertil. Kvarkernes spin er altså målt i dybt uelastisk spredning. Værdien er $\frac{1}{2}$ i overensstemmelse med, hvad vi allerede har set på basis af jet-fysik.

10.7.3 Nukleonens antikvarkindhold

Af (10.77) kan vi aflæse, at antikvarker og kvarker har forskellig y-fordeling i neutrino og antineutrinoeksperimenter. Dette er skitseret skematisk i fig. (10.8). For at få et mere præcist numerisk billede er det bekvemt at indføre middelværdien af y : $< y >$. Af følgende identiteter

$$\int_0^1 dyy(1-y)^2 = \frac{1}{12} \quad , \quad \int_0^1 dy(1-y)^2 = \frac{1}{3} \quad , \quad \int_0^1 dyy = \frac{1}{2}$$

fås af (10.77)

$$\begin{aligned} < y >_\nu &= \frac{\frac{1}{2}q + \frac{1}{12}\bar{q}}{q + \frac{1}{3}\bar{q}} \\ < y >_{\bar{\nu}} &= \frac{\frac{1}{2}\bar{q} + \frac{1}{12}q}{\bar{q} + \frac{1}{3}q} \end{aligned} \tag{10.79}$$

hvor $q \equiv \int_0^1 dx\ q(x)$ etc.

Fig. (10.8) viser, at disse størrelser er uafhængige af neutrinoenergien som krævet. Af $< y >_{\bar{\nu}} \simeq 1/3$ findes straks

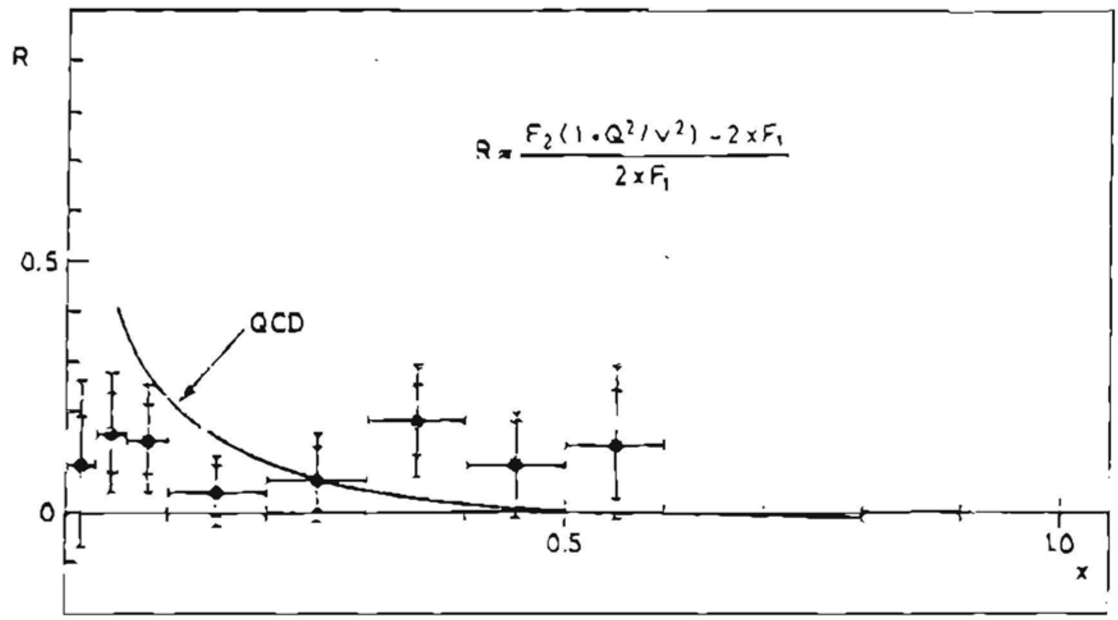
$$\frac{\bar{q}}{q} \simeq \frac{1}{6} \quad \text{og} \quad < y >_\nu \simeq 0.5 \tag{10.80}$$

Første resultat viser, at 10-20% af de ladede partoner er antikvarker, medens den forudsagte værdi af $< y >_\nu$ er konsistent med fig.(10.9).

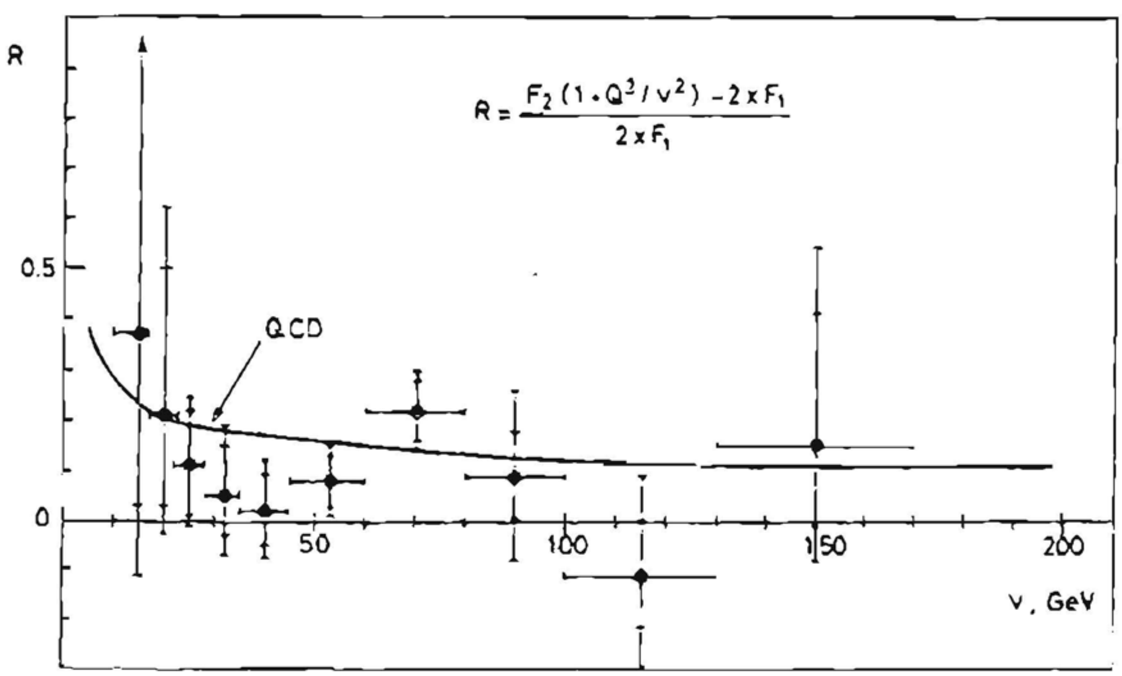
10.7.4 Sammenligning mellem elektron- myon- og neutrinodata

Af (10.65) og (10.72) får vi for produktion på isoskalære targets, når vi negligerer detaljer vedrørende s- og c-søen:

$$\begin{aligned} F_2^e(x,Q^2) &= \frac{5}{18}(q(x) + \bar{q}(x)) \\ F_2^\nu(x,Q^2) &= q(x) + \bar{q}(x) \end{aligned} \tag{10.81}$$

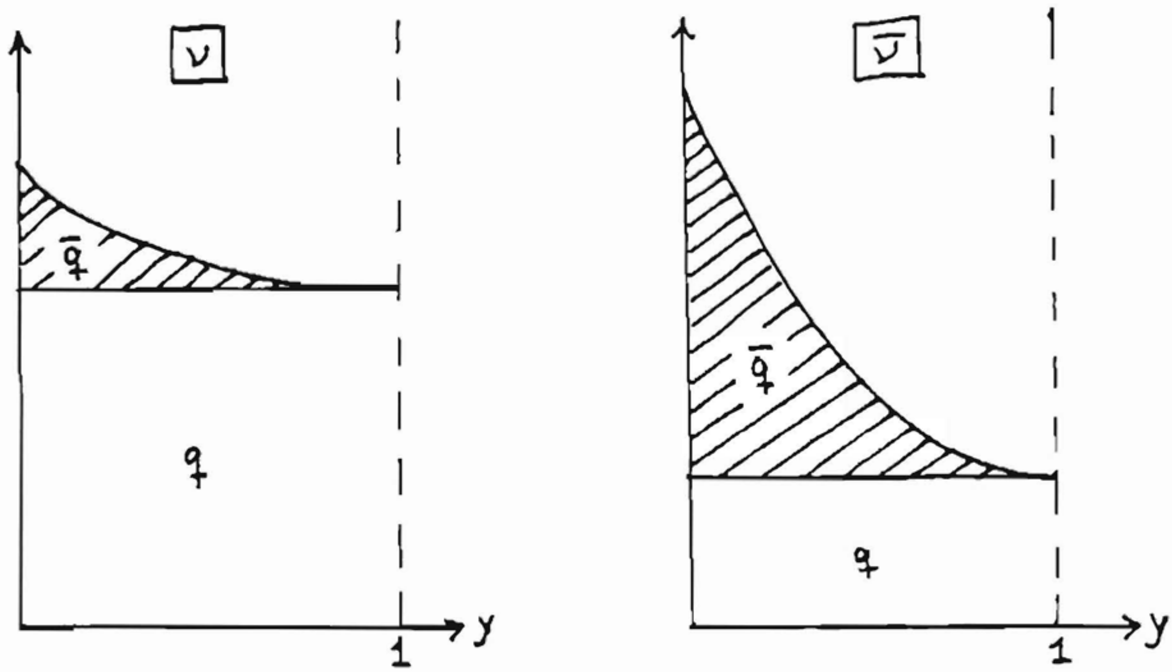


CDHS results for R as a function of x, but averaged over Q^2. The solid line is the QCD prediction.



CDHS results for R as a function of ν, but integrated over x. The solid line is the QCD prediction.

Figur 10.7: Test af Callan-Gross relationen.



Figur 10.8: Kvarkers og antikvarkers bidrag til y-fordelingen i neutrino og antineutrino-eksperimenter.

altså

$$\frac{18}{5}F_2^e \simeq F_2^\nu \tag{10.82}$$

Vi husker her, at det "mystiske" tal $\frac{5}{18}$ simpelthen er middelværdien af u- og d-kvarkernes ladningskvadrater. Den meget stærke partonmodelforudsigelse (10.82) er testet på fig. (10.10), (10.12) og fig. (10.11). Vi ser en ganske imponerende overensstemmelse. Fig. (10.10) og (10.11) siger også, hvorledes sammenligning mellem F_2 og xF_3 tillader en simpel bestemmelse af antikvarkernes fordelingsfunktion (jfr. (10.76)):

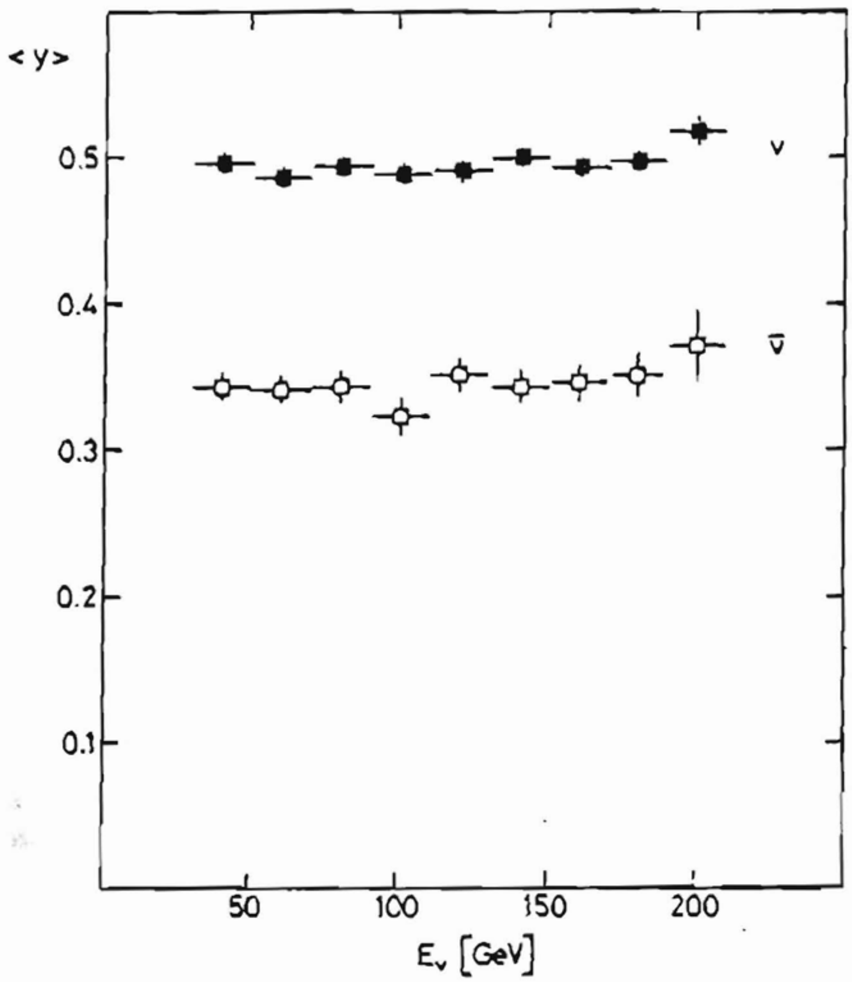
$$xF_3 \simeq q - \bar{q} \quad \text{og} \quad F_2 \simeq q + \bar{q} \Rightarrow \bar{q} \simeq \frac{1}{2}(F_2 - xF_3)$$

Fig. (10.13) viser, at F_2 har en besynderlig afhængighed af hvilken kerne, der benyttes til eksperimentet. Dette omtales som EMC-effekten (European Muon Collaboration). Den kan ikke forstås ud fra et kvark-parton-billede allene, men må bero på delvist uafklarede kernefysiske forhold.

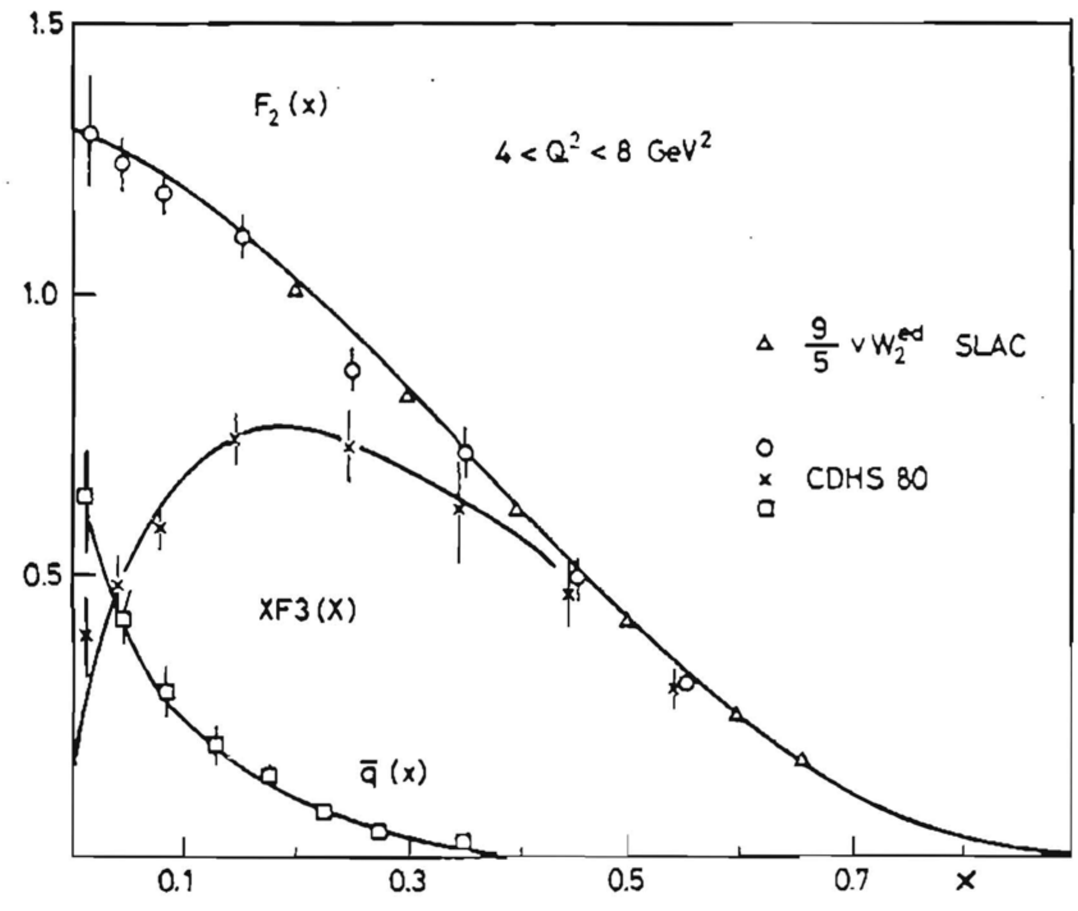
10.7.5 Gluonernes impuls

Da kvarker med brøkdel x af nukleonens impuls har tætheden $q(x)/x$, finder vi for den totale brøkdel af nukleonens 4-impuls, båret af kvarker og antikvarker

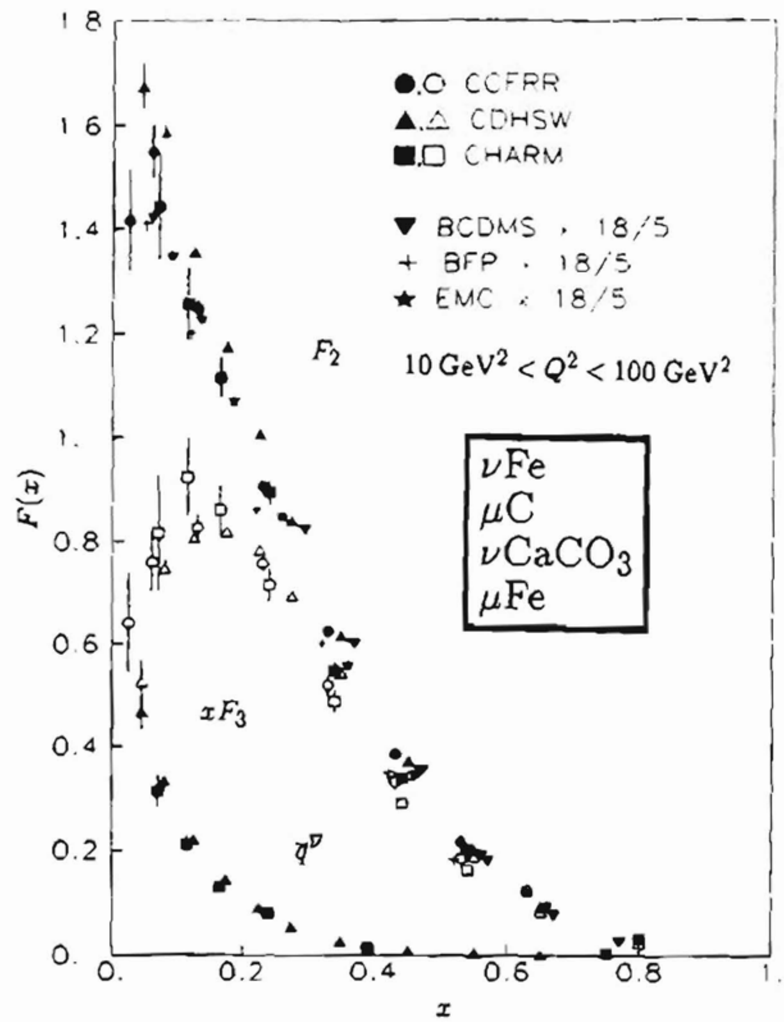
$$\frac{p(\text{kvarker + antikvarker})}{p(\text{nukleon})} = \int_0^1 dx \cdot x\left[\frac{q(x)}{x} + \frac{\bar{q}(x)}{x}\right]$$



Figur 10.9: Middelværdier af y for neutrino- og antineutrinospredning.

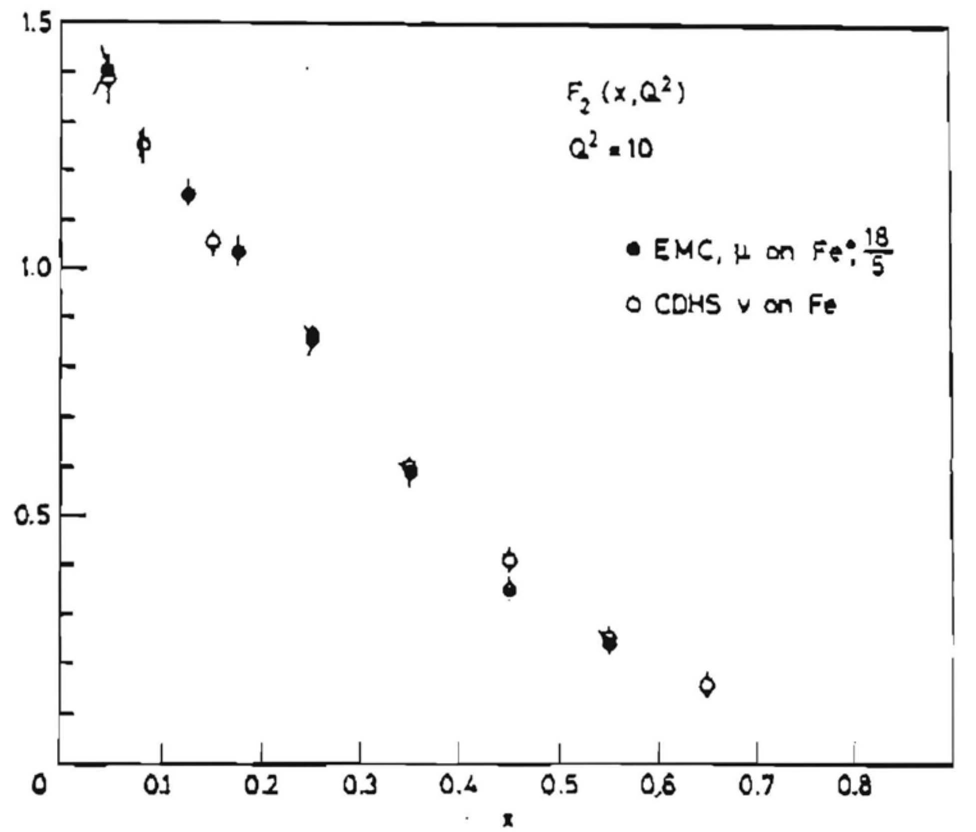


Figur 10.10: SLAC: elektrondata; CDHS: neutrinodata.



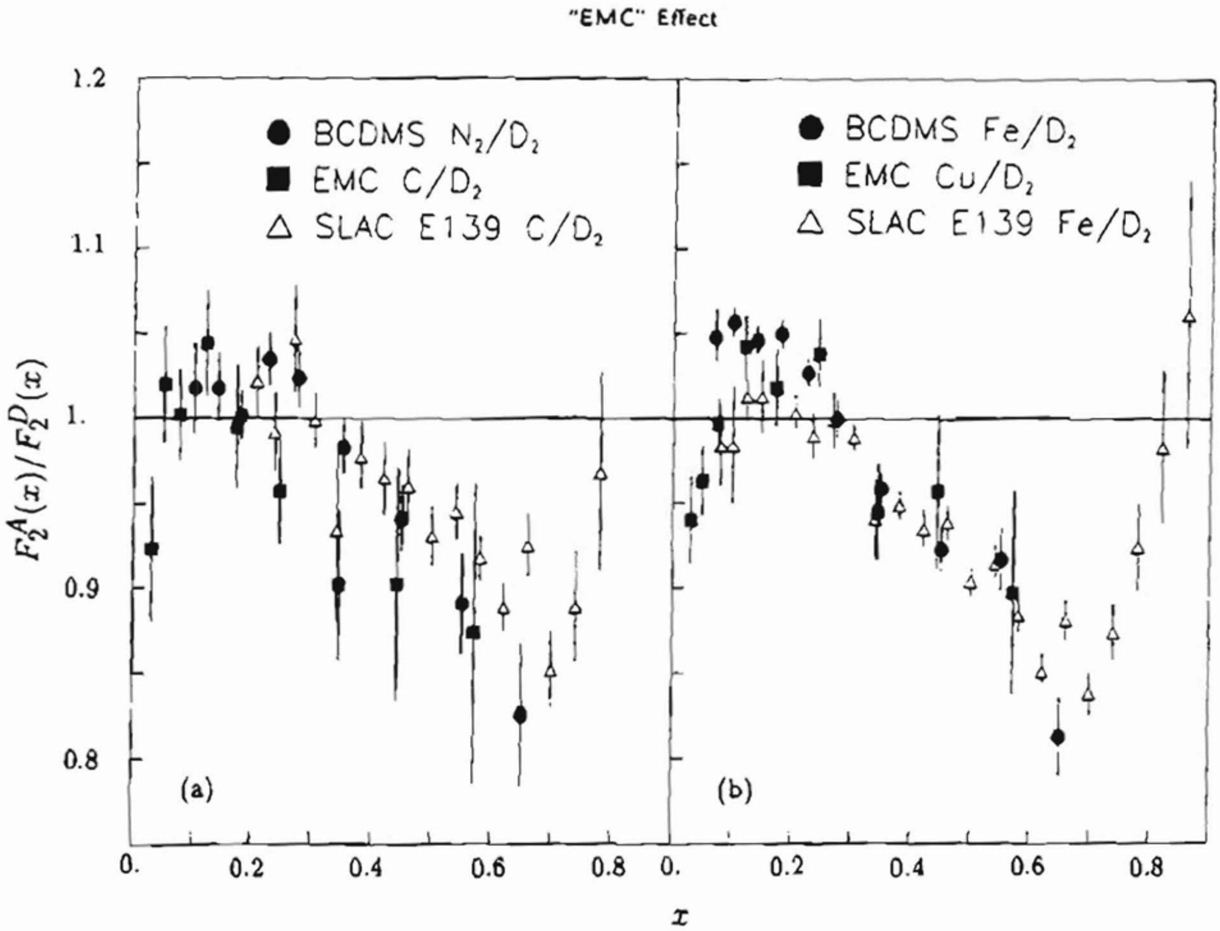
The structure functions F_2, xF_3, and $\bar{q}^{\bar{\nu}}$ measured in different experiments on isoscalar targets as functions of Bjorken x. The CCFRR, CDHSW, BFP, and EMC data were taken with iron targets; the CHARM data with a marble ($CaCO_3$) target; and the BCDMS data with a carbon target. Only statistical errors are shown. The CHARM and BFP collaborations assume $R = \sigma_L/\sigma_T = 0$, whereas a QCD prediction for R is assumed in the analysis of the CCFRR, CDHSW, BCDMS, and EMC data. The electromagnetic structure function $F_2^{\mu N}$ is compared to the charged-current structure function $F_2^{\nu N}$ correcting for the average squared quark charge 5/18. No corrections have been applied for the difference between the strange and charmed quark sea. References: **CCFRR**--D.B. MacFarlane *et al.*, Z. Phys. **C26**, 1 (1984); **CDHSW** P. Berge *et al.*, CERN-EP/89-103; **CHARM**--

Figur 10.11: Som foregående figur, men nyere data ved større værdier af Q^2.



$F_2(x)$ at Q^2 = 10 GeV as observed in neutrino and muon scattering in iron. The two structure functions have the same shape and are related by the factor 18/5, as predicted in the QPM.

Figur 10.12: Sammenligning af data for F_2 i myon- on neutrino-produktion.



The ratio of nucleon structure functions $F_2^A(x)/F_2^D(x)$ for nuclear targets A compared to deuterium D, measured in deep inelastic electron (SLAC-E139) and muon (BCDMS, EMC) scattering: (a) medium-weight targets (A = N, C), (b) heavy targets (A = Fe, Cu). Only statistical errors are shown. The SLAC-E139 data were evaluated as cross section ratios σ^A/σ^D but are equal to structure function ratios if $R = \sigma_L/\sigma_T$ is independent of A. References: BCDMS—G. Bari *et al.* Phys. Lett. 163B, 282 (1985): and A.C. Benvenuti *et al.* Phys. Lett. B189, 483 (1987); EMC—J. Ashman *et al.* Phys. Lett. B202, 603 (1988); SLAC-E139—R.G. Arnold *et al.* Phys. Rev. Lett. 52, 727 (1984); and SLAC-PUB-3257 (1983).

Figur 10.13: EMC-effekten.

$$\begin{aligned} &\simeq \int_0^1 dx\ F_2^{\nu}(x) \\ &\simeq 50\% \end{aligned} \tag{10.83}$$

hvor tallet 50% aflæses af fig.(10.9). Vi har tidligere (10.80) set, at $\sim$ de 10% skyldes antikvarker. Tilbage står det måske overraskende faktum, at henved halvdelen af nukleonens 4-impuls hverken er båret af kvarker eller af antikvarker. Den naturlige kandidat hertil er gluonerne.

10.8 Partonmodellen III. Neutrale strømme

Den væsentligste forskel på behandlingen af neutrale og ladede strømme er, at "Z^0"-strømmen kan koble til både venstre- og højrehåndede kvarker og antikvarker. Derimod kobler den kun til venstrehåndede neutrinoer (højrehåndede antineutrinoer).

Lad amplituden for kobling til venstre/højrehåndede u- og d-kvarker være (relativt til de ladede strømme, jfr. (10.20))

$$\begin{aligned} \varepsilon_L(u) &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W \\ \varepsilon_R(u) &= 0 - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W \\ \varepsilon_L(d) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W \\ \varepsilon_R(d) &= 0 + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W \end{aligned} \tag{10.84}$$

Så får vi analogt til (10.78) (NC = neutral current)

$$\begin{aligned} \sigma_{NC}(\nu) &= \frac{G^2EM}{\pi}\{\left[|\varepsilon_L(u)|^2 + |\varepsilon_L(d)|^2\right]\int_0^1 dx\left[q(x) + \frac{1}{3}\overline{q}(x)\right] \\ &\quad + \left[|\varepsilon_R(u)|^2 + |\varepsilon_R(d)|^2\right]\int_0^1 dx\left[\frac{1}{3}q(x) + +\overline{q}(x)\right]\} \\ \sigma_{NC}(\overline{\nu}) &= \frac{G^2EM}{\pi}\{\left[|\varepsilon_L(u)|^2 + |\varepsilon_L(d)|^2\right]\int_0^1 dx\left[\frac{1}{3}q(x) + \overline{q}(x)\right] \\ &\quad + \left[|\varepsilon_R(u)|^2 + |\varepsilon_R(d)|^2\right]\int_0^1 dx\left[q(x) + \frac{1}{3}\overline{q}(x)\right]\} \end{aligned} \tag{10.85}$$

For at analysere data indføres forholdene (R er et meget populært bogstav)

$$R \equiv \frac{\sigma_{NC}(\nu)}{\sigma_{CC}(\nu)} \quad \text{og} \quad \overline{R} \equiv \frac{\sigma_{NC}(\overline{\nu})}{\sigma_{CC}(\overline{\nu})} \tag{10.86}$$

Idet vi først for simpelheds skyld negligerer antikvarker, får vi af (10.78) og (10.85)

$$\begin{aligned} R &= \left[|\varepsilon_L(u)|^2 + |\varepsilon_L(d)|^2\right] + \frac{1}{3}\left[|\varepsilon_R(u)|^2 + |\varepsilon_R(d)|^2\right] \\ &= \frac{1}{2} - \sin^2\theta_W + \frac{20}{27}\sin^4\theta_W \\ \overline{R} &= \frac{1}{2} - \sin^2\theta_W + \frac{20}{9}\sin^4\theta_W \end{aligned} \tag{10.87}$$

Afsættes sammenhørende værdier af R og $\overline{R}$ i et $(R, \overline{R})$-plot som funktion af $\sin^2\theta_W$ fås en "næseformet" kurve. Tages hensyn til det nu kendte antikvarkindhold, rykkes kurven en smule. Eksperimentelle værdier af R og $\overline{R}$ falder præcist på kurven svarende til den i (8.106) angivne værdi af Weinberg-vinklen

$$\sin^2\theta_W \simeq 0.23$$

Hertil kommer så de øvrige i kap. 8 og 9 behandlede successer af $SU(2) \otimes U(1)$-modellen.

10.9 QCD og scalingbrud

Vi har set, at partonmodellen baserede sig på den antagelse, at kvarker inde i nukleoner opførte sig som næsten frie partikler. Ved partonmodellens fremkomst virkede denne antagelse egentlig meget urimelig i betragtning af, at kvarker (hvis de da eksisterede) måtte være bundet så *stærkt* i hadroner, at de ikke kunne løsrives.

Som flere gange fremhævet er det en af QCD-teoriens største fortjenester, at den via asymptotisk frihed har lagt en teoretisk basis for forståelsen af denne egenskab ved kvarker.

Løseligt formuleret foregår argumentet ved at betragte udtrykket for den effektive kvark-gluonkobling

$$\alpha_S(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f)\log Q^2/\Lambda^2}$$

For $Q^2 \to \infty$ vil $\alpha_S(q^2) \to 0$, kvarkerne bliver frie: Vi må have Bjorken-scaling !

Og dog! En nærmere eftertanke afslører, at argumentet ikke kan være helt rigtigt. Da partonerne er masseløse (dette gælder eksakt for gluoner og approksimativt for kvarker), kan vi ikke på 4-impulsen se forskel på en fri kvark og en kvark ledsaget af en gluon, hvor begge har passende mindre 4-impulser. Ved en sådan opspaltning

$$q \to q' + g$$

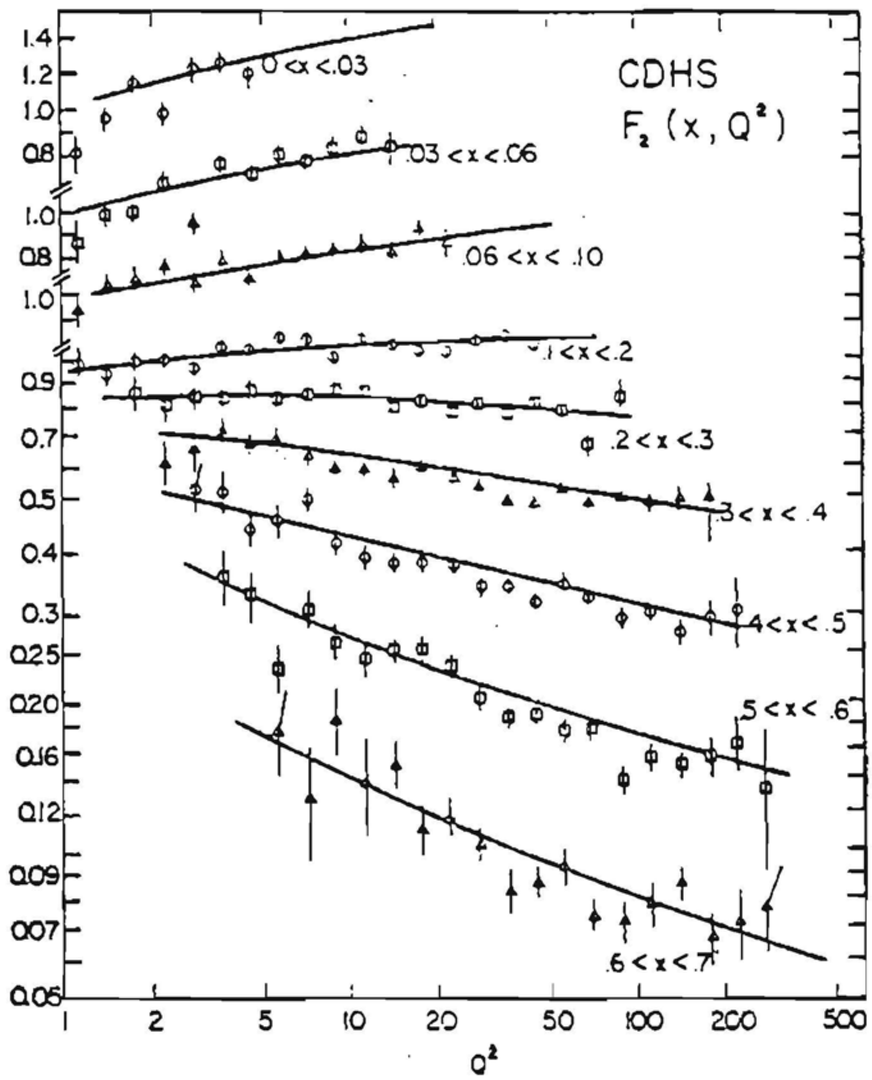
med *lille* transversal impuls $p_\perp$, er den effektive koblingskonstant ikke $\alpha_S(Q^2)$ men snarere $\alpha_S(p_\perp^2)$. Man kan overbevise sig om, at den dominerende amplitude, for at en kvark absorberer en foton med virtuel masse $= -Q^2$, er givet ved en situation, hvor kvarken først har "bremsestrålet" et antal gluoner "af sig", indtil dens egen masse er blevet sammenlignelig med Q^2. Herved har den for store Q^2 misten en større del af sin 4-impuls (til gluonerne).

I konsekvens heraf forudsiger QCD, at kvark-struktur-funktionen *ikke* er helt Q^2-uafhængig. For meget høje Q^2-værdier "ser" fotonen relativt flere kvarker med små x-værdier end ved mindre Q^2-værdier. Med andre ord: $F_2(x, Q^2)$ vil vokse med Q^2 for små x-værdier og aftage med Q^2 for x nær 1.

Fig. (10.14) viser dette fænomen eksperimentelt såvel som overensstemmelsen med teorien.

Denne succes for QCD har i et vist omfang præget diskussionen om dybt uelastiske eksperimenter de senere år. Det bør dog nok fremhæves, at mange korrektioner ikke kan udføres helt tilfredsstillende ved de energier, hvor data er taget, men at disse forhold forventes stærkt forbedrede når nye HERA-data bliver tilgængelige.

Det afgørende er dog især, at scaling-invarians selv er en så imponerende god approksimation.



Figur 10.14: Neutrinodata for F_2, som udviser et lille brud på scaling, sammenlignet med QCD-fits.