Noter og Opgaver i Kontinuumsmekanik og Plasmafysik

Henrik Smith
Ørsted Laboratoriet

H. C. Ørsted Instituttet 1994

Noter og opgaver
i
kontinuumsmekanik og plasmafysik

Disse noter og opgaver er beregnet på brug i undervisningen i kontinuumsmekanik og plasmafysik som supplement til lærebøgerne, henholdsvis David J. Tritton "Physical Fluid Dynamics" og Francis F. Chen "Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion" (vol. I). Notationen er såvidt muligt valgt i overensstemmelse med disse bøger med et par vigtige undtagelser. Således betegnes viskositet med η (Tritton benytter μ) for at undgå sammenblanding med Lamé-koefficienten μ, der indgår i elasticitetsteorien. I overensstemmelse med Tritton er $\mathbf{u}$ benyttet som betegnelse for hydrodynamikkens hastighedsfelt (dimension: længde divideret med tid), bortset fra kapitel 1 og 4, hvor det betegnes med $\mathbf{v}$ for at undgå sammenblanding med elasticitetsteoriens forskydningsfelt (dimension: længde), der betegnes ved $\mathbf{u}$ i overensstemmelse med sædvanlig praksis.

Ørsted Laboratoriet, 22. august 1994

Henrik Smith

Indhold

1 Indledning

Kontinuumsmekanik er en sammenfattende betegnelse for hydrodynamik og elasticitetsteori. Disse fag er grundlaget for geofysikken, læren om jordklodens fysik. Hydrodynamikken og elasticitetsteorien har dog et langt bredere anvendelsesområde end jordklodens fysik. Grundligningerne kan lige så godt anvendes til at beskrive solens egensvingninger, strømningen af flydende ^{3}He ved temperaturer nær det absolutte nulpunkt eller udbredelsen af lyd i aluminium.

Selv om hydrodynamikken og elasticitetsteorien blev udviklet længe før kvanteteorien, er deres gyldighed ikke begrænset til den klassiske fysik. Snarere repræsenterer de et *beskrivelsesniveau*, der forudsætter langsomme tidslige og rumlige variationer. I grundligningerne indgår afledede med hensyn til både rum og tid. Som nødvendige betingelser for ligningernes gyldighed indgår begrænsninger på de typiske frekvenser ω og bølgetal q, der kan optræde i en konkret problemstilling. Eksempler på sådanne begrænsninger er $\omega\tau \ll 1$ og $ql \ll 1$, hvor τ er en middelstødtid for kollisioner mellem de partikler, der udgør det fysiske system, og l er den tilsvarende middelvejlængde. F. eks. kan vi ved hjælp af kontinuumsmekanikken finde både de transversale og longitudinale lydhastigheder for et bestemt krystallinsk materiale, men vi har ingen mulighed for at forklare dispersionsrelationens udseende[1] ved bølgelængder, der er sammenlignelige med afstanden mellem naboatomer i krystalgitret.

I modsætning til Schrödingerligningen er kontinuumsmekanikkens grundligninger fænomenologiske i den forstand, at de indeholder størrelser som viskositet eller elastiske konstanter, der fastlægges ud fra eksperimenter[2]. Ved at bruge symmetribetragtninger kan antallet af uafhængige konstanter fastlægges, men kontinuumsmekanikken giver i sig selv ingen mulighed for at bestemme konstanternes størrelse eller afhængighed af temperatur og tryk.

Det er bekvemt at formulere grundligningerne ved hjælp af tensorer. Disse størrelser optræder overalt i fysikken, med den almene relativitetsteori som nok det mest markante eksempel. I det følgende introduceres tensorbegrebet som en generalisation af det velkendte vektorbegreb. Vi skal se, at en skalar er en tensor af rangen nul, mens en vektor er en tensor af rangen 1. Inertitensoren, der er kendt fra mekanikken, er en tensor af rangen 2, og det samme gælder ledningsevnetensoren, der knytter den elektriske strømtæthed til feltstyrken. I kontinuumsmekanikken får vi især brug for tensorer af rangen 2 og 4.

1.1 Tensorer

Vi vil indføre tensorbegrebet ved at tage udgangspunkt i vektorer og deres velkendte egenskaber under drejning af koordinatsystemet. Lad $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ være vektorer givet ved talsættene A_i og B_j. I cartesiske koordinater er $i = x, y, z$. Det skalære produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ kan skrives ved brug af summationskonventionen

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i \ (= \sum_i A_i B_i). \tag{1.1}$$

Gentagne indices angiver altså en sum over disse.

For at kunne angive vektorproduktet ved hjælp af denne summationskonvention indføres symbolet ϵ_{ijk} defineret ved

$$\epsilon_{xyz} = \epsilon_{yzx} = \epsilon_{zxy} = 1; \ \epsilon_{xzy} = \epsilon_{yxz} = \epsilon_{zyx} = -1, \tag{1.2}$$

[1]En ***dispersionsrelation*** udtrykker sammenhængen $\omega(\mathbf{q})$ mellem bølgetalsvektor $\mathbf{q}$ og frekvens ω for en svingning af en bestemt type. For gittersvingninger i en krystal gælder der en lineær sammenhæng mellem ω og q ved små q (svarende til store bølgelængder) mens ω/q formindskes ved større q i overensstemmelse med, at frekvensen har en øvre grænse (hvis værdi i praksis er omkring $10^{13} - 10^{14}$ s^{-1}).

[2]Ved at benytte en statistisk beskrivelse af stødprocesserne er det muligt at beregne f. eks. viskositeten af en gas eller varmeledningsevnen af en isolator på basis af mekanikkens eller kvantemekanikkens bevægelsesligninger.

mens $\epsilon_{ijk} = 0$, hvis to indices er ens ($\epsilon_{xxz} = 0$, etc.). Vektorproduktet $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ skrives herefter som

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k. \tag{1.3}$$

Ved drejninger af koordinatsystemet om en akse gennem dets nulpunkt transformerer vektorer som følger

$$A'_i = a_{ij} A_j. \tag{1.4}$$

hvor a_{ij} angiver en drejningsmatrix. Her er A'_i komponenterne i det drejede koordinatsystem (som vi betegner ved S') af vektoren A_i i det oprindelige koordinatsystem (som vi betegner ved S). Drejningsmatricen a_{ij} er en 3×3 matrix, hvis elementer afhænger af den foretagne drejning. Ved en drejning på vinklen ϕ om z-aksen er drejningsmatricen givet ved

$$a : \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Dette kan indses ved at finde komponenterne i systemet S' af enhedsvektoren $(1,0,0)$ i systemet S: ved projektion af enhedsvektoren i det oprindelige koordinatsystem på de nye akser i S' fås, at vektoren i det drejede koordinatsystem har komponenterne $(\cos\phi, -\sin\phi, 0)$. Bemærk at det skalare produkt $A_i B_i$ er uændret ved transformationen, $A_i B_i = A'_i B'_i$ (vis dette eksplicit for drejningen beskrevet ved (1.5)!).

Ud fra A_i og A_k kan vi nu danne en *tensor* T_{ik} af rang 2 ved definitionen

$$T_{ik} = A_i B_k. \tag{1.6}$$

Ved drejninger transformerer T som følger

$$T'_{ik} = a_{il} a_{km} T_{lm}. \tag{1.7}$$

Vi benytter nu denne transformationsligning til en almindelig definition af en tensor: *Talsættet T_{ij} er en tensor (af rang 2), hvis det under drejninger transformerer ifølge (1.7).* Rangen er lig med antallet af indices (her 2), og vi ser, at definitionen uden videre kan udstrækkes til at gælde tensorer af højere rang end 2. Som eksempel anfører vi tensoren T_{ijkl}, der transformerer ifølge

$$T'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} T_{mnpq}. \tag{1.8}$$

En vektor A_i er ifølge (1.4) en tensor af rang 1, mens det invariante længdekvadrat $A_i A_i = A'_i A'_i$ er en tensor af rangen nul (en *skalar*).

Et eksempel på en hyppigt anvendt tensor er *spændingstensoren* σ_{ik}, der er defineret som i-komponenten af kraften på en fladeenhed vinkelret på k-retningen. I cartesiske koordinater udgøres σ_{ik} af de ni elementer σ_{xx}, σ_{xy} etc. I polære koordinater angives spændingstensoren som $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}$ etc. Hvis normalen til fladeenheden betegnes med enhedsvektoren $\mathbf{n}$,

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) \tag{1.9}$$

er i-komponenten af kraften

$$\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{n} = \sigma_{ik} n_k, \tag{1.10}$$

hvor $\boldsymbol{\sigma}_i = (\sigma_{ix}, \sigma_{iy}, \sigma_{iz})$, idet $i = x, y, z$.

1.1.1 Væsker

I en isotrop væske med hastighedsfelt $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ er spændingstensoren

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}, \tag{1.11}$$

hvor

$$\sigma'_{ik} = \eta(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \tag{1.12}$$

Begrundelsen for (1.11)-(1.12) er som følger: når væsken er i hvile, virker der et hydrostatisk tryk p, der er ens i alle retninger. Kraften på et enhedsfladeelement med normalvektor $\mathbf{n}$ er $\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{n} = -pn_i$, hvor $i = x, y, z$. Udtrykket (1.12) for σ'_{ik} er det mest almene for en isotrop væske til første orden i de afledede $\partial v_i/\partial x_k$, da en ensartet rotation af væsken givet ved hastighedsfeltet $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ ikke kan bidrage til σ'. Ved at dele $\partial v_i/\partial x_k$ op i en symmetrisk og antisymmetrisk del fås

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}). \tag{1.13}$$

Det ses, at første led (den symmetriske del) i (1.13) giver nul, når vi indsætter $v_i = \epsilon_{ijk}\Omega_j x_k$, mens det andet led (den antisymmetriske del) bliver forskelligt fra nul. Derfor kan σ'_{ik} kun indeholde det symmetriske led, foruden δ_{ik} gange σ'_{ll}.

1.1.2 Faste stoffer

En bestemt deformationstilstand angives ved forskydningsfeltet $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, der er defineret ved $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r})$, hvor $\mathbf{r}'$ angiver den nye position og $\mathbf{r}$ den oprindelige ligevægtsposition af en stofdel. Tensoren

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}) \tag{1.14}$$

kaldes deformationstensoren.

I almindelighed er sammenhængen mellem σ_{ik} og ϵ_{ik} givet ved

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm}\epsilon_{lm}, \tag{1.15}$$

hvor elasticitetstensoren λ_{iklm} indeholder $3^4 = 81$ elementer, der dog ikke alle er uafhængige af hinanden.

1.2 De hydrodynamiske grundligninger

De hydrodynamiske grundligninger har form af generaliserede bevarelseslove,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = K. \tag{1.16}$$

Her betegner Q en tæthed (der kan være en massetæthed eller en impulstæthed, altså ikke nødvendigvis en skalar størrelse), mens J_i er en strømtæthed (der tilsvarende kan være en massestrømtæthed eller en impulsstrømtæthed), mens K angiver et kildeled (der kan skyldes en volumenkraft, når Q er en impulstæthed). Med x_i menes de rumlige koordinater x, y, z, og vi benytter den velkendte konvention at summere over gentagne indices.

Lad os først betragte den kontinuitetsligning, der udtrykker massens bevarelse.

1.2.1 Kontinuitetsligning

Som nævnt kan vi identificere Q med ρ, væskens massetæthed, og J_i med massestrømtætheden ρv_i, hvor v_i angiver komponenterne af hastighedsfeltet v_i i væsken. I dette tilfælde er kildeleddet nul, altså $K = 0$, da masse ikke opstår eller forsvinder. Kontinuitetsligningen svarende til (1.16) er da

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{1.17}$$

Beviset for (1.17) er velkendt, men lad os alligevel repetere dette: Vi betragter et fast volumen V omgivet af fladen S. I tidsrummet Δt er masseforøgelsen i V givet ved

$$\Delta t \frac{d}{dt} \int_V dV \rho = -\Delta t \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}\rho, \tag{1.18}$$

idet $-\Delta t d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}\rho$ er den masse, der i tidsrummet Δt strømmer ind gennem fladeelementet $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS$, hvor $\hat{\mathbf{n}}$ er den udadrettede normalvektor. Gauss' sætning giver os

$$\int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_V dV \, \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho), \tag{1.19}$$

hvoraf (1.17) følger, idet V kan gøres vilkårligt lille.

1.2.2 Navier-Stokes ligningen

Vi går nu over til at identificere Q med impulstætheden ρv_i, idet vi skriver den tilhørende impulsstrømtæthed som $\boldsymbol{\Pi}_i$ med komponenter Π_{ik}. Navier-Stokes ligningen er

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = \rho f_i. \tag{1.20}$$

Her er ρf_i en volumenkraft (mere præcist kraften per volumenenhed) med dimension N/m^3. Vi vil nu bevise (1.20) på tilsvarende måde som (1.17). I tidsrummet Δt er impulsforøgelsen i V givet ved

$$\Delta t \frac{d}{dt} \int_V dV \rho v_i = -\Delta t \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}\rho v_i + \Delta t \int_S d\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i + \Delta t \int_V dV \rho f_i. \tag{1.21}$$

De tre led på højre side har følgende betydning. Det første repræsenterer den impuls, der strømmer ind igennem fladen, idet $-\Delta t d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}\rho v_i$ er den impuls, der i tidsrummet Δt strømmer ind gennem fladeelementet $d\mathbf{S}$. Det andet led skyldes overfladekræfter, idet $d\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i$ er kraften hidrørende fra omgivelserne af V på overfladeelementet $d\mathbf{S}$, mens det tredje led er bidraget fra volumenkræfterne, da ρf_i som nævnt er kraften per volumenenhed (f. eks. hidrørende fra tyngdekraften). Ved brug af Gauss' sætning følger nu (1.20) med

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}. \tag{1.22}$$

Vi mangler endnu at gøre rede for σ_{ik}, der betegnes som spændingstensoren. For en ideel væske er

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}. \tag{1.23}$$

Er væsken ikke ideel, men viskøs, afhænger spændingstensoren ikke alene af trykket, men desuden af de afledede af hastighedsfeltet. Spændingstensoren for en isotrop væske kan skrives på den generelle form

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \tag{1.24}$$

hvor

$$\sigma'_{ik} = \eta(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \tag{1.25}$$

Konstanterne η og ζ, der skal være positive, men ellers er arbitrære, betegnes som henholdsvis første og anden viskositet.

For en inkompressibel væske er

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1.26}$$

hvorved (1.20) bliver

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f}, \tag{1.27}$$

der betegnes som Navier-Stokes ligningen.

1.3 Opgaver

Opgave 1.1

I denne opgave betragter vi todimensionale vektorer i en plan. Vektoren $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$ betegnes også ved A_i, hvor $i = x, y$, og der summeres som sædvanligt over gentagne indices. Drejninger af koordinatsystemet igennem vinklen ϕ frembringes ved 2×2 matricer, svarende til de to første rækker og søjler af matricen (1.5).

Koordinatsystemet S' oplyses at være drejet vinklen $\phi = \pi/6$ i forhold til S.

a) Find vektoren $\mathbf{A}'$ svarende til $\mathbf{A} = (3, 2)$ samt vektoren $\mathbf{B}'$ svarende til $\mathbf{B} = (1, 4)$.

b) Angiv de fire elementer i tensoren A_iB_k samt de tilsvarende elementer $A'_iB'_k$. Udregn størrelserne A_iB_i og $A'_iB'_i$.

Opgave 1.2

Vi betragter den todimensionale strømning af en inkompressibel væske i halvrummet $x > 0$ igennem en kanal, hvis bredde $2d(x)$ er givet ved

$$d(x) = \frac{d_0}{1 + (x/l)}, \tag{1.28}$$

hvor d_0 og l er positive konstanter. Det oplyses, at x-komponenten af væskehastigheden i kanalen, der udgør området $0 < x < \infty, -d(x) < y < d(x)$, er givet ved

$$v_x = v_0(1 + \frac{x}{l})(1 - \frac{y^2}{d^2(x)}), \tag{1.29}$$

for $-d(x) < y < d(x)$, idet v_0 er en positiv konstant.

a) Skitser $v_x(y)$ for forskellige værdier af x/l og vis, at integralet

$$\int_{-d(x)}^{d(x)} dy v_x(y)$$

er uafhængigt af x. Hvad er det fysiske indhold af dette resultat?

b) Benyt kontinuitetsligningen til at finde v_y som funktion af x og y. Skitser v_y for fastholdt x som funktion af y.

2 Hydrodynamik

I dette kapitel behandler vi bevægelse i væsker med gnidning (afsnit 2.1) og ideale væsker (afsnit 2.2) samt udleder varmeligningen (afsnit 2.3).

2.1 Væsker med gnidning

For at illustrere betydningen af Reynolds-tallet skal vi i det følgende undersøge bevægelsen af en kugle i en væske og udlede Stokes' lov for gnidningskraften på kuglen. Kuglens radius kaldes a, dens hastighed $\mathbf{u}_0$, mens ν er væskens kinematiske viskositet, $\nu = \eta/\rho$. Reynolds-tallet Re er defineret ved

$$\mathrm{Re} = \frac{au_0}{\nu}. \tag{2.1}$$

Navier-Stokes ligningen for en usammentrykkelig væske er

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p + \nu\nabla^2\mathbf{u}. \tag{2.2}$$

Først undersøges bevægelsen for små værdier af Re, d. v. s. at vi ser bort fra leddet $(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$ i Navier-Stokes ligningen i forhold til $\nu\nabla^2\mathbf{u}$.

2.1.1 Kugle i væske

Hvis kuglen bevæger sig med tilstrækkelig lille hastighed $\mathbf{u}_0$, må vi kunne se bort[1] fra leddet $(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$ i (2.2). Det er bekvemt at beskrive kuglens bevægelse i et koordinatsystem, hvori den ligger stille, mens væsken i det uendeligt fjerne antages at bevæge sig med den konstante hastighed $\mathbf{u}_0$. Koordinatsystemets begyndelsespunkt er i kuglens centrum. Da væsken er usammentrykkelig, bliver kontinuitetsligningen

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{2.3}$$

der gør det muligt at indføre et vektorpotential $\mathbf{A}$ ved definitionen

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} + \mathbf{u}_0. \tag{2.4}$$

Navier-Stokes-ligningen (2.2) bliver da

$$0 = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p + \nu\nabla^2\mathbf{u}. \tag{2.5}$$

Ved at tage rotationen af (2.5) ser vi, at

$$\nabla^2\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} = 0. \tag{2.6}$$

Da $\mathbf{A}$ må være proportional med $\mathbf{u}_0$, vil vi lede efter løsninger af formen

$$\mathbf{A} = g(r)\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{u}_0, \tag{2.7}$$

hvor $\hat{\mathbf{r}}$ er en enhedsvektor i retning af $\mathbf{r}$. Det vil vise sig bekvemt at sætte $g(r)$ lig med differentialkvotienten af en funktion $f(r)$, som vi skal bestemme, $g(r) = f'(r)$. Herved bliver $\mathbf{A}$ givet ved

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}f\times\mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{u}_0), \tag{2.8}$$

[1] Bemærk, at argumentet forudsætter, at der eksisterer en nul'te-ordens løsning, der tilfredsstiller grænsebetingelserne. Ved den tilsvarende bevægelse af en cylinder eksisterer den tilsvarende nul'te ordens løsning ikke, og det er derfor nødvendigt som udgangspunkt at tage hensyn til det ulineære led $(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$ i ligningen.

idet $\nabla f = f'(r)\hat{\mathbf{r}}$.

Af dette følger, at rotationen af hastighedsfeltet $\mathbf{u}$ kan skrives som

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times \nabla \times (f\mathbf{u}_0) = -\nabla^2\nabla \times (f\mathbf{u}_0) = -\nabla^2(\nabla f \times \mathbf{u}_0). \tag{2.9}$$

Ifølge (2.6) og (2.9) er da

$$\nabla^4(\nabla f \times \mathbf{u}_0) = 0 \tag{2.10}$$

eller, da $\mathbf{u}_0$ er en konstant vektor,

$$\nabla^4\nabla f = 0. \tag{2.11}$$

Af (2.11) kan vi endvidere slutte, at

$$\nabla^4 f = \text{konst.} = 0, \tag{2.12}$$

idet konstanten må sættes til nul, da hastighedsforskellen $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ (såvel som dens afledede) skal gå mod nul i det uendelige.

Da funktionen f afhænger af r alene, $f = f(r)$, får vi kun brug for den radiale del af Laplace-operatoren ∇^2,

$$\nabla^2 \rightarrow \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}. \tag{2.13}$$

Idet

$$(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr})r^n = (n+1)nr^{n-2}, \tag{2.14}$$

ser vi, at

$$(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr})h(r) = 0 \tag{2.15}$$

har den almindelige løsning

$$h(r) = \frac{B}{r} + C. \tag{2.16}$$

Her må konstanten C imidlertid sættes til nul, for at hastighedsforskellen $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ kan forsvinde i det uendelige. Derved bliver differentialligningen for f givet ved

$$(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr})f(r) = \frac{B}{r}, \tag{2.17}$$

der har den almindelige løsning

$$f(r) = \frac{C}{r} + D + \frac{1}{2}Br. \tag{2.18}$$

I (2.18) kan vi nu uden videre sætte $D = 0$, da denne konstant ikke bidrager til vektorpotentialet. Herved fås løsningen

$$f(r) = \frac{C}{r} + \frac{1}{2}Br, \tag{2.19}$$

der altså indeholder to arbitrære konstanter, hvis værdier er bestemt af grænsebetingelserne for hastighedsfeltet på kuglens overflade.

Vi udtrykker vektorpotentialet $\mathbf{A}$ i sfæriske koordinater, idet retningen langs $\mathbf{u}_0$ vælges som polarakse. Herved bliver krydsproduktet af $\hat{\mathbf{r}}$ og $\mathbf{u}_0$ rettet langs $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, så både A_r og A_θ er nul. Komposanten A_ϕ ses at være givet ved

$$A_\phi = -u_0 \sin\theta f'(r). \tag{2.20}$$

Resultatet (2.20) sætter os i stand til ved hjælp af (2.4) at nedskrive hastighedskomposanterne i polære koordinater,

$$u_r = -\frac{2f'}{r}u_0\cos\theta + u_0\cos\theta \tag{2.21}$$

og

$$u_\theta = (f'' + \frac{f'}{r})u_0\sin\theta - u_0\sin\theta. \tag{2.22}$$

Da u_r og u_θ begge skal forsvinde på kuglens overflade, $r = a$, fås ved brug af (2.21) og (2.22) to ligninger til bestemmelse af B og C, nemlig

$$\frac{2C}{a^3} - \frac{B}{a} + 1 = 0 \tag{2.23}$$

og

$$\frac{C}{a^3} + \frac{B}{2a} - 1 = 0, \tag{2.24}$$

der medfører, at $f(r)$ bliver givet ved

$$f(r) = \frac{3ar}{4} + \frac{a^3}{4r}. \tag{2.25}$$

Ved indsættelse af f i (2.21) og (2.22) fås nu det endelige udtryk for hastighedskomposanterne i polære koordinater

$$u_r = (\frac{a^3}{2r^3} - \frac{3a}{2r})u_0\cos\theta + u_0\cos\theta \tag{2.26}$$

og

$$u_\theta = (\frac{a^3}{4r^3} + \frac{3a}{4r})u_0\sin\theta - u_0\sin\theta. \tag{2.27}$$

Før vi benytter resultaterne (2.26) og (2.27) til at beregne kraften på kuglen hidrørende fra væskens bevægelse, vil vi finde trykket, der ifølge (2.5) er bestemt af

$$\boldsymbol{\nabla} p = \eta\nabla^2\mathbf{u} = \eta\nabla^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{u}_0). \tag{2.28}$$

Da

$$\nabla^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{u}_0) = \nabla^2(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{u}_0)) - \mathbf{u}_0\nabla^2 f) = \nabla^2\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{u}_0)) \tag{2.29}$$

på grund af (2.12), har vi

$$p = p_0 + \eta\mathbf{u}_0\cdot\boldsymbol{\nabla}\nabla^2 f = p_0 + \eta\mathbf{u}_0\cdot\boldsymbol{\nabla}(\frac{B}{r}) = p_0 + \eta\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{u}_0\frac{B}{r}), \tag{2.30}$$

hvor p_0 er det konstante tryk uendeligt langt borte. Ved at bruge $\mathbf{u}_0 = u_0\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - u_0\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ samt udtrykket for divergensen i sfæriske koordinater fås slutresultatet

$$p = p_0 - \eta u_0\frac{B}{r^2}\cos\theta = p_0 - \eta u_0\frac{3a}{2r^2}\cos\theta, \tag{2.31}$$

idet $B = 3a/2$.

Til slut findes kraften $\mathbf{F}$ på kuglen hidrørende fra væskens bevægelse. Da kraften har samme retning som hastigheden $\mathbf{u}_0$, kan vi bestemme den ved at projicere kraften på overfladeelementet $dS = a^2\sin\theta d\theta d\phi$ ind på denne akse, der er valgt som polarakse, og integrere over vinklerne,

$$F = a^2\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\int_0^{2\pi} d\phi(-p\cos\theta + \sigma'_{rr}\cos\theta - \sigma'_{r\theta}\sin\theta)|_{r=a}, \tag{2.32}$$

hvor

$$\sigma'_{rr} = 2\eta\frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{2.33}$$

og

$$\sigma'_{r\theta} = \eta(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}). \tag{2.34}$$

Ved at benytte (2.26) og (2.27) finder vi da, at

$$\sigma'_{rr}|_{r=a} = 0 \tag{2.35}$$

og

$$\sigma'_{r\theta}|_{r=a} = -\frac{3\eta}{2a}u_0\sin\theta, \tag{2.36}$$

der indsat i (2.32) giver slutresultatet

$$F = 6\pi a\eta u_0. \tag{2.37}$$

Dette er Stokes' lov. Bemærk at vi i dette specielle tilfælde ikke behøver at udføre vinkelintegrationen, da integrandens vinkelafhængighed er givet ved $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Lad os nu vende tilbage til Navier-Stokes ligningen for den stationære strømning og medtage det ulineære led,

$$(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p + \nu\nabla^2\mathbf{u}. \tag{2.38}$$

Hvis vi i denne ligning indfører nye variable ifølge

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{u_0}\mathbf{u},\quad \mathbf{r}' = \frac{1}{a}\mathbf{r} \tag{2.39}$$

får (2.38) formen

$$(\mathbf{u}'\cdot\boldsymbol{\nabla}')\mathbf{u}' = -\boldsymbol{\nabla}'p' + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla'^2\mathbf{u}'. \tag{2.40}$$

Vi ser, at størrelsen af Re har betydning for gyldigheden af den foretagne linearisering. Hvis man forsøger at beregne kraften ved at gå til højere orden i Reynolds-tallet, finder man, at (2.37) skal multipliceres med faktoren

$$(1 + \frac{3}{8}\mathrm{Re}) \tag{2.41}$$

for $\mathrm{Re} \ll 1$.

Det er værd at bemærke, at selv om $\mathrm{Re} \ll 1$ vil løsningen for selve hastighedsfeltet i store afstande ($r \gg a/\mathrm{Re}$) afvige stærkt fra det fundne (2.26) og (2.27). Dette kan indses ved at indsætte løsningen (2.26)-(2.27) på venstre side af (2.40) hvorved man får et led, der i store afstande r er af størrelsesordenen $u_0^2 a/r^2$, mens gnidningsleddet på højre side tilsvarende giver et led af størrelsesordenen $\nu u_0 a/r^3$. Forholdet mellem disse to led er altså $(r/a)\mathrm{Re}$, der er meget større end 1, hvis $r \gg a/\mathrm{Re}$. Tæt ved kuglen er hastighedsfeltet imidlertid godt bestemt, når $\mathrm{Re} \ll 1$, og da kraften på kuglen involverer de afledede af hastighedskomposanterne ved kuglens overflade, giver Stokes' lov den rigtige kraft, når $\mathrm{Re} \ll 1$, selv om den foretagne approksimation giver en dårlig beskrivelse af hastighedsfeltet i store afstande.

2.2 Ideale væsker

I en *ideal* væske ser vi bort fra leddet $\nu\nabla^2\mathbf{u}$ i Navier-Stokes ligningen i forhold til $(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$. Hvis væsken antages at være usammentrykkelig, bliver kontinuitetsligningen

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}=0. \tag{2.42}$$

Er strømningen ydermere rotationsfri,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}=0, \tag{2.43}$$

kan vi indføre et hastighedspotential ϕ ved ligningen

$$\mathbf{u}=\boldsymbol{\nabla}\phi, \tag{2.44}$$

hvoraf følger, at ϕ må tilfredsstille Laplace-ligningen

$$\nabla^2\phi=0. \tag{2.45}$$

I det følgende vil vi give to eksempler på løsning af Laplace-ligningen. Det første vedrører bevægelsen af en kugle igennem en ideal væske, mens det andet omhandler overfladebølger.

2.2.1 Kugle i væske

Vi betragter en kugle med radius a, der bevæger sig igennem væsken med hastighed $\mathbf{u}_0$. I store afstande fra kuglen er væskehastigheden lig med nul. Vi benytter et koordinatsystem, der er i hvile, således at kuglens centrum $\mathbf{r}_c$ i dette system bevæger sig med hastigheden $\mathbf{u}_0$, svarende til

$$\mathbf{r}_c=\mathbf{u}_0 t. \tag{2.46}$$

Stedvektoren regnet fra koordinatsystemets begyndelsespunkt betegnes med $\mathbf{r}'$, mens vektoren $\mathbf{r}$, der er defineret ved

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}'-\mathbf{u}_0 t, \tag{2.47}$$

angiver stedvektoren relativt til kuglens centrum. Fra elektrostatikken ved vi, at (2.45) har løsninger svarende til potentialet fra en elektrisk dipol. Disse har formen

$$\phi(\mathbf{r})=-\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}}{r^3}=-\cos\theta\frac{A}{r^2}, \tag{2.48}$$

hvor θ er vinklen mellem $\mathbf{A}$ og $\mathbf{r}$. Det ses, at potentialet tilfredsstiller (2.45), idet

$$\nabla^2(\cos\theta/r^2)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial(\cos\theta/r^2)}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial(\cos\theta/r^2)}{\partial\theta})=0.$$

For at bestemme $\mathbf{A}$, udtrykt ved $\mathbf{u}_0$ og kuglens radius, benytter vi, at hastighedskomposanterne ifølge (2.44) er givet ved gradienten af ϕ,

$$u_r=2\frac{\cos\theta}{r^3}A,\quad u_\theta=\frac{\sin\theta}{r^3}A. \tag{2.49}$$

Da $u_r=u_0\cos\theta$ for $r=a$, må $\mathbf{A}$ være givet ved

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{u}_0 a^3. \tag{2.50}$$

Vi har her nedskrevet hastighedskomposanterne i et polært koordinatsystem, der har kuglens centrum som origo.

Nu kan trykket findes af Bernoullis ligning, idet vi skal tage hensyn til, at hastighedspotentialet ϕ afhænger explicit af tiden i kraft af (2.47). Vi får ved kuglens overflade ($r = a$)

$$\begin{aligned} p &= p_0 - \frac{1}{2}\rho u^2 - \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} \\ &= p_0 - \frac{1}{8}\rho u_0^2(3\cos^2\theta + 1) + \rho\frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{r}}\cdot \mathbf{u}_0 \\ &= p_0 - \frac{1}{8}\rho u_0^2(3\cos^2\theta + 1) + \rho(u_0\cos\theta\hat{r} + \frac{1}{2}u_0\sin\theta\hat{\theta})\cdot(u_0\cos\theta\hat{r} - u_0\sin\theta\hat{\theta}) \\ &= p_0 + \frac{1}{8}\rho u_0^2(9\cos^2\theta - 5), \end{aligned} \tag{2.51}$$

der viser, at trykket er uændret, når θ erstattes med $\pi - \theta$. Der er derfor ingen resulterende kraft på kuglen, i modsætning til forholdene ved små Reynolds-tal, hvor trykket ved overfladen var givet ved

$$p = p_0 - \eta u_0\frac{3}{2a}\cos\theta, \tag{2.52}$$

jvf. (2.31).

2.2.2 Overfladebølger

Vi stikker nu til søs og iagttager bølgerne på havets overflade. Ved brug af dimensionsanalyse er det en enkel sag at angive sammenhængen mellem overfladebølgernes frekvens ω og længden k af bølgetalsvektoren $\mathbf{k}$, idet vi kun har tyngdeaccelerationen g til rådighed for dimensionsanalysen (massetætheden ρ kan ikke indgå i resultatet, da både kraften på en væskepartikel og dens masse er proportional med massetætheden). Den eneste frekvens, der kan dannes ud fra k og g, er (på nær en numerisk konstant) givet ved

$$\omega = \sqrt{gk}. \tag{2.53}$$

Det samme resultat ville i øvrigt fremkomme, hvis vi havde medtaget massetætheden ρ i dimensionsanalysen. Overfladebølgernes hastighed afhænger altså af deres bølgelængde.

Vi vil nu udlede resultatet (2.53) ved at løse Laplace-ligningen med de relevante grænsebetingelser. For en ideal væske, der er påvirket af en volumenkraft $\rho\mathbf{f}$ (som f. eks. tyngdekraften) gælder

$$\nabla(p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}) = \rho\mathbf{f}. \tag{2.54}$$

Idet volumenkraften $\rho\mathbf{f}$ (der er en krafttæthed) antages at være givet ved potentialet $U = U(x, y, z)$ ifølge

$$\mathbf{f} = -\nabla U, \tag{2.55}$$

medfører (2.54), at

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \rho U = \text{konstant}. \tag{2.56}$$

Hvis væsken befinder sig i et tyngdefelt (tyngdeacceleration g) med tyngdekraften modsat rettet z-aksen, fås $U = gz$ og dermed

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \rho g z = 0. \tag{2.57}$$

Konstanten på højre side af (2.57) er her sat til at være nul, da vi altid kan lægge en vilkårlig tidsafhængig funktion til ϕ uden at ændre hastighedsfeltet $\mathbf{u} = \nabla\phi$. For en ideal, inkompressibel væske med rotationsfri strømning gælder, at hastighedspotentialet skal tilfredsstille (2.45). Hastighedspotentialet skal desuden tilfredsstille grænsebetingelserne for en ideal væske, nemlig at normalkomponenten af hastigheden er nul ved beholderens vægge.

Vi betragter nu en væske i en tank af uendelig udstrækning i x- og y-retningen. Væskens overflade i hvile er givet ved planen $z = 0$, mens tankens bund er planen $z = -h$ ($h > 0$). Grænsebetingelsen på ϕ er derfor

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{for} \quad z = -h. \tag{2.58}$$

Vi indfører betegnelsen $\zeta = \zeta(x, y, t)$ for z-koordinaten for et punkt på væskeoverfladen. I ligevægt gælder altså

$$\zeta = 0. \tag{2.59}$$

Det konstante (atmosfæriske) tryk på overfladen, p_0, kan fjernes ved transformationen $\phi' = \phi + p_0 t/\rho$. Derved bliver Bernoullis ligning ved overfladen (efter at ϕ' er omdøbt til ϕ)

$$\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{\partial\phi}{\partial t} + g\zeta = 0. \tag{2.60}$$

Idet F betegner funktionen $z - \zeta$, er overfladen defineret ved ligningen

$$F(\mathbf{r}, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0. \tag{2.61}$$

Overfladenormalen $\hat{n}$ er

$$\hat{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}. \tag{2.62}$$

Idet $\mathbf{u}_n$ betegner normalkomponenten af hastigheden ved overfladen, er den til tiden $t + dt$ forskudte overflade givet ved

$$F(\mathbf{r} + \mathbf{u}_n dt, t + dt) = 0. \tag{2.63}$$

Ved subtraktion af ligningerne (2.61) og (2.63) fås da

$$\mathbf{u}_n \cdot \nabla F + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{2.64}$$

Da $\mathbf{u}_n \cdot \nabla F = \mathbf{u} \cdot \nabla F$, får vi af (2.64) at

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} - \nabla\phi \cdot \nabla\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0 \tag{2.65}$$

ved væskens overflade.

I en lineær approksimation kan der ses bort fra det midterste led i (2.65), der derved bliver

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0. \tag{2.66}$$

Ligningen (2.66) udtrykker, at den tidsafledede af overfladens position, $\partial\zeta/\partial t$, i denne tilnærmelse er lig med z-komponenten af hastigheden, $\partial\phi/\partial z$, ved væskens overflade. Vil man beskrive ulineære fænomener som udbredelsen af solitoner er det nødvendigt også at tage hensyn til det midterste led i (2.65).

I det følgende benytter vi betingelsen (2.65) i den lineære approksimation (2.66). Løsningerne til (2.45) kan skrives på formen

$$\phi = (A\cosh k(z + h) + B\sinh k(z + h))\cos(kx - \omega t), \tag{2.67}$$

hvor A og B er integrationskonstanter. For at tilfredsstille grænsebetingelsen (2.58) må konstanten B imidlertid vælges til nul. Vi tager nu den tidsafledede af den lineariserede form af (2.60),

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \tag{2.68}$$

og kombinerer den med (2.66) til differentialligningen

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \tag{2.69}$$

der skal gælde ved væskens overfladen ($z = 0$). Herefter indsættes

$$\phi = A \cosh k(z + h) \cos(kx - \omega t) \tag{2.70}$$

i (2.69), og vi ser, at (2.69) er opfyldt, forudsat

$$\omega^2 = gk \tanh kh, \tag{2.71}$$

der er overfladebølgernes *dispersionsrelation.*

På det dybe vand, hvor bølgelængden er meget mindre end havdybden h, svarende til betingelsen $kh \gg 1$, bliver (2.71) til

$$\omega = \sqrt{gk} \tag{2.72}$$

i overensstemmelse med resultatet (2.53) af dimensionsanalysen. Hvis den modsatte betingelse gælder, $kh \ll 1$, fås dispersionsrelationen for *kanalbølger*

$$\omega = \sqrt{gh}\, k. \tag{2.73}$$

Tidevandsbølgen i den engelske kanal er af kanalbølge-typen. Dens udbredelseshastighed er målt til 34 m/s. For en dybde h på 100 m, giver formlen $c = \sqrt{gh}$ en hastighed c, der er 31 m/s.

Bemærk, at dispersionsrelationen for dybvandsbølger (2.72) svarer til en gruppehastighed, der er halvt så stor som fasehastigheden. Gruppehastigheden v_g er i almindelighed defineret ved

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \tag{2.74}$$

som i tilfældet (2.72) giver

$$v_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}, \tag{2.75}$$

mens fasehastigheden v_f, der i almindelighed er defineret ved

$$v_f = \frac{\omega}{k}, \tag{2.76}$$

i det foreliggende tilfælde er givet ved

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k}}. \tag{2.77}$$

Når bølgelængden er meget lille, er det nødvendigt at tage hensyn også til vandets overfladespænding. Man finder da, at (2.72) skal erstattes med

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3, \tag{2.78}$$

hvor σ er overfladespændingen. For vand-luft overfladen er σ = 0,073 N/m. Det ses, at gruppehastigheden i dette tilfælde får et minimum som funktion af k ved bølgelængden 3 cm.

2.3 Varmeligningen

Den sidste af de fem ligninger, der karakteriserer strømninger i væsker, er varmeligningen. Denne ligning, der beskriver energibalancen, har ligesom ligningerne for masse- og impulsbalancen form af en generaliseret bevarelseslov

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = K. \tag{2.79}$$

I det følgende ser vi bort fra et eventuelt kildeled, der f. eks. kunne skyldes tilstedeværelsen af radioaktive atomer. Energitætheden Q er givet ved

$$Q = \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho u^2, \tag{2.80}$$

hvor ρ er massetætheden og ϵ betegner den indre energi per masseenhed, mens $\mathbf{u}$ er hastighedsfeltet. Vi vil vise, at varmestrømtætheden $\mathbf{J}$ er givet ved

$$J_i = \rho u_i(\epsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2) - \sigma'_{ik}u_k - k\frac{\partial T}{\partial x_i}. \tag{2.81}$$

Her er T temperaturen, mens σ'_{ik} betegner den irreversible del af spændingstensoren og k varmeledningsevnen.

For at vise (2.81) tager vi udgangspunkt i kontinuitetsligningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \tag{2.82}$$

og de i afsnit 1.2.2 omtalte ligninger

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = \rho f_i, \tag{2.83}$$

hvor

$$\Pi_{ik} = \rho u_i u_k - \sigma_{ik} \tag{2.84}$$

og

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \tag{2.85}$$

med

$$\sigma'_{ik} = \eta(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}. \tag{2.86}$$

Tilsammen medfører (2.82-2.85), at

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}(\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}). \tag{2.87}$$

Den tidsafledede af energitætheden $\rho(\epsilon + u^2/2)$ er

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho u^2) = w\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_i\frac{\partial u_i}{\partial t}. \tag{2.88}$$

Vi har her indført entalpien w, der hænger sammen med den indre energi ϵ og trykket p igennem

$$w = \epsilon + \frac{1}{\rho}p, \tag{2.89}$$

og benyttet, at entalpidifferentialet dw er givet ved

$$dw = Tds + \frac{1}{\rho}dp, \tag{2.90}$$

idet s er entropien per masseenhed. Det følger ydermere af (2.90), at

$$u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho u_i\frac{\partial w}{\partial x_i} - \rho T u_i\frac{\partial s}{\partial x_i}. \tag{2.91}$$

Idet

$$u_i u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}u_j\frac{\partial(u_i u_i)}{\partial x_j}, \tag{2.92}$$

får vi ved brug af (2.82), at

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho u^2) = -(w + \frac{1}{2}u^2)\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} - \rho u_i\frac{\partial}{\partial x_i}(w + \frac{1}{2}u^2) + \rho T(\frac{\partial s}{\partial t} + u_i\frac{\partial s}{\partial x_i}) + u_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}. \tag{2.93}$$

For at identificere varmestrømtætheden skriver vi højresiden af (2.93) som $-\partial J_i/\partial x_i$ plus nogle led, hvis sum skal være nul, for at bevarelsesligningen er opfyldt. Da varme også kan strømme diffusivt, må vi tage hensyn til dette ved at addere og subtrahere leddet

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial T}{\partial x_i})$$

på højresiden af (2.93), der herefter bliver

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho u^2) &= \\ -\frac{\partial}{\partial x_i}[(w + \frac{1}{2}u^2)\rho u_i - \sigma'_{ij}u_j - k\frac{\partial T}{\partial x_i}]& \\ +\rho T(\frac{\partial s}{\partial t} + u_i\frac{\partial s}{\partial x_i}) - \sigma'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial T}{\partial x_i}).&\end{aligned} \tag{2.94}$$

For at belyse betydningen af leddene på højresiden af (2.94) vil vi først betragte en ideel væske uden varmeledning eller gnidning, svarende til $k = \sigma'_{ik} = 0$. Entropien af en bevæget væskepartikel kan da ikke ændre sig, svarende til at bevægelsen er adiabatisk,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla s = 0. \tag{2.95}$$

Energistrømtætheden er åbenbart

$$J_i = (w + \frac{1}{2}u^2)\rho u_i, \tag{2.96}$$

hvorved (2.93) bliver opfyldt. Når vi tager hensyn til indre gnidning og varmeledning, er energistrømtætheden

$$J_i = (w + \frac{1}{2}u^2)\rho u_i - \sigma'_{ij}u_j - k\frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{2.97}$$

idet $-\sigma'_{ij}u_j$ repræsenterer det arbejde, som gnidningskræfterne udfører per tidsenhed og fladeenhed. Ifølge (2.94) skal (2.95) da erstattes med

$$\rho T(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla s) = \sigma'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial T}{\partial x_i}) \tag{2.98}$$

for at sikre, at energibalancen er opfyldt. Ligningen (2.98) er varmeligningen.

Man er ofte interesseret i at betragte løsninger til varmeligningen svarende til konstant tryk. Når trykket er konstant, er $\partial s/\partial t = (\partial s/\partial T)_p \partial T/\partial t$ og $\partial s/\partial x_i = (\partial s/\partial T)_p \partial T/\partial x_i$. Idet varmefylden c_p (per masseenhed) ved konstant tryk er $c_p = T(\partial s/\partial T)_p$, fås

$$\rho c_p(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla T) = \sigma'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial T}{\partial x_i}). \tag{2.99}$$

2.4 Opgaver

Opgave 2.1

Vi betragter strømningen mellem to parallelle plader, hvis plan er vinkelret på z-aksen. Pladernes indbyrdes afstand er d. Den ene plade ligger stille, mens den anden bevæger sig i sin plan i x-aksens retning med hastighed u_0. Mellem pladerne befinder sig en inkompressibel væske med massetæthed ρ og viskositet η. Væsken strømmer i x-aksens retning under påvirkning af en trykgradient $-G$, hvor G er positiv. Opstil Navier-Stokes ligningen og bestem hastighedsprofilen ved hjælp af de sædvanlige grænsebetingelser på hastigheden. Diskuter specialtilfældene i) $u_0 = 0$ og ii) $G = 0$. Angiv betingelsen for, at væskehastigheden overstiger u_0 i (en del af) væsken. Bestem middelhastigheden $< u >$ i væsken i tilfældet $u_0 = 0$.

Opgave 2.2

Find for en inkompressibel væske med viskositet η og massetæthed ρ den samlede masse per tidsenhed, Q, der strømmer igennem området mellem to cylindre (radius R_1 og $R_2(> R_1)$), idet cylindrenes akser er sammenfaldende. Væsken strømmer under påvirkning af den konstante trykgradient $-G$ i retning af cylindrenes akse. Angiv resultatet i grænsen $R_1 \to 0$. Vis, at resultatet i grænsen $R_2 - R_1 \ll R_2$ er i overensstemmelse med udtrykket $Q = 2\pi R_1(R_2 - R_1)\rho < u >$, hvor $< u >$ er den i opgave 2.1 bestemte middelhastighed svarende til $d = R_2 - R_1$. Find den relative forskel (i procent) mellem det eksakte og det approksimerede udtryk, når $R_2/R_1 = 1,1$.

Opgave 2.3

En usammentrykkelig væske med viskositet η og massetæthed ρ flyder under tyngdens påvirkning nedad en plan, hvis normal danner vinklen θ med lodret. Vi antager, at strømningen er stationær, og at væskelagets tykkelse d er den samme overalt. Find hastigheden $u_x(y)$ som funktion af den (vinkelrette) afstand y fra planen (idet væskehastighedens retning vælges som x-akse) og bestem ligeledes, hvorledes trykket varierer som funktion af y. Angiv trykforskellen mellem væskens øverste og nederste lag for glycerin, idet d antages at være 1 cm, mens θ er 10 grader.

Opgave 2.4

Lad os betragte et udløbsrør, hvorigennem der løber vand. Nær rørets munding er der en indsnævring, hvor diameteren kun er en tredjedel af mundingens. Benyt Bernoullis ligning til at bestemme den udløbshastighed u (i m/s), hvorved trykket i snævringen ved normal barometerstand bliver 20 mm Hg (der ses bort fra gnidning).

Opgave 2.5

Vi vil undersøge potentialstrømningen omkring et cylinderformet legeme, hvis hastighed er $\mathbf{u}_0 \cos\omega t$, idet vi ønsker at bestemme trykket ved cylinderens overflade. Retningen af $\mathbf{u}_0$ er langs x-aksen, og vi indfører cylinderkoordinater ved $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$, hvor r angiver afstanden til cylinderens akse fra et punkt i væsken. Cylinderens radius kaldes R. Hastighedspotentialet betegnes med ψ, således at hastighedsfeltet er givet ved $\mathbf{u} = \nabla\psi$.

a) Vis, at

$$\psi = C\frac{\cos\phi}{r} \tag{2.100}$$

er en løsning til Laplace-ligningen for ψ og find komponenterne u_r og u_ϕ af det tilhørende hastighedsfelt $\mathbf{u} = u_r\hat{r} + u_\phi\hat{\phi}$. Bestem C, således at den radiale komponent af væskens hastighed ved overfladen er lig den radiale komponent $u_0 \cos\phi$ af cylinderens hastighed. Angiv den maksimale værdi af størrelsen af u_ϕ ved cylinderens overflade i det koordinatsystem, hvori væsken er i hvile langt fra cylinderen.

b) Benyt Bernoullis ligning

$$\nabla(p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\frac{\partial\psi}{\partial t}) = 0, \tag{2.101}$$

til at finde trykforskellen $p - p_0$ i væsken, hvor p_0 er trykket langt borte fra cylinderen. Hjælp: Udnyt, at koordinatsystemets begyndelsespunkt bevæger sig med hastigheden $\mathbf{u}_0 \cos\omega t$, til at vise at

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{u}}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}\cdot\mathbf{u}, \tag{2.102}$$

og bestem ved hjælp af denne relation $\partial\psi/\partial t$ og $p - p_0$.

Angiv trykket ved overfladen ($r = R$) som funktion af ϕ. Hvor stor er den maksimale trykforskel (i Pa) mellem to punkter på overfladen, når cylinderen bevæger sig med konstant hastighed ($\omega = 0$) for $\rho = 1$ g/cm^3 og $u_0 = 10$ cm/s?

Opgave 2.6

Interne bølger har interesse for oceanografien. Vi skal i denne opgave se, hvorledes interne tyngdebølger fremkommer i en væske med to lag af forskellig massefylde. Væskens fri overflade i hvile er givet ved $z = h$. I hvile udfylder det øverste væskelag, der har den mindste massefylde ρ_2, området $0 < z < h$, mens det nederste væskelag, med massefylde $\rho_1 > \rho_2$, udfylder området $-\infty < z < 0$. Tyngdekraften er rettet modsat z-aksen.

Begrund, at grænsebetingelsen ved skillefladen mellem væskerne i den lineære approksimation er

$$\rho_2\frac{\partial\phi_2}{\partial t} - \rho_1\frac{\partial\phi_1}{\partial t} = (\rho_1 - \rho_2)g\zeta, \tag{2.103}$$

hvor ζ angiver skillefladens position ($\zeta = 0$ i hvile). Angiv løsningerne for ϕ_1 og ϕ_2 i de to områder og benyt kontinuiteten af hastighedskomposanten u_z og (2.103) til at finde dispersionsrelationen af de tyngdebølger, der udbreder sig på skillefladen og den fri overflade. Diskuter tilfældet $kh \gg 1$.

Opgave 2.7

Vi undersøger nu strømningen af en usammentrykkelig væske med massetæthed ρ mellem to planparallelle plader, hvis indbyrdes afstand er d. Vi antager, at hastighedsfeltet overalt er rettet langs y-aksen, $\mathbf{u} = (0, u_y, 0)$. Trykket p varierer lineært i y-aksens retning, svarende til den konstante trykgradient $\partial p/\partial y = -G$ ($G > 0$). Væskens viskositet er η og dens varmeledningsevne k.

a) Bestem $u_y(x)$ i området mellem de to plader $-d/2 < x < d/2$ ved brug af de sædvanlige grænsebetingelser og find middelværdien u_m af hastighedsfeltet, hvor u_m er defineret ved

$$u_m = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} dx u_y(x). \tag{2.104}$$

b) Benyt varmeligningen

$$\rho c_p(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla T) = \sigma'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial T}{\partial x_i}). \tag{2.105}$$

til at opstille en differentialligning til bestemmelse af temperaturprofilen $T(x)$. Find $T(x)$ med grænsebetingelsen $T(x) = T_0$ for $x = \pm d/2$ med den under a) bestemte hastighedsprofil.

c) Definer et Reynoldstal og find dets værdi for glycerin, når $u_m = 10$ cm/s og $d = 1$ cm, og bestem Prandtl-tallet $\mathrm{Pr} = \eta c_p/k$ for glycerin, idet det oplyses at

$$\rho = 1,3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3; \quad c_p = 2,3 \cdot 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}; \quad k = 0,29 \text{ J/m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}; \quad \eta = 2,3 \text{ kg/m} \cdot \text{s}.$$

d) Udtryk den maksimale temperaturvariation $\Delta T = |T(x) - T_0|_{\max}$ ved u_m, c_p og Prandtl-tallet, og find størrelsen af ΔT for de under c) givne parametre.

Opgave 2.8

Periodiske temperatursvingninger ved en gletchers overflade giver via diffusion og advektion (d.v.s. strømning) anledning til temperaturvariationer ned gennem gletcheren. Vi skal i denne opgave behandle varmetransport på basis af ligningen

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} T\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_i}\right), \tag{2.106}$$

der følger af (2.99), hvis der ses bort fra spændingskræfternes bidrag.

a) Vi betragter først tilfældet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (ingen advektion). Angiv en karakteristisk længde for temperaturvariationerne, idet perioden er givet ved $2\pi/\omega$. Bestem temperaturvariationen i halvrummet $z < 0$, når temperaturen på legemets overflade (i $z = 0$) er givet ved (realdelen af) $T_0 \exp(-i\omega t)$. Find på samme måde temperaturvariationen uden for en kugle (radius R), hvis overfladetemperatur er $T_0 \exp(-i\omega t)$.

b) For en gletcher er det undertiden nødvendigt også at tage hensyn til advektion. Idet gletcheren udfylder halvrummet $z < 0$, skal temperaturvariationen bestemmes under antagelse af, at hastigheden $\mathbf{u}$ er konstant, $\mathbf{u} = (0, 0, -u_0)$, hvor u_0 er positiv. Skitser resultatet for $k/\rho c_p = 38$ m^2/år og $u_0 = 1$ m/år og perioder på i) 1 år og ii) 100000 år.

3 Elasticitetsteori

Faste legemer adskiller sig fra flydende ved at indtage en bestemt ligevægtsform, når de ikke påvirkes af ydre kræfter. Hvis et fast legeme påvirkes af ydre kræfter, vil disse deformere legemet, men deformationerne forsvinder, når de ydre kræfter fjernes (forudsat at de ydre kræfter ikke er for store). Som eksempel på en sådan deformation kan vi betragte en jernstang med længde l og antage, at der på hver af stangens endeflader virker modsat rettede trækkræfter, hvis størrelse er K. Man finder, at jernstangens forlængelse Δl er proportional med såvel stangens længde l som kraften K, mens den er omvendt proportional med stangens tværsnitsareal A,

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{K}{A}. \tag{3.1}$$

Konstanten E kaldes *Youngs modul.* For en given kraft K, bliver længdeforøgelsen Δl altså dobbelt så stor, hvis stangens længde fordobles. At forlængelsen er proportional med kraften, betegnes som *Hookes lov.* I det nævnte eksempel er det altså kraften per arealenhed, K/A, der bestemmer størrelsen af den relative forlængelse, $\Delta l/l$. De ydre kræfter, der virker på stangens endeflader, forårsager ikke alene en længdeforøgelse, men medfører også, at stangen trækker sig sammen i retningen vinkelret på dens længderetning på grund af de indre spændinger, som kræfterne giver anledning til.

I dette afsnit skal vi se, hvorledes man i elasticitetsteorien beskriver sammenhængen mellem deformationer, indre spændinger og ydre kræfter.

3.1 Elasticitetsteoriens grundligninger

Kontinuumsmekanikkens grundligninger har form af generaliserede bevarelseslove (jvf. kapitel 1)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = K, \tag{3.2}$$

hvor Q betegner en tæthed, J_i en strømtæthed, mens K angiver et kildeled. I elasticitetsteorien identificerer vi Q med $\rho\partial u_i/\partial t$, J_k med $-\sigma_{ik}$ og K med ρf_i, idet u_i betegner forskydningsfeltet, σ_{ik} spændingstensoren, ρ massetætheden og f_i volumenkraften per masseenhed. Herved bliver (3.2) lig med

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i, \tag{3.3}$$

der er elasticitetsteoriens fundamentale bevægelsesligning.

For at kunne udnytte bevægelsesligningen (3.3) må vi kende sammenhængen mellem forskydningsfeltet og spændingstensoren. En bestemt deformationstilstand angives ved forskydningsfeltet $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, der er defineret ved $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r})$, hvor $\mathbf{r}'$ angiver den nye position og $\mathbf{r}$ den oprindelige ligevægtsposition af en stofdel. Længdeelementerne dl og dl' er givet ved $dl^2 = dx_i dx_i$ og $dl'^2 = dx'_i dx'_i$. Deformationstilstanden karakteriseres ved de afledede $\partial u_i/\partial x_k$. Til første orden i de afledede bliver sammenhængen mellem dl og dl' givet ved

$$dl'^2 = dl^2 + 2\epsilon_{ik} dx_i dx_k, \tag{3.4}$$

hvor

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \tag{3.5}$$

kaldes deformationstensoren. Resultatet (3.4) vises ved at udtrykke de to længdeelementer dl og dl' ved $d\mathbf{x}$ og $d\mathbf{u}$,

$$dl^2 = dx_i dx_i \tag{3.6}$$

og

$$dl'^2 = (dx_i + du_i)(dx_i + du_i), \tag{3.7}$$

under brug af den sædvanlige summationskonvention. Vi udnytter nu, at $du_i = (\partial u_i/\partial x_k)dx_k$. Herved fås

$$dl'^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}dx_k dx_l \tag{3.8}$$

For små deformationer kan vi se bort fra det sidste led på højre side af (3.8). Det andet led i (3.8) kan skrives på symmetrisk form,

$$2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}dx_i dx_k = (\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i})dx_i dx_k, \tag{3.9}$$

ved at bytte om på summationsindices i og k. Herved fås

$$dl'^2 = dl^2 + (\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i})dx_i dx_k. \tag{3.10}$$

Hermed er (3.4) eftervist.

Spændingstensoren i et deformerbart legeme defineres på samme måde som for en væske. Idet de cartesiske koordinater betegnes med x_1, x_2, x_3, er spændingstensoren σ_{ik} i-komponenten af kraften, der virker på en fladeenhed[1] vinkelret på k-retningen $(i, k = 1, 2, 3)$. I et isotropt elastisk legeme kan spændingstensoren σ_{ik} kun indeholde led, der er proportionale med ϵ_{ik} eller $\delta_{ik}\epsilon_{ll}$. I et isotropt elastisk legeme kan vi derfor udtrykke sammenhængen mellem spændings- og deformationstensoren ved

$$\sigma_{ik} = 2\mu\epsilon_{ik} + \lambda\delta_{ik}\epsilon_{ll}, \tag{3.11}$$

hvor ϵ_{ll} er ensbetydende med $\nabla \cdot \mathbf{u}$. Koefficienterne λ og μ er positive materialkonstanter, der betegnes som Lamé-koefficienterne. Som vi skal se nedenfor, kan de udtrykkes ved Youngs modul E og Poissons forhold ν. At der kun er to uafhængige elastiske konstanter, er en følge af legemets isotropi, udtrykt som invarians over for en vilkårlig drejning.

I almindelighed er sammenhængen mellem σ_{ik} og ϵ_{ik} givet ved

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm}\epsilon_{lm}, \tag{3.12}$$

hvor elasticitetstensoren λ_{iklm} indeholder $3^4 = 81$ elementer. Disse er imidlertid ikke uafhængige, da λ_{iklm} tilfredsstiller symmetrirelationerne

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm}; \quad \lambda_{iklm} = \lambda_{ikml}; \quad \lambda_{iklm} = \lambda_{lmik}. \tag{3.13}$$

De to første relationer følger af symmetrien af σ og ϵ, den sidste af en energibetragtning. Idet σ og ϵ hver består af seks uafhængige elementer, der er knyttet sammen ved en symmetrisk 6×6 matrix, har λ_{iklm} derfor $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ uafhængige elementer, der ved valg af koordinatsystem reduceres til 18.

For isotrope legemer må λ-tensoren være invariant under en vilkårlig drejning. Derfor er

$$\lambda_{iklm} = \lambda\delta_{ik}\delta_{lm} + \mu(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}), \tag{3.14}$$

der ved indsættelse i (3.12) giver (3.11).

[1]Man betegner tensorens diagonalelementer som normalspændinger (engelsk: normal stress), mens de ikke-diagonale kaldes forskydningsspændinger (engelsk: shear stress).

3.2 Statiske deformationer

I det følgende betragter vi udelukkende statiske problemer og ser derfor bort fra leddet $\rho\partial^2 u_i/\partial t^2$ i (3.3), der bliver

$$0 = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i. \tag{3.15}$$

Når vi indsætter spændingstensoren (3.11) for et isotropt legeme i (3.15) bliver denne

$$0 = (\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{f}. \tag{3.16}$$

Grænsebetingelserne for løsningerne til denne ligning udtrykkes normalt ved spændingstensoren. Ved en fri overflade gælder således

$$\sigma_{ik} n_k = 0, \tag{3.17}$$

hvor n_i er komponenterne af den udadrettede fladenormal. Virker der en ydre kraft $P_i dS$ på overfladeelementet dS, er ligevægtsbetingelsen

$$P_i dS = \sigma_{ik} dS_k \tag{3.18}$$

hvor $dS_k = n_k dS$.

3.2.1 Deformation af bjælke

Som eksempel på anvendelsen af (3.11) betragter vi en bjælke (med rektangulært tværsnit), der påvirkes af ydre kræfter. Forskydningsfeltet i det indre skal tilfredsstille differentialligningen

$$0 = (\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u}, \tag{3.19}$$

der ses at være opfyldt, dersom $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ afhænger lineært af hver af de tre komponenter af stedvektoren $\mathbf{r}$. Dette indebærer at ϵ_{11}, ϵ_{22} og ϵ_{33} er konstante overalt i bjælkens indre, hvorfor vi kan benytte (3.11) ved overfladerne til at bestemme deres værdi. I det følgende behandler vi først det tilfælde, hvor der virker et hydrostatisk tryk. Derefter diskuteres forholdene ved ensidig deformation.

Ved et såkaldt hydrostatisk tryk er

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}. \tag{3.20}$$

Idet (3.11) er en matrix-ligning, skal den være opfyldt for hvert af diagonalelementerne. Dette giver anledning til de tre ligninger

$$\begin{aligned} -p &= 2\mu\epsilon_{11} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ -p &= 2\mu\epsilon_{22} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ -p &= 2\mu\epsilon_{33} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Af ligningerne ses, at diagonalelementerne af ϵ_{ik} må være ens, hvad der også følger af en symmetribetragtning. Ved at lægge ligningerne sammen fås nu $-3p = (2\mu+3\lambda)(\epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33})$ eller

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu}. \tag{3.22}$$

Det følger, at sporet af ϵ-matricen er $\epsilon_{ii} = -p/K$, hvor $K = \lambda+2\mu/3$. Idet ϵ_{11} angiver den relative længdeforøgelse i 1-retningen, er summen af de tre diagonalelementer (sporet af matricen) åbenbart den relative volumenændring, idet vi har forudsat, at de relative længdeændringer er numerisk meget mindre end 1. Heraf ses, at $1/K$ er kompressibiliteten $-\Delta V/V\Delta p$.

Dernæst undersøger vi en ensidig deformation, der er givet ved et træk langs 3-aksen (z-aksen) svarende til $\sigma_{33} = p$. Herved bliver ligningerne erstattet med

$$\begin{aligned} 0 &= 2\mu\epsilon_{11} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ 0 &= 2\mu\epsilon_{22} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ p &= 2\mu\epsilon_{33} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Af symmetrigrunde er $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$. Ved at eliminere $\epsilon_{11}(= \epsilon_{22})$ finder vi, at

$$\epsilon_{33} = \frac{p(\lambda + \mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)}. \tag{3.24}$$

Ved at sammenholde (3.24) med definitionen (3.1) af Youngs modul kan vi udtrykke denne ved Lamé-koefficienterne,

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \tag{3.25}$$

Det ses endvidere, at $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = -\nu\epsilon_{33}$, hvor

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{3.26}$$

er en dimensionsløs størrelse, der betegnes som Poissons forhold.

Endelig skal vi undersøge det tilfælde, hvor der virker et træk $\sigma_{33} = p$ i længderetningen (z-retningen), samtidig med, at bjælken i x- og y-retningen påvirkes af så store spændinger, at dimensionerne ikke ændres i disse retninger, svarende til $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$. Herved fås

$$\epsilon_{33} = \frac{p}{\lambda + 2\mu} \tag{3.27}$$

og

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = p\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}. \tag{3.28}$$

Øvelse. Find i de tre ovennævnte tilfælde, hvormeget længden af en jernbjælke på 10 m ændres, når størrelsen af p er 1000 atmosfærer. For jern er $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa og $\nu = 0,29$.

3.2.2 Deformation af kugleskal

Som et sidste eksempel på anvendelse af elasticitetsteoriens grundligninger skal vi bestemme deformationen af en kugleskal, hvis indre radius er R_1, mens den ydre er R_2. Inden for kugleskallen (for $r < R_1$) er trykket p_1, mens det udenfor (for $r > R_2$) er p_2. Vi benytter ligningen (3.19) til at bestemme deformationen i det indre. Vi antager, at $\mathbf{u}$ er en funktion af r alene og rettet langs radiusvektor,

$$\mathbf{u} = u_r(r)\hat{r}. \tag{3.29}$$

Dette betyder, at $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, og (3.19) medfører derfor, at divergensen af $\mathbf{u}$ er konstant i kugleskallen. Vi betegner konstanten med a og har således

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} = a, \tag{3.30}$$

hvoraf vi kan slutte, at

$$u_r = \frac{ar}{3} + \frac{b}{r^2}. \tag{3.31}$$

Konstanterne a og b fastlægges ved grænsebetingelserne $\sigma_{rr} = -p_1$ for $r = R_1$ og $\sigma_{rr} = -p_2$ for $r = R_2$. Ifølge App. A er deformationstensoren da givet ved

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \; \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}; \; \epsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r}, \tag{3.32}$$

og σ_{rr} bliver således

$$\sigma_{rr} = 2\mu\epsilon_{rr} + \lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{\phi\phi}) = 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda(\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\frac{u_r}{r}). \tag{3.33}$$

Ved indsættelse og brug af grænsebetingelserne fås

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\frac{3}{3\lambda + 2\mu}; \; b = \frac{(p_1 - p_2)R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\frac{1}{4\mu}, \tag{3.34}$$

hvoraf spændingerne kan findes som funktion af r.

3.3 Opgaver

Opgave 3.1

Et todimensionalt, kvadratisk legeme udfylder området

$$0 < x < a, \quad 0 < y < a.$$

Legemet deformeres, svarende til deformationsfeltet

$$u_x = c_1 x + c_2 y, \quad u_y = c_3 x + c_4 y, \tag{3.35}$$

hvor $c_1 = 0,1$, $c_2 = 0,2$, $c_3 = 0,15$ og $c_4 = 0,05$.

a) Tegn omkredsen af det deformerede legeme i xy-planen.

b) Bestem elementerne af deformationstensoren

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i})$$

hvor $i = x, y$ og $k = x, y$.

c) Bestem arealændringen ΔA af det deformerede kvadrat og sammenlign den relative arealændring $\Delta A/a^2$ med størrelsen af ϵ_{ii}. Hvad er grunden til, at de er forskellige?

Opgave 3.2

Beregn spændingstensoren i en kugleskal af aluminium, når $R_1 = 1\text{m}$ og $R_2 = 1,1\text{m}$, mens $p_1 = 1000$ atmosfærer og $p_2 = 1$ atmosfære. Tegn deformationen u_r og spændingstensorens komponenter som funktioner af r. For aluminium er $E = 7 \cdot 10^{10}$ Pa og $\nu = 0,34$.

Opgave 3.3

I denne opgave vil vi bestemme forskydningsfeltet i en cylinderskal $R_1 < r < R_2$. Trykket er p_1 for $r < R_1$ og p_2 for $r > R_2$. Lamékoefficienterne betegnes som sædvanlig ved λ og μ.

a) Begrund, at $\mathbf{u}$ kun har en radialkomponent $u(r)$ og vis, at $\nabla \cdot \mathbf{u}$ er konstant.

b) Find $u(r)$ ud fra ligningen $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$ og benyt grænsebetingelserne på σ_{rr} til at fastlægge integrationskonstanterne.

c) Bestem samtlige elementer af den tilhørende spændingstensor som funktioner af r.

d) Diskuter specialtilfældene i) $R_1 = 0$ og ii) $p_1 = p_2 = p$.

e) Find hvorledes cylinderskallen deformeres ved en rotation med vinkelfrekvens ω om sin egen akse i tilfældet $p_1 = p_2 = 0$. Cylinderens massetæthed er ρ. Beregn størrelsen af $u(r)$ i $r = R_2$ for aluminium, idet det opgives, at $\omega = 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$, $\rho = 7,9\ \mathrm{g/cm}^3$, $R_1 = 50$ cm og $R_2 = 80$ cm.

Opgave 3.4

I det følgende undersøges deformationen af en kugle hidrørende fra dens tyngdefelt. Kuglens radius er R, dens massetæthed ρ, og dens elastiske egenskaber er givet ved Lamé-koefficienterne λ og μ.

a) Begrund, at tyngdefeltet giver anledning til en (volumen)kraft per masseenhed, $\mathbf{f}$, der er givet ved

$$\mathbf{f} = -g\frac{\mathbf{r}}{R}$$

hvor g er tyngdeaccelerationen ved kuglens overflade.

b) Bestem forskydningsfeltets radialkomponent, $u_r(r)$, idet spændingstensorens element $\sigma_{rr}(r)$ antages at være lig med nul for $r = R$, svarende til en fri overflade.

c) Tegn $u_r(r)$ og $\sigma_{rr}(r)$ som funktioner af r/R.

d) Vurder størrelsen af $u_r(R)$ for jordkuglen samt trykket i jordens centrum.

4 Lyd

Lyd udbreder sig i både luftarter, væsker og faste stoffer. Forskellen mellem luftarter og væsker på den ene side og faste stoffer på den anden er, at transversal lydudbredelse kun forekommer i faste stoffer. Som vi skal se i det følgende, kan vi bestemme lydens hastighed og dæmpning ud fra de lineariserede grundligninger, idet vi tager hensyn til, at såvel massetæthed som hastighedsfelt varierer i rum og tid.

4.1 Lyd i faste stoffer

I det forrige kapitel har vi vist, at lydudbredelsen i isotrope, elastiske legemer er bestemt af differentialligningen

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \tag{4.1}$$

Vi vil nu ud fra denne finde hastigheden af såvel longitudinale som transverse bølger, udtrykt ved Lamé-koefficienterne λ og μ samt massetætheden ρ.

Først undersøges det longitudinale tilfælde, i hvilket forskydningsfeltet $\mathbf{u}$ har samme retning som bølgevektoren $\mathbf{q}$. Vi indsætter en plan bølge

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \tag{4.2}$$

i (4.1). Antagelsen om at bølgen er longitudinal er ensbetydende med at $\mathbf{q} \times \mathbf{u} = 0$. Derved bliver $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = 0$, og (4.1) antager derfor den simplere form

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}). \tag{4.3}$$

Ved at indsætte (4.2) fås

$$\rho \omega^2 = (\lambda + 2\mu) q^2 \tag{4.4}$$

der viser, at den longitudinale lydhastighed c_l er givet ved

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \tag{4.5}$$

Tilsvarende findes hastigheden af transversale bølger, for hvilke det gælder at $\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = 0$. Dette medfører, at $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$, og (4.1) antager derfor formen

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \tag{4.6}$$

Ved at indsætte (4.2) fås nu

$$\rho \omega^2 = \mu q^2, \tag{4.7}$$

der viser, at den transversale lydhastighed c_t er givet ved

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{4.8}$$

4.1.1 Jordens egensvingninger

Lad os antage, at jorden kan tilnærmes ved en isotrop, elastisk jernkugle med konstant tæthed ρ og radius R, og bestemme kuglens radiale svingninger, idet trykket ved jordoverfladen sættes til nul. De radiale svingninger er givet ved forskydningsfeltet

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \hat{r} u_r(r) e^{-i\omega t}, \tag{4.9}$$

hvor $\hat{r}$ er en enhedsvektor i retning af radiusvektor (koordinatsystemets begyndelsespunkt er lagt i kuglens centrum).

Da $\mathbf{u}$ har retning langs $\hat{r}$ og da u_r kun afhænger af r, er rotationen af $\mathbf{u}$ lig med nul. Bevægelsesligningen[1] for $u_r = u(r)$ bliver derfor (jvf. Appendix A)

$$\frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu} u = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{2u}{r^2}. \tag{4.10}$$

Grænsebetingelsen for løsningen er, at normalspændingen ved overfladen skal være nul, $\sigma_{rr}|_{r=R} = 0$, svarende til

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = (2\mu + \lambda)\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} + 2\lambda \frac{u}{r}|_{r=R} = 0, \tag{4.11}$$

jvf. (4.33). Det ses, at løsningen til bevægelsesligningen (4.10) er $u(r) \propto j_1(\omega r/c_l)$, hvor c_l som før er den longitudinale lydhastighed, mens j_1 er den sfæriske Besselfunktion givet ved

$$j_1(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho^2} - \frac{\cos \rho}{\rho}. \tag{4.12}$$

Ved at indsætte $u(r) \propto j_1(\omega r/c_l)$ i betingelsen (4.11), differentiere og dividere igennem med cosinus fås følgende ligning til bestemmelse af egensvingningernes frekvens,

$$\frac{\tan kR}{kR} = \frac{1}{1 - (kR)^2(2\mu + \lambda)/4\mu}, \tag{4.13}$$

hvor $k = \omega/c_l$.

Ligningen (4.13) kan løses på lommeregneren. For jern er Poissons forhold ν lig med 0,29 og dermed $\lambda = 1,38\mu$, jvf. (4.26). Det ses, at den laveste egenfrekvens svarer til $kR = 2,65$ eller $\omega = 2,65 c_l/R$. Med $R = 6371$ km og $c_l = 6,0$ km/s får vi, at svingningstiden $2\pi/\omega$ er 42 minutter.

4.2 Overfladebølger

Lydudbredelse i isotrope, elastiske legemer er bestemt af differentialligningen (4.1). Vi har benyttet denne ligning til at finde hastigheden af longitudinale og transversale elastiske bølger i et uendeligt udstrakt legeme. Som vi skal se i det følgende, kan bølger imidlertid også udbrede sig på overfladen af et elastisk medium. Udbredelseshastigheden afhænger af Lamé-koefficienterne λ og μ samt massetætheden ρ, og er mindre end den transversale lydhastighed c_t.

I både det longitudinale og det transversale tilfælde tilfredsstiller forskydningsfeltet $\mathbf{u}$ en andenordens differentialligning af formen

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{u}, \tag{4.14}$$

[1] Bemærk, at ligningen for u har samme form som den radiale Schrödingerligning for en partikel, der befinder sig i en p-tilstand (svarende til et impulsmomentkvantetal $l = 1$) i potentialet $V(r) = 0$ for $r < R$, $V(r) = \infty$ for $r > R$.

hvor c er hastigheden af longitudinale, respektive transversale bølger. Dette ses ved at benytte, at $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) = \nabla\times\nabla\times\mathbf{u} + \nabla^2\mathbf{u}$ i (4.1), og udnytte at longitudinale bølger er rotationsfri, mens transversale bølger er divergensfri.

Lad os antage, at det elastiske medium udfylder halvrummet $z < 0$. Vi vil undersøge om en løsning af formen

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp i(kx - \omega t)e^{\kappa z} \tag{4.15}$$

tilfredsstiller (4.14). Ved indsættelse ser vi, at ligningen er opfyldt, hvis

$$\kappa^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{4.16}$$

For $z \to -\infty$ skal $\mathbf{u}$ forsvinde, og vi må derfor forlange, at κ er reel og positiv. Heraf følger, at bølgens fasehastighed ω/k må være mindre end den transversale lydhastighed c_t (hvorved den også bliver mindre end c_l). Grænsebetingelsen $\sigma_{iz} = 0$ $(i = x, y, z)$ ved overfladen $z = 0$ medfører, at $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$ for $z = 0$. Ved at vælge $u_y = 0$ bliver betingelsen $\epsilon_{yz} = 0$ automatisk opfyldt. Betingelsen $\sigma_{xz} = 0$ resulterer i $\epsilon_{xz} = 0$ eller

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \tag{4.17}$$

mens $\sigma_{zz} = 0$ medfører at

$$(\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} + \lambda\epsilon_{xx} = 0 \tag{4.18}$$

eller

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0. \tag{4.19}$$

Vi deler som nævnt forskydningsfeltet op i en rotationsfri del $\mathbf{u}_l$ og en divergensfri del $\mathbf{u}_t$. Det gælder altså, at

$$\frac{\partial u_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{tz}}{\partial z} = 0 \tag{4.20}$$

mens

$$\frac{\partial u_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} = 0 \tag{4.21}$$

Det ses af (4.20) at

$$u_{tx} = a\kappa_t e^{ikx + \kappa_t z - i\omega t} \tag{4.22}$$

og

$$u_{tz} = -ika e^{ikx + \kappa_t z - i\omega t} \tag{4.23}$$

mens (4.21) medfører at

$$u_{lx} = bk e^{ikx + \kappa_l z - i\omega t} \tag{4.24}$$

$$u_{lz} = -ib\kappa_l e^{ikx + \kappa_l z - i\omega t}, \tag{4.25}$$

hvor a og b er arbitrære konstanter. De to grænsebetingelser (4.18) og (4.19) giver ved indsættelse henholdsvis

$$a(\kappa_t^2 + k^2) + 2bk\kappa_l = 0 \tag{4.26}$$

og

$$2a\mu k\kappa_t + b(\lambda(\kappa_l^2 - k^2) + 2\mu\kappa_l^2) = 0. \tag{4.27}$$

Betingelsen for, at dette to-gange-to ligningssystem har egentlige løsninger, ses at være

$$(2 - x)^2(1 - \frac{x}{2})^2 = 4(1 - \frac{x}{2(1 + \alpha)})(1 - x). \tag{4.28}$$

Vi har her indført betegnelserne

$$x = \frac{\omega^2}{k^2 c_t^2}, \qquad \alpha = \frac{\lambda}{2\mu} \tag{4.29}$$

Ligningen (4.28) er en tredjegradsligning i x,

$$x^3 - 8x^2 + 8x\frac{3\alpha+2}{\alpha+1} - 8\frac{2\alpha+1}{\alpha+1} = 0. \tag{4.30}$$

Idet løsningen x viser sig at blive lidt mindre end 1, kan en tilnærmet værdi findes ved at indsætte $x = 1 - \delta$ og bortkaste alle led af orden δ^2 eller højere, hvorefter den resulterende førstegradsligning løses for δ med resultatet $\delta = (1+\alpha)/(3+11\alpha)$ (tredjegradsligningen kan naturligvis også løses eksakt). For $\alpha \to \infty$ er $\delta = 1/11$, svarende til en hastighed på 0,954 gange den transversale (det eksakte tal er 0,955). For $\alpha = 0$ er $\delta = 1/3$, svarende til en hastighed på 0,817 gange den transversale (det eksakte tal er 0,874).

4.3 Lyd i væsker og luftarter

Lydhastigheden i væsker og luftarter findes ud fra de hydrodynamiske grundligninger ved at linearisere i hastighedsfeltet $\mathbf{v}$ og afvigelserne $\rho' = \rho - \rho_0$ og $p' = p - p_0$, hvor index 0 angiver værdien i ligevægt. Hastighedsfeltet[2] (såvel som ρ' og p') antages at variere som

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \tag{4.31}$$

Kontinuitetsligningen reduceres derved til

$$\omega\rho' - \rho\mathbf{q}\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{4.32}$$

mens Navier-Stokes ligningen bliver

$$\rho\omega\mathbf{v} = \mathbf{q}p' - i\eta q^2\mathbf{v} - i(\frac{\eta}{3} + \zeta)\mathbf{q}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}). \tag{4.33}$$

4.3.1 Lydens hastighed

Vi antager at lyden udbredes adiabatisk, under konstant entropi s. Derved behøver vi ikke at tage hensyn til varmeligningen, der i dette tilfælde er

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial s}{\partial \mathbf{r}} = 0, \tag{4.34}$$

idet vi ser bort fra varmeledning. Det følger nu af (4.32) og (4.33) ved at sætte $\eta = \zeta = 0$, at

$$\omega\rho' = \rho\mathbf{q}\cdot\mathbf{v} \tag{4.35}$$

og

$$\rho\omega\mathbf{v} = \mathbf{q}p'. \tag{4.36}$$

Tryk- og tæthedsvariationer er derfor knyttet sammen ved

$$p' = \frac{\partial p}{\partial \rho}|_s \rho'. \tag{4.37}$$

[2]For at undgå at forveksle hastigheds- og forskydningsfelt betegner vi i det følgende hastighedsfeltet med $\mathbf{v}$.

Ved at tage det skalære produkt af (4.36) med $\mathbf{q}$ fås

$$\omega^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}|_s q^2. \tag{4.38}$$

Heraf følger, at den adiabatiske lydhastighed c er givet ved

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}|_s. \tag{4.39}$$

I termodynamikken vises det, at

$$\frac{\partial p}{\partial \rho}|_s = \frac{c_p}{c_v}\frac{\partial p}{\partial \rho}|_T, \tag{4.40}$$

hvor c_p og c_v henholdsvis er varmekapaciteten (per partikel) ved fastholdt tryk og ved fastholdt rumfang. For en ideal, monatomig gas er

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} \tag{4.41}$$

mens tilstandsligningen er $p = \rho kT/M$, der giver

$$\frac{\partial p}{\partial \rho}|_T = \frac{kT}{M}, \tag{4.42}$$

hvor M er massen af et atom. Benytter vi disse resultater på ædelgassen argon, finder vi at den adiabatiske lydhastighed c ved temperaturen $T = 273$ K er lig med 307,8 m/s, i overenstemmelse med den målte værdi.

4.3.2 Lydens dæmpning

Vi ser fortsat bort fra varmeledning og kan derfor finde sammenhængen mellem ω og q for transversale 'svingninger' ($\mathbf{q}\cdot\mathbf{v} = 0$) ud fra (4.32) og (4.33). Af (4.32) fremgår, at ρ' må være nul, således at bevægelsen foregår uden at væsken (eller luftarten) ændrer massetæthed. Vi tager nu krydsproduktet af (4.33) med $\mathbf{q}$ og får

$$\rho\omega\mathbf{q}\times\mathbf{v} = -i\eta q^2\mathbf{q}\times\mathbf{v}, \tag{4.43}$$

der viser at

$$\omega = -i\frac{\eta}{\rho}q^2. \tag{4.44}$$

Vælges q reel, bliver ω altså rent imaginær. Bevægelsen er derfor ingen svingning, men svarer til et eksponentielt henfald i tid.

For at undersøge dæmpningen af longitudinale bølger eliminerer vi trykændringen p' og hastighedsfeltet fra (4.33) ved at tage det skalare produkt af (4.33) med $\mathbf{q}$. Ved brug af kontinuitetsligningen

$$\omega\rho' - \rho\mathbf{q}\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{4.45}$$

ses det, at Navier-Stokes ligningen bliver

$$\omega^2\rho' = q^2c^2\rho' - i\frac{4\eta}{3\rho}q^2\omega\rho' - i\frac{\zeta}{\rho}q^2\omega\rho'. \tag{4.46}$$

Forudsat dæmpningen er lille, kan vi nu løse for ω med resultatet

$$\omega = cq - i\gamma \tag{4.47}$$

hvor

$$\gamma = \frac{1}{2\rho}(\frac{4\eta}{3} + \zeta)q^2. \tag{4.48}$$

Forholdet mellem γ og ω er et mål for den relative betydning af dæmpningen,

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{1}{2\rho c}(\frac{4\eta}{3} + \zeta)q. \tag{4.49}$$

Bemærk at forholdet vokser proportionalt med bølgetallet og dermed frekvensen.

4.4 Opgaver

Opgave 4.1

Man kan beskrive karakteristiske egenskaber ved viskoelastiske medier på basis af differentialligningen

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} = -\frac{\sigma_{ik}}{\tau} + 2\mu\frac{d\epsilon_{ik}}{dt}, \tag{4.50}$$

hvor μ er en konstant og τ en relaksationstid. Som sædvanlig betegner σ_{ik} spændingstensoren og ϵ_{ik} deformationstensoren.

Find sammenhængen mellem σ_{ik} og ϵ_{ik} for en periodisk oscillerende bevægelse (proportional med $e^{-i\omega t}$). Diskuter resultatet i grænserne $\omega\tau \gg 1$ og $\omega\tau \ll 1$, og sammenlign med bevægelsen i et elastisk medium og en væske. Kan transversal lyd forekomme? Angiv sammenhængen mellem væskens viskositet og parametrene μ og τ.

Opgave 4.2

I en kubisk krystal er der tre uafhængige elastiske konstanter, der betegnes som c_{11}, c_{12} og c_{44}. Udtrykt ved λ-tensorens elementer er disse

$$\begin{aligned} c_{11} &= \lambda_{1111} = \lambda_{2222} = \lambda_{3333}; \\ c_{12} &= \lambda_{1122} = \lambda_{2233} = \lambda_{3311}; \\ c_{44} &= \lambda_{1212} = \lambda_{2323} = \lambda_{3131}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

De af λ-tensorens øvrige elementer, der **ikke** er bestemt ud fra ovenstående ved symmetrirelationer, er lig med nul. Find den longitudinale lydhastighed i aluminium (massefylde 2,7 g/cm^3), når bølgens udbredelsesretning antages at være i [100]-retningen. Bestem ligeledes den longitudinale lydhastighed for udbredelse i [111]-retningen. De elastiske konstanter for aluminium er $c_{11} = 1,07 \cdot 10^{11}$ Pa, $c_{12} = 0,61 \cdot 10^{11}$ Pa, og $c_{44} = 0,28 \cdot 10^{11}$ Pa.

Opgave 4.3

Denne opgave går ud på at finde overgangen mellem adiabatisk og isoterm lydudbredelse i luftarter.

a) Vi ser først bort fra gnidningsleddene i Navier-Stokes ligningen. Vis, at lydhastigheden kan bestemmes af ligningen

$$q^4 - q^2(\frac{\omega^2 c_p}{c^2 c_v} + \frac{i\omega}{\kappa}) + \frac{i\omega^3}{\kappa c^2} = 0, \tag{4.52}$$

hvor $\kappa = k/\rho c_p$ er den termiske diffusivitet, mens c_v og c_p betegner varmekapaciteten (per masseenhed) ved henholdsvis konstant rumfang og konstant tryk. Som ovenfor betegner c

den adiabatiske lydhastighed givet ved $c^2 = (\partial p/\partial \rho)_s$. Find lydhastigheden og dæmpningen i de to tilfælde, hvor diffusionslængden $\sqrt{\kappa/\omega}$ er lille, henholdsvis stor i forhold til lydens bølgelængde.

b) Idet gnidningsleddene nu medtages i Navier-Stokes ligningen, skal korrektionen til γ (jvf. 4.47) hidrørende fra varmeledningsevnen bestemmes i grænsen for små k. Hvor stor er den procentiske korrektion i luft ved stuetemperatur, når Prandtl-tallet er 0,77, og der ses bort fra anden viskositet?

5 Rayleigh-Bénard instabiliteten

Vi betragter en inkompressibel væske i et tyngdefelt (tyngdeacceleration $\mathbf{g}$). Væsken befinder sig mellem to parallelle plader, hvis planer er vinkelret på tyngdeaccelerationen. Temperaturen af den øverste plade holdes fast på værdien T_1, mens den nederste plades temperatur fastholdes på den højere temperatur T_2, altså $T_2 > T_1$. Da væskens massetæthed afhænger af temperaturen, således at højere temperatur giver mindre massetæthed, vil der være en tendens til, at væsken stiger til vejrs ved konvektion. Denne tendens modvirkes imidlertid af gnidning og varmediffusion, således at konvektionen først indtræder, når temperaturforskellen $T_2 - T_1$ overstiger en bestemt værdi. Som vi skal se nedenfor, bestemmes instabiliteten af den dimensionsløse parameter Ra, der er defineret ved

$$\mathrm{Ra} = \frac{g\alpha(T_2 - T_1)d^3}{\nu\kappa}. \tag{5.1}$$

Her er α væskens udvidelseskoefficient, d afstanden mellem pladerne, $\nu = \eta/\rho$ den kinematiske viskositet og $\kappa = k/\rho c_p$ den termiske diffusivitet. Vi vil først bestemme den værdi af Ra, for hvilken instabiliteten indtræder. Derefter skal vi se, hvorledes Lorenz-ligningerne fremkommer som en tilnærmelse til de hydrodynamiske ligninger.

Udgangspunktet for behandlingen af Rayleigh-Bénard instabiliteten er de hydrodynamiske grundligninger. Da væsken antages at være usammentrykkelig, kan kontinuitetsligningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{5.2}$$

simplificeres til $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$. Navier-Stokes ligningen for en usammentrykkelig væske er givet ved

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}. \tag{5.3}$$

Variationen i krafttætheden $\rho\mathbf{f}$ skyldes som nævnt, at massetætheden afhænger af temperaturen,

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha T'), \tag{5.4}$$

hvor α er den positive udvidelseskoefficient, mens temperaturvariationen $T' = T - T_2$ er givet ved

$$T' = -Az + \tau. \tag{5.5}$$

Her er $A = (T_2 - T_1)/d$, mens τ repræsenterer afvigelsen fra en jævnt aftagende temperatur fra bunden af væsken i $z = 0$ til toppen i $z = d$.

Vi vil benytte den såkaldte Boussinesq approksimation, der kun tager hensyn til massetæthedens variation i kraften, men i øvrigt tilnærmer massetætheden ved en konstant. Desuden antages trykket at være tilnærmelsesvist konstant, således at α kan sættes lig med den termiske udvidelseskoefficient ved konstant tryk. Under disse omstændigheder bliver varmeligningen

$$\rho c_p(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} T) = k\nabla^2 T', \tag{5.6}$$

idet vi ser bort fra gnidningsleddet, der er af anden orden i de rumligt afledede af hastighedsfeltet.

Med betegnelserne $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$, $T = T_2 + T'$, $\nu = \eta/\rho_0$ og $\kappa = k/\rho_0 c_p$ bliver grundligningerne derfor

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla} p' + \nu\nabla^2\mathbf{u} - \alpha T'\mathbf{g}, \tag{5.8}$$

og

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T' = \kappa \nabla^2 T'. \tag{5.9}$$

Vi undersøger nu ligningerne (5.7), (5.8) og (5.9) idet det antages, at hastighedsfeltet kun afhænger af x og z. Kontinuitetsligningen er da

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \tag{5.10}$$

Da strømningsbilledet som antaget er todimensionalt, kan vi indføre et hastighedspotential **A** givet ved

$$\mathbf{A} = (0, \psi, 0) \tag{5.11}$$

hvor $\psi = \psi(x, z)$, således at

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{5.12}$$

Rotationen af hastighedsfeltet er da givet ved

$$\nabla \times \mathbf{u} = (0, -\nabla^2\psi, 0). \tag{5.13}$$

Vi kan nu eliminere trykket af Navier-Stokes ligningen (5.8) ved at tage rotationen af denne med resultatet

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x, z)} - \nu \nabla^4 \psi - g\alpha \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \tag{5.14}$$

Vi har indført notationen

$$\frac{\partial(\psi, \phi)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial x}. \tag{5.15}$$

Tilsvarende bliver (5.9)

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \tau)}{\partial(x, z)} - A\frac{\partial \psi}{\partial x} - \kappa \nabla^2 \tau = 0, \tag{5.16}$$

idet $A = (T_2 - T_1)/d$ er temperaturgradienten.

Ligningerne (5.14) og (5.16) skal nu løses med givne grænsebetingelser. Vi vælger de såkaldte åbne grænsebetingelser givet ved

$$\tau = 0, \quad u_z = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \text{ for } z = 0, d. \tag{5.17}$$

og leder efter løsninger af typen

$$\tau = C \cos kx \sin(\pi z/d) - D \sin(2\pi z/d); \quad \psi = B \sin kx \sin(\pi z/d), \tag{5.18}$$

hvor B, C og D er konstanter. Sådanne løsninger eksisterer ikke i almindelighed, som man kan overbevise sig om ved at indsætte i det ulineære ligningssystem, idet de ulineære led giver anledning til højere 'harmoniske' som f. eks. $\cos kx \sin 3\pi z/d$. Hvis man imidlertid negligerer de ulineære led, kan de to ligninger (5.14) og (5.16) opfyldes for en bestemt, kritisk værdi af Rayleigh-tallet, som vi skal se i det følgende. Dette giver grund til at forvente, at vi også tæt ved det kritiske Rayleigh-tal får en god beskrivelse af systemet ved at indsætte (5.18) i (5.14) og (5.16) og samler led, der er proportionale med $\sin kx \sin(\pi z/d)$, $\cos kx \sin(\pi z/d)$ og $\sin(2\pi z/d)$ over på venstre side. Alle andre led, der involverer højere harmoniske (som $\sin 2kx$ eller $\sin(3\pi z/d)$), negligeres. Vi indfører betegnelserne

$$k = a\frac{\pi}{d} \tag{5.19}$$

samt

$$r = \frac{Ra}{Ra_c} \tag{5.20}$$

hvor

$$Ra_c = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2} \tag{5.21}$$

er det kritiske Rayleightal, hvis mindste størrelse ses at være $= 27\pi^4/4$, svarende til at Ra_c som funktion af a^2 har minimum for $a^2 = 1/2$, samt den dimensionsløse tidsvariable T

$$T = \frac{\pi^2}{d^2}(1+a^2)\kappa t \tag{5.22}$$

og udtrykker B, C og D ved de dimensionsløse størrelser[1] X, Y og Z som følger

$$B = \frac{\kappa(1+a^2)}{a}\sqrt{2}X \tag{5.23}$$

$$C = \frac{Ad}{\pi r}\sqrt{2}Y \tag{5.24}$$

$$D = \frac{Ad}{\pi r}Z. \tag{5.25}$$

Koefficienterne til $\sin kx \sin(\pi z/d)$, $\cos kx(\sin \pi z/d)$ og $\sin(2\pi z/d)$ skal hver for sig være nul, for at ligningerne (5.14) og (5.16) er opfyldt. Dette giver, at

$$\dot{X} = -PX + PY \tag{5.26}$$

$$\dot{Y} = -Y + rX - ZX \tag{5.27}$$

og

$$\dot{Z} = -bZ + XY, \tag{5.28}$$

hvor $b = 4/(1+a^2) = 8/3$ og P er Prandtl-tallet $P = \nu/\kappa$. For $r < 1$ har ligningerne kun det trivielle fixpunkt givet ved $X = Y = Z = 0$, men for $r > 1$ har systemet desuden de to fixpunkter givet ved $X = Y = \pm\sqrt{b(r-1)}$ og $Z = r - 1$. Den tilhørende værdi af a^2, nemlig 1/2 bestemmer $k = a\pi/d$ og dermed konvektionsrullernes indbyrdes afstand, der ses at være af størrelsesorden d. For $r > 1$, eller $Ra > Ra_c$, er systemet altså ustabilt. Det bør bemærkes, at Lorenz-ligningerne ikke kan forventes at være en god beskrivelse af systemet for større værdier af r.

[1] Valget af numeriske konstanter er foretaget for at give Lorenz-ligningerne den simplest mulige form.

6 Solitoner

Observationer af solitoner i form af enkelte bølgetoppe, hvis udbredelseshastighed afhænger af højden, går helt tilbage til årene 1834-1844, da den britiske ingeniør og arkitekt John Scott Russell foretog sine bekendte iagttagelser af kanalbølger, som han forfulgte på hesteryg. Solitoner har betydning for mange områder af fysikken, herunder hydrodynamik og plasmafysik. Vi skal i det følgende se, at solitoner kan fremkomme på en væskes overflade, når der tages hensyn til både dispersive og ulineære effekter, og diskutere Korteweg-deVries ligningen. Denne er ét eksempel på en ulineær differentialligning med soliton-løsninger, men begrebet solitoner er mere alment og benyttes f. eks. også om løsninger til den såkaldte ulineære Schrödingerligning.

For en ideel, inkompressibel væske med rotationsfri strømning gælder, at

$$\nabla^2\phi = 0. \tag{6.1}$$

Hastighedspotentialet skal desuden tilfredsstille grænsebetingelserne for en ideel væske, nemlig at normalkomponenten af hastigheden er nul ved beholderens vægge.

Som tidligere (afsnit 2.2.2) betragter vi en væske i en tank af uendelig udstrækning i x- og y-retningen. Væskens overflade i hvile er givet ved planen $z = 0$, mens tankens bund er planen $z = -h$ ($h > 0$). Grænsebetingelsen på ϕ er derfor

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{for} \quad z = -h. \tag{6.2}$$

Vi indfører betegnelsen $\zeta = \zeta(x, y, t)$ for z-koordinaten for et punkt på væskeoverfladen. I ligevægt gælder altså

$$\zeta = 0. \tag{6.3}$$

Bernoullis ligning ved overfladen er

$$\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{\partial\phi}{\partial t} + g\zeta = 0. \tag{6.4}$$

mens

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} - \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \boldsymbol{\nabla}\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0 \tag{6.5}$$

ved væskens overflade.

Vi skal nu diskutere solitonløsninger til (6.4) og (6.5). Først skriver vi løsningen til (6.1) og (6.2) som en superposition

$$\phi(x, z, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \cosh k(z + h) e^{ikx} \tilde{f}(k, t), \tag{6.6}$$

idet $\tilde{f}$ forudsættes at aftage tilstrækkeligt hurtigt for store k til, at vi kan rækkeudvikle cosh under integraltegnet. Desuden benyttes, at

$$ike^{ikx} = \frac{\partial}{\partial x}e^{ikx}. \tag{6.7}$$

Herved fås ved overfladen, at

$$\phi \simeq (1 - \frac{(h+\zeta)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2})f, \tag{6.8}$$

hvor

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}\tilde{f}(k, t). \tag{6.9}$$

En tilsvarende udvikling af sinh indgår i det tilnærmede udtryk for $\partial\phi/\partial z$.

a. Vis, at vi dermed kan approksimere (6.5) ved

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)\frac{\partial f}{\partial x}] + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \tag{6.10}$$

ved at beholde de dominerende ulineære led og se bort fra dem, der optræder i led af ordenen $(kh)^2$. Vis tilsvarende, at (6.4) bliver

$$\frac{\partial f}{\partial t} + g\zeta - \frac{h^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x})^2 = 0. \tag{6.11}$$

b. Eftervis, at ligningerne (6.10) og (6.11) med $\zeta = \zeta_0 \exp i(kx - \omega t)$ og $f = f_0 \exp i(kx - \omega t)$ i det lineariserede tilfælde fører til

$$\omega^2 = ghk^2(1 - \frac{1}{3}k^2h^2). \tag{6.12}$$

og sammenlign med afsnit 2.2.2.

c. Ligningerne (6.10) og (6.11) løses ved at ansætte ζ og f som funktioner af $(x - ct)$, hvor hastigheden c skal bestemmes. Idet ζ' og f' angiver de afledede med hensyn til $(x - ct)$ fås

$$-c\zeta' + [(h+\zeta)f']' - \frac{1}{6}h^3 f'''' = 0 \tag{6.13}$$

og

$$-cf' + g\zeta + \frac{1}{2}ch^2 f''' + \frac{1}{2}(f')^2 = 0. \tag{6.14}$$

Da (6.13) er et perfekt differential, er

$$-c\zeta + (h+\zeta)f' - \frac{1}{6}h^3 f''' = \text{konstant}. \tag{6.15}$$

Vi kan eliminere f' ved at løse (6.14) iterativt og benytte, at vi i højere ordens led kan sætte $c^2 = gh$.

Vis, at dette giver

$$\zeta(1 - \frac{gh}{c^2}) - \frac{3}{2h}\zeta^2 - \frac{h^2}{3}\zeta'' = \text{konstant}. \tag{6.16}$$

Da vi er ude efter løsninger ζ til (6.16), der forsvinder i det uendelige, $x = \pm\infty$, kan konstanten på højre side sættes til nul. Vis, at den resulterende ligning har løsningen

$$\zeta = \zeta_0[\cosh^2\{\sqrt{\frac{3\zeta_0}{h}}\frac{(x-ct)}{2h}\}]^{-1}, \tag{6.17}$$

hvor

$$\frac{\zeta_0}{h} = 1 - \frac{gh}{c^2} \tag{6.18}$$

bestemmer udbredelseshastighedens afhængighed af bølgens maximum ($\zeta_0 > 0$). Bestem udbredelseshastigheden i jordens tyngdefelt for $h = 0,5$ m og $\zeta_0 = 0,1$ m.

d. Den såkaldte Korteweg-deVries ligning for $\zeta(x,t)$ skrives ofte på formen

$$\zeta_t + c_0\zeta_x + \frac{3}{2}\frac{c_0}{h}\zeta\zeta_x + \frac{1}{6}h^2 c_0 \zeta_{xxx} = 0, \tag{6.19}$$

ved brug af konventionen $\partial\zeta/\partial t = \zeta_t$ etc. Angiv sammenhængen mellem denne ligning og ovenstående, og identificer hastigheden c_0.

Ved brug af den såkaldte 'inverse scattering' metode kan man etablere en formel analogi med Schrödingerligningen og benytte resultater fra den elementære kvantemekanik (antallet n af bundne tilstande i en éndimensional brønd) til at finde en betingelse for, at der genereres n solitoner i en aflang vandbeholder, når man fjerner en skillevæg til et (lille) område af væsken, hvor vandstanden er højere end i den øvrige del.

7 Plasmafysik

I dette kapitel finder vi dielektricitetstensoren for et plasma ved hjælp af kinetisk teori, med henblik på at bestemme dispersionsrelationen for de forskellige bølger, der kan optræde i et plasma bestående af positivt og negativt ladede partikler. Desuden omtales de magnetohydrodynamiske grundligninger.

7.1 Dielektricitetstensoren

Maxwell-ligningerne er

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{7.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{7.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{7.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7.4}$$

For felter, der varierer i rum og tid som

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}$$

bliver Maxwell-ligningerne

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{7.5}$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{7.6}$$

$$\mathbf{q} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} \tag{7.7}$$

$$\mathbf{q} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \tag{7.8}$$

Vi indfører dielektricitetstensoren ϵ_{ij} ved

$$D_i = \epsilon_0 \epsilon_{ij} E_j, \tag{7.9}$$

hvor vi benytter den konvention, at der summeres over gentagne indices (her altså j). Såvel i som j antager tre værdier (x, y og z) svarende til vektorernes kartesiske komponenter. Tensoren ϵ_{ij} svarer altså til en 3×3 matrix. I vakuum er ϵ_{ij} enhedsmatricen δ_{ij}, det såkaldte Kronecker-delta, der er 1, hvis $i = j$ og ellers nul.

Idet $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, fås ved elimination af $\mathbf{H}$ og brug af

$$\mathbf{q} \times \mathbf{q} \times \mathbf{E} = -q^2 \mathbf{E} + \mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}), \tag{7.10}$$

at (7.7) og (7.8) medfører, at

$$(q_i q_j - q^2 \delta_{ij} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{ij}) E_j = 0. \tag{7.11}$$

Lyshastigheden c i vakuum er givet ved

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}. \tag{7.12}$$

Betingelsen for udbredelse af elektromagnetiske bølger er, at determinanten for ligningssystemet (7.11) skal være nul. Vi har altså

$$\det(q_i q_j - q^2 \delta_{ij} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}) = 0. \tag{7.13}$$

Hvis dielektricitetstensoren har en imaginær del, kan ligningen (7.13) ved valg af en reel bølgevektor $\mathbf{q}$ kun opfyldes for et komplekst ω. Realdelen af ω er da bølgens angulære frekvens, mens imaginærdelen bestemmer dens dæmpning.

Idet

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{7.14}$$

kan vi skrive Maxwell-ligningen (7.3) som

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{7.15}$$

hvor $\mathbf{j} = \partial \mathbf{P}/\partial t$. Strømtætheden $\mathbf{j}$ udtrykkes ved ledningsevnetensoren σ_{ij} og det elektriske felt $\mathbf{E}$ ifølge

$$j_i = \sigma_{ij} E_j. \tag{7.16}$$

Vi har da sammenhængen

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{i\omega\epsilon_0}\sigma_{ij}. \tag{7.17}$$

I det følgende bestemmer vi σ_{ij} ud fra de kinetiske ligninger for elektronernes og ionernes fordelingsfunktioner. Derefter findes ϵ_{ij} af (7.17) og indsættes i (7.13). Bemærk, at vi på intet tidspunkt indfører drifthastigheder, men blot bestemmer den elektriske strømtæthed $\mathbf{j}$ for et givet elektrisk felt.

7.2 Kinetisk teori

Den statistiske fordelingsfunktion $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ er normaliseret, så at $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ er antallet af partikler i volumenelementet $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ i det seksdimensionale faserum. I ligevægt har vi

$$\int d\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n, \tag{7.18}$$

hvor n er elektrontætheden. Ligevægtsfordelingen afhænger kun af partiklernes kinetiske energi ϵ, der er givet ved

$$\epsilon = \frac{1}{2}mv^2. \tag{7.19}$$

Vi betragter kun det tilfælde, hvor ligevægtsfordelingen er Maxwell-Boltzmann fordelingen

$$f = Ce^{-mv^2/2kT}. \tag{7.20}$$

Normaliseringskonstanten bestemmes ved indsættelse i (7.18) med resultatet

$$C = n\frac{m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}}. \tag{7.21}$$

Vi ønsker at finde fordelingsfunktionen f, når systemet ikke er i ligevægt. Kender vi f, kan den elektriske strømtæthed $\mathbf{j}$ beregnes ud fra

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha=e,i} \int d\mathbf{v} e_\alpha \mathbf{v}_\alpha f_\alpha. \tag{7.22}$$

Vi har her indført et index α, der angiver om den pågældende størrelse hører til elektroner (e) eller ioner (i), idet vi dog udelader dette index i de tilfælde, hvor det ikke kan give anledning til misforståelse, mens e_α er ladningen for den pågældende partikel ($e_e = -e$, hvor e er elementarladningen).

I det seksdimensionale faserum gælder kontinuitetsligningen

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}(v_\mu f) = (\frac{\partial f}{\partial t})_{\text{coll}} \tag{7.23}$$

Her er

$$v_\mu = (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{v}}) = (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \tag{7.24}$$

den seksdimensionale hastighed, idet prikken angiver differentiation med hensyn til tiden, mens den seksdimensionale gradient-operator er

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}). \tag{7.25}$$

Ligningen (7.23) er en generaliseret bevarelseslov. Den udtrykker, at antallet af partikler i et givet faserumsvolumen Ω ændres af to grunde: 1) som resultat af partiklernes bevægelse under felternes påvirkning og 2) som resultat af stødprocesser mellem partiklerne. Vi skal her negligere 2), der er beskrevet ved $(\partial f/\partial t)_{\text{coll}}$.[1] Herved fås

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}(v_\mu f) = 0 \tag{7.26}$$

Venstresiden af denne ligning kan simplificeres, idet partiklernes bevægelse er bestemt ved

$$m_\alpha \dot{\mathbf{v}}_\alpha = e_\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}). \tag{7.27}$$

Af denne bevægelsesligning følger, at

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} = 0, \tag{7.28}$$

og vi har derfor, at

$$\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \tag{7.29}$$

Heraf ses, at (7.26) kan skrives på den simplere form

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} = 0, \tag{7.30}$$

eller

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \tag{7.31}$$

Vi indsætter nu bevægelsesligningen (7.27) i (7.31) og trækker det led, der indeholder det elektriske felt over på højre side,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha} = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \tag{7.32}$$

[1] Bemærk, at dette naturligvis ikke er ensbetydende med, at der ses bort fra vekselvirkningen mellem partiklerne, idet Coulomb-vekselvirkningen mellem de ladede partikler giver anledning til et middelfelt, hvori partiklerne bevæger sig.

Det antages, at magnetfeltet foruden den tidsligt oscillerende del også har en statisk komponent $\mathbf{B}_0$. Vi søger ændringen δf af fordelingsfunktionen, defineret ved

$$\delta f = f - f_0, \tag{7.33}$$

til første orden i det elektriske felt og lineariserer derfor ligningen (7.32) i dette, idet vi tillige udnytter, at

$$\delta f \propto e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}.$$

Så bliver (7.32) givet ved

$$-i\omega\delta f_\alpha + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}_\alpha\delta f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\delta f_\alpha = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial f^0_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \tag{7.34}$$

I det følgende vælger vi magnetfeltet som z-akse og får da

$$\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0 = (v_y B_0, -v_x B_0, 0). \tag{7.35}$$

Vi indfører cylinder-koordinater i hastighedsrummet

$$v_x = v_r\cos\phi, \quad v_y = v_r \sin\phi, \quad v_z = v_z \tag{7.36}$$

og finder (smlgn. udtrykket for impulsmomentoperatorens z-komponent i kvantemekanikken)

$$v_y\frac{\partial}{\partial v_x} - v_x\frac{\partial}{\partial v_y} = -\frac{\partial}{\partial \phi}. \tag{7.37}$$

Cyklotronfrekvensen $\omega_{c\alpha}$ er defineret ved

$$\omega_{c\alpha} = \frac{e_\alpha B_0}{m_\alpha}, \tag{7.38}$$

mens plasmafrekvensen $\omega_{p,\alpha}$ defineres ved

$$\omega^2_{p\alpha} = \frac{n_\alpha e^2_\alpha}{m_\alpha \epsilon_0}. \tag{7.39}$$

Vi benytter nu, at

$$\frac{\partial f^0_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha} = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f^0_\alpha}{\partial \epsilon_\alpha} = -m_\alpha\mathbf{v}_\alpha\frac{f^0_\alpha}{kT_\alpha}, \tag{7.40}$$

hvor vi har indført en ligevægtstemperatur T_α for hver af plasmaets komponenter. Hermed kan vi skrive (7.34) på formen

$$(-i\omega + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}_\alpha - \omega_{c\alpha}\frac{\partial}{\partial\phi})\delta f_\alpha = \frac{e_\alpha}{kT_\alpha}\mathbf{v}_\alpha\cdot\mathbf{E}f^0_\alpha. \tag{7.41}$$

Når δf_α er bestemt ved løsning af (7.41), findes den elektriske strømtæthed og dermed ledningsevnetensoren ved at indsætte i

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha=e,i}\int d\mathbf{v} e_\alpha \mathbf{v}_\alpha \delta f_\alpha, \tag{7.42}$$

idet ligevægtsfordelingen f^0_α ikke giver anledning til en strøm (dette ses ved direkte indsættelse af $f = f^0$ i (7.22) eller ved at benytte en symmetribetragtning).

I det følgende viser vi, hvordan de forskellige elektromagnetiske bølger fremkommer, og bestemmer deres dispersion og dæmpning. Metoden er i alle tilfælde den samme:

- Løs (7.41) for δf_α.
- Indsæt i (7.42) og bestem ledningsevnetensoren σ_{ij}.
- Benyt (7.17) til at finde dielektricitetstensoren som funktion af ω og $\mathbf{q}$.
- Indsæt dielektricitetstensoren i (7.13) og løs determinantligningen for ω som funktion af den reelle bølgevektor $\mathbf{q}$.

Da dielektricitetstensoren i almindelighed både har en real og en imaginær del, vil $\omega(\mathbf{q})$ tilsvarende have en real og en imaginær del. Eksistensen af en egentlig bølge forudsætter, at den imaginære del er lille i forhold til den reelle.

7.3 Plasmabølger

I det følgende skal vi finde løsninger til (7.41) i fire forskellige tilfælde:

1. $\mathbf{q} = 0, \mathbf{B}_0 = 0$
2. $\mathbf{q} = 0, \mathbf{B}_0 \neq 0$
3. $\mathbf{q} \neq 0, \mathbf{B}_0 = 0$
4. $\mathbf{q} \neq 0, \mathbf{B}_0 \neq 0$

Bemærk, at antagelsen $\mathbf{q} = 0$ kun vedrører bestemmelsen af σ_{ij} og <u>ikke</u> løsningen af (7.13). Det er bekvemt at indføre middelværdien $< F >$ af $F(\mathbf{v})$ ved definitionen

$$< F >= \frac{\int d\mathbf{v} F(\mathbf{v}) e^{-mv^2/2kT}}{\int d\mathbf{v} e^{-mv^2/2kT}}. \tag{7.43}$$

7.3.1 $\mathbf{q} = 0, \mathbf{B}_0 = 0$

I dette tilfælde er løsningen til (7.41) givet ved

$$\delta f_\alpha = -\frac{e_\alpha}{i\omega k T_\alpha} \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{E} f_\alpha^0 \tag{7.44}$$

og strømtætheden derfor

$$\mathbf{j} = -\sum_{\alpha=e,i} \int d\mathbf{v} e_\alpha \mathbf{v}_\alpha \frac{e_\alpha}{i\omega k T_\alpha} \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{E} f_\alpha^0. \tag{7.45}$$

Elektronernes bidrag til ledningsevnen beregnes ved at gange og dividere med elektrontætheden n og vælge $\mathbf{E}$ som f. eks. x-akse. Herved fås

$$\sigma_{xx} = - < v_x^2 > \frac{ne^2}{ikT\omega} = -\frac{ne^2}{im\omega}. \tag{7.46}$$

Da elektronerne er meget lettere end ionerne, kan vi se bort fra bidraget fra de sidstnævnte. Ledningsevnetensoren bliver således med tilnærmelse givet ved

$$\sigma_{ij} = -\frac{ne^2}{mi\omega} \delta_{ij}, \tag{7.47}$$

hvor n er elektrontætheden.

Med (7.47) bliver løsningerne til (7.13) givet ved

$$\omega^2 = c^2 q^2 + \omega_{pe}^2 \tag{7.48}$$

hvis **E** er vinkelret på **q** (smlgn. Chen [4-85]) og

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \tag{7.49}$$

hvis **E** er parallel med **q** (smlgn. Chen [4-25]) .

7.3.2 $\mathbf{q} = 0, \mathbf{B}_0 \neq 0$

Vi har

$$(-i\omega - \omega_{c\alpha}\frac{\partial}{\partial\phi})\delta f_\alpha = \frac{e_\alpha}{kT_\alpha}\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{E} f_\alpha^0. \tag{7.50}$$

Dette er en førsteordens differentialligning af formen

$$(a + b\frac{\partial}{\partial\phi})g(\phi) = F(\phi). \tag{7.51}$$

For at bestemme ledningsevnetensoren ser vi på tilfældene 1) **E** vinkelret på $\mathbf{B}_0$ og 2) **E** parallel med $\mathbf{B}_0$.

1) **E** vinkelret på $\mathbf{B}_0$.

Vi vælger $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ svarende til $F(\phi) = c\cos\phi$. Løsningen ses at være

$$g(\phi) = A\cos\phi + B\sin\phi, \tag{7.52}$$

hvor A og B tilfredsstiller

$$aA + bB = c \tag{7.53}$$

mens

$$aB - bA = 0 \tag{7.54}$$

med løsningen

$$A = \frac{ca}{a^2 + b^2}, \quad B = \frac{cb}{a^2 + b^2}. \tag{7.55}$$

Vi har nu fundet δf og mangler blot at udregne ledningsevnetensorens komponenter σ_{xx} og σ_{yx}. Idet $v_x = v_r \cos\phi$ og $v_y = v_r \sin\phi$ fås

$$\sigma_{xx} = -\sum_\alpha \frac{n_\alpha e_\alpha^2}{i m_\alpha \omega(1 - \omega_{c\alpha}^2/\omega^2)}. \tag{7.56}$$

og

$$\sigma_{xy} = \sum_\alpha \frac{n_\alpha e_\alpha^2 \omega_{c\alpha}}{m_\alpha \omega^2(1 - \omega_{c\alpha}^2/\omega^2)}. \tag{7.57}$$

Øvelse. Eftervis (7.56) og (7.57). Vis at $\sigma_{yx} = -\sigma_{xy}$ og $\sigma_{yy} = \sigma_{xx}$ (helst uden at regne ret meget!).

2) **E** parallel med $\mathbf{B}_0$.

I dette tilfælde er højresiden af (7.51) uafhængig af ϕ, og løsningen er $g = F/a$, ganske som i tilfældet uden magnetfelt. Heraf fås

$$\sigma_{zz} = -\sum_{\alpha} \frac{n_\alpha e_\alpha^2}{i m_\alpha \omega}. \tag{7.58}$$

mens $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ (begrund dette!).

Vi finder da ved brug af (7.17) dielektricitetstensoren

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{n_\alpha e_\alpha^2}{\epsilon_0 m_\alpha \omega^2 (1 - \omega_{c\alpha}^2/\omega^2)} \tag{7.59}$$

eller

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} \equiv \epsilon_\perp = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2}, \tag{7.60}$$

mens

$$\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} \equiv i\epsilon_a = i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \omega_{c\alpha}}{\omega(\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2)}. \tag{7.61}$$

og

$$\epsilon_{zz} \equiv \epsilon_{\|} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}. \tag{7.62}$$

Vi vender nu tilbage til løsningen af determinantligningen (7.13) og vælger $\mathbf{q}$ i xz-planen, idet θ angiver vinklen mellem $\mathbf{q}$ og $\mathbf{B}_0$,

$$\mathbf{q} = (q \sin\theta, 0, q\cos\theta). \tag{7.63}$$

Ud fra ovenstående dielektricitetstensor samt (7.13) finder vi en andengradsligning i q^2c^2/ω^2 til bestemmelse af ω som funktion af $\mathbf{q}$,

$$(\epsilon_\perp \sin^2\theta + \epsilon_\| \cos^2\theta)\left(\frac{q^2c^2}{\omega^2}\right)^2 - (\epsilon_\perp\epsilon_\|(1+\cos^2\theta) + (\epsilon_\perp^2 - \epsilon_a^2)\sin^2\theta)\frac{q^2c^2}{\omega^2} + (\epsilon_\perp^2 - \epsilon_a^2)\epsilon_\| = 0. \tag{7.64}$$

Heraf fås for et givet θ en løsning $q(\omega)$, der bestemmer $\omega(\mathbf{q})$, idet $\epsilon_\|$, $\epsilon_\perp$ og ϵ_a er givet ved henholdsvis (7.62), (7.60) og (7.61).

De frekvenser, der får koefficienten til $(q^2c^2/\omega^2)^2$ til at forsvinde, kaldes plasmaresonanser. De svarer åbenbart til løsninger, for hvilke $qc/\omega \to \infty$, og bestemmes af

$$\epsilon_\perp \sin^2\theta + \epsilon_\| \cos^2\theta = 0. \tag{7.65}$$

I det følgende undersøges nogle specielle tilfælde af (7.65). For $\theta = \pi/2$ fås $\epsilon_\perp = 0$ eller

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} - \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega^2 - \omega_{ci}^2)} = 0, \tag{7.66}$$

der i almindelighed giver en andengradsligning i ω^2. Ser vi bort fra ionerne, fås det simple resultat

$$\omega^2 = \omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2, \tag{7.67}$$

smlgn. Chen [4-60]. Denne løsning, der kaldes "the upper hybrid frequency" kan også findes ved at løse andengradsligningen og benytte, at $m_e \ll m_i$. Der er imidlertid *to* løsninger til andengradsligningen, og ved helt at se bort fra ionernes bevægelse har vi bortkastet den ene. Beholder vi ionernes bidrag, ses den anden løsning ("the lower hybrid frequency") at være

$$\omega^2 = \omega_{ce}^2 \frac{\omega_{pi}^2 + \omega_{ci}^2}{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2} \tag{7.68}$$

idet vi fortsat har benyttet, at $m_e \ll m_i$. Bemærk, at dette resultat i almindelighed er forskelligt fra såvel Chen [4-71] som Chen [4-71a]. Hvis $\omega_{ce}^2 \ll \omega_{pe}^2$ (og dermed $\omega_{ci}^2 \ll \omega_{pi}^2$), ses (7.68) at være identisk med Chen [4-71], mens det reducerer til Chen [4-71a], hvis $\omega_{ci}^2 \ll \omega_{pi}^2$.

For θ nær ved 0 er (7.65) en tredjegradsligning i ω^2. For $\theta = 0$ giver $\epsilon_{\parallel} = 0$ løsningen $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2$, men (7.65) har for $\theta \to 0$ desuden løsningerne $\omega^2 = \omega_{ce}^2$ og $\omega^2 = \omega_{ci}^2$, idet $\omega^2 = \omega_{ce}^2 + (\text{const})\theta^2$ samt $\omega^2 = \omega_{ci}^2 + (\text{const})\theta^2$ tilfredsstiller ligningen for små θ. Vi har altså en ion-cyklotronbølge med frekvensen

$$\omega^2 = \omega_{ci}^2, \tag{7.69}$$

jvf. Chen [4-67] for $v_s = 0$.

Vi vil nu undersøge, om der er svingninger med en lineær sammenhæng mellem ω og q for $q \to 0$. I grænsen for lave frekvenser og med $m_e \ll m_i$ er $\epsilon_\perp \simeq 1 + \omega_{pi}^2/\omega_{ci}^2$ og $\epsilon_\parallel \simeq -\omega_{pe}^2/\omega^2$. Da ϵ_a er proportional med ω i grænsen $\omega \to 0$, kan den negligeres, og der fås to løsninger, ω_1 og ω_2. Den ene løsning er den magnetosoniske bølge, hvis frekvens er givet ved

$$\omega = \omega_1 = v_{\mathrm{A}} q \frac{1}{(1 + v_{\mathrm{A}}^2/c^2)^{1/2}}. \tag{7.70}$$

Vi har her indført Alfvén-hastigheden v_{A} ved definitionen

$$v_{\mathrm{A}}^2 = c^2 \frac{\omega_{ci}^2}{\omega_{pi}^2}, \tag{7.71}$$

(smlgn. Chen [4-142] for $v_s = 0$). Den anden løsning er Alfvén-bølgen

$$\omega = \omega_2 = v_{\mathrm{A}} q |\cos\theta| \frac{1}{(1 + v_{\mathrm{A}}^2/c^2)^{1/2}}, \tag{7.72}$$

der i tilfældet $\theta = 0$ svarer til Chen [4-124].

Til sidst finder vi dispersionsloven for "whistlers". Vi antager at $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce}^2$ samt $\omega_{ci}^2 \ll \omega^2 \ll \omega_{ce}^2$. Ligningen (7.64) kan da simplificeres til

$$\epsilon_\parallel \cos^2\theta \frac{q^4 c^4}{\omega^4} - \epsilon_a^2 \epsilon_\parallel = 0. \tag{7.73}$$

Idet $\epsilon_\parallel$ i denne grænse er forskellig fra nul, kan den bortdivideres, og med

$$\epsilon_a \simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega \omega_{ce}} \tag{7.74}$$

fås løsningen for "whistler"-bølgen (i faste stoffer "helicon"-bølgen)

$$\omega^2 = c^4 q^4 \cos^2\theta \frac{\omega_{ce}^2}{\omega_{pe}^4}. \tag{7.75}$$

Smlgn. Chen [4-116] og [4-117] for $\omega^2 \ll \omega_{ce}^2$.

Øvelse. Vis hvorledes dispersionsrelationen for the "extraordinary wave", Chen [4-104], fremkommer ud fra ovenstående.

7.3.3 $\mathbf{q} \neq 0, \mathbf{B}_0 = 0$

I dette tilfælde bliver (7.41) givet ved

$$(-i\omega + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}_\alpha)\delta f_\alpha = \frac{e_\alpha}{kT_\alpha}\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{E} f_\alpha^0 \tag{7.76}$$

Heraf findes δf_α og indsættes i (7.42) med resultatet

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha=e,i} \int d\mathbf{v} e_\alpha \mathbf{v}_\alpha (-i\omega + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}_\alpha)^{-1} \frac{e_\alpha}{kT_\alpha}\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{E} f_\alpha^0. \tag{7.77}$$

Vi udnytter først rækkeudviklingen

$$\frac{1}{-i\omega + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}} \simeq -\frac{1}{i\omega}(1 + \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}}{\omega} + \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})^2}{\omega^2}), \tag{7.78}$$

der gælder for $\omega \gg q < v >$.

Ledningsevnen for $\omega \gg q < v >$ svarende til (7.78) bliver da, ved indsættelse af δf i (7.42), givet ved $\sigma_{ij}^\alpha = \sigma_\alpha \delta_{ij}$, hvor

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &\simeq -\frac{n_\alpha e_\alpha^2}{i\omega m_\alpha}(1 + \frac{q^2 < v_x^4 >}{\omega^2 < v_x^2 >}) \\ &= -\frac{n_\alpha e_\alpha^2}{i\omega m_\alpha}(1 + \frac{3q^2 kT_\alpha}{\omega^2 m_\alpha}). \end{aligned} \tag{7.79}$$

Vi har valgt $\mathbf{q} = (q, 0, 0)$ og $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, men det elektriske felt kan lægges i en vilkårlig retning, idet σ_{ij} af symmetrigrunde er proportional med enhedsmatricen δ_{ij}, når det statiske magnetfelt er nul, $\mathbf{B}_0 = 0$.

I det almindelige tilfælde får vi ved bestemmelsen af dielektricitetsfunktionen brug for at udregne funktionen $K(x)$, der er defineret ved

$$K(x) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-z^2}}{z - x - i\eta}. \tag{7.80}$$

For realdelen af K gælder, når $x^2 \gg 1$, at

$$K \simeq -1 - \frac{1}{2x^2} \tag{7.81}$$

mens det for $x^2 \ll 1$ gælder, at

$$K \simeq -2x^2. \tag{7.82}$$

Resultatet (7.81) fås ved den sædvanlige rækkeudvikling

$$\frac{1}{z - x} \simeq -\frac{1}{x} - \frac{z}{x^2} - \frac{z^2}{x^3}, \tag{7.83}$$

mens (7.82) vises ved at indføre den ny variable $y = z - x$ og rækkeudvikle integranden med hensyn til x (nul'te ordens leddet giver intet bidrag, da $1/y$ er en ulige funktion af y).

Imaginærdelen af K fås ved brug af identiteten

$$\int dx \frac{F(x)}{x - i\eta} = P \int dx \frac{F(x)}{x} + i\pi F(0), \tag{7.84}$$

idet ω erstattes med $\omega + i\eta$, hvor η er en positiv infinitesimal størrelse. Symbolet P angiver den principale del af integralet, og det antages om funktionen $F(x)$, at den ikke har nogen singularitet for $x = 0$.

Ledningsevnen for $\omega \ll q < v >$ ses at være givet ved

$$\sigma_\alpha \simeq \frac{\omega e_\alpha^2}{kT_\alpha i} \int d\mathbf{v} f^0 v_x^2 \frac{1}{q^2 v_x^2} = \frac{n_\alpha \omega e_\alpha^2}{kT_\alpha i q^2}. \tag{7.85}$$

De tilsvarende udtryk for $\epsilon_\parallel$ bliver

$$\epsilon_\parallel \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}(1 + \frac{3q^2 kT}{\omega^2 m}). \tag{7.86}$$

for $\omega \gg q < v >$ og

$$\epsilon_\parallel \simeq 1 + \frac{\omega_p^2 m}{q^2 kT} \tag{7.87}$$

for $\omega \ll q < v >$.

Vi finder nu imaginærdelen af $\epsilon_\parallel$ som funktion af den (reelle) frekvens ω ved brug af (7.84),

$$\mathrm{Im}\epsilon_\parallel = \sum_\alpha \frac{e_\alpha^2}{\omega \epsilon_0 kT} \int d\mathbf{v} v_x^2 \pi \delta(\omega - q v_x) f^0, \tag{7.88}$$

der giver

$$\mathrm{Im}\epsilon_\parallel = \frac{\pi^{1/2}}{2^{1/2}} \sum_\alpha \frac{e_\alpha^2 n_\alpha m_\alpha^{1/2} \omega}{\epsilon_0 q^3 (kT_\alpha)^{3/2}} e^{-m_\alpha \omega^2 / 2kT_\alpha q^2}. \tag{7.89}$$

Vi kan benytte disse resultater til at finde dispersion og dæmpning af en plasmabølge, idet vi ser bort fra ionernes bevægelse. Dispersionen er bestemt ud fra (7.86) ved at sætte $\epsilon_\parallel = 0$ med resultatet

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3kT_e}{m} q^2, \tag{7.90}$$

jvf. Chen [4-30], mens

$$\mathrm{Im}\frac{\omega}{\omega_{pe}} = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\epsilon_\parallel, \tag{7.91}$$

eller

$$\mathrm{Im}\frac{\omega}{\omega_{pe}} = -\frac{\pi^{1/2}}{8^{1/2}} \frac{e^2 n m^{1/2} \omega}{\epsilon_0 q^3 (kT_e)^{3/2}} e^{-m\omega^2/2kT_e q^2}, \tag{7.92}$$

sammenlign Chen [7-69].

Til slut beregner vi dispersion og dæmpning af ion-akustiske bølger ved at benytte (7.86) for ionerne og (7.87) for elektronerne. Vi får da

$$\epsilon_\parallel \simeq 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}(1 + \frac{3q^2 kT_i}{\omega^2 m_i}) + \frac{\omega_{pe}^2 m}{q^2 kT_e}. \tag{7.93}$$

I grænsen for lange bølger $q \to 0$ fås af betingelsen $\epsilon_\parallel = 0$ lydhastigheden for den ion-akustiske bølge,

$$\omega^2 = q^2 \frac{kT_e + 3kT_i}{m_i}, \tag{7.94}$$

sammenlign Chen [4-41]. Dæmpningen af bølgen findes ved at tage hensyn til imaginærdelen af $\epsilon_\parallel$.

Øvelse. Vis at brugen af ovenstående fører til følgende resultat for dæmpningen af den ion-akustiske bølge

$$\frac{\mathrm{Im}\omega}{\mathrm{Re}\omega} = -\frac{\pi^{1/2}}{8^{1/2}}\Theta^{3/2}e^{-3/2}e^{-\Theta/2} \tag{7.95}$$

for $\Theta \gg 1$, hvor Θ er defineret ved

$$\Theta \equiv \frac{ZT_e}{T_i}, \tag{7.96}$$

idet Z er ladningstallet for en ion (der ses bort fra elektronernes bidrag til dæmpningen). Sammenlign med Chen [7-133].

7.3.4 $\mathbf{q} \neq 0, \mathbf{B}_0 \neq 0$

I dette tilfælde er Boltzmann-ligningen

$$(-i\omega + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}_\alpha - \omega_{c\alpha}\frac{\partial}{\partial\phi})\delta f_\alpha = \frac{e_\alpha}{kT_\alpha}\mathbf{v}_\alpha\cdot\mathbf{E}f_\alpha^0. \tag{7.97}$$

Vi vil nøjes med at betragte elektronernes bevægelse. Bølgevektoren $\mathbf{q}$ kan uden indskrænkning antages at ligge i xz-planen, $\mathbf{q} = (q_x, 0, q_z)$, hvorved ligning (7.97) kan skrives på formen

$$i(a - b\cos\phi)\delta f + \frac{\partial}{\partial\phi}\delta f = F(\phi), \tag{7.98}$$

hvor

$$a = \frac{\omega - q_z v_z}{\omega_c}, \quad b = \frac{q_x v_r}{\omega_c}, \tag{7.99}$$

mens

$$F = \frac{e}{kT\omega_c}v_r E f^0\cos\phi, \tag{7.100}$$

hvis $\mathbf{E}$ antages at ligge i x-retningen. Indføres substitutionen

$$\delta f = \psi(\phi)e^{ib\sin\phi}, \tag{7.101}$$

fås følgende ligning til bestemmelse af ψ,

$$ia\psi + \frac{\partial}{\partial\phi}\psi = G(\phi) \tag{7.102}$$

med

$$G(\phi) = F(\phi)e^{-ib\sin\phi}. \tag{7.103}$$

Ved at indsætte Fourier-udviklingen

$$\psi(\phi) = \sum_n \psi_n e^{in\phi}, \qquad G(\phi) = \sum_n G_n e^{in\phi} \tag{7.104}$$

med koefficienterne

$$\psi_n = \int_0^{2\pi}\frac{d\phi'}{2\pi}\psi(\phi')e^{-in\phi'}, \qquad G_n = \int_0^{2\pi}\frac{d\phi'}{2\pi}G(\phi')e^{-in\phi'} \tag{7.105}$$

ser man, at

$$\psi_n = \frac{G_n}{i(a+n)}. \tag{7.106}$$

Ved at finde G_n kan vi således bestemme løsningen δf i det almindelige tilfælde, og dermed ledningsevnen og dielektricitetstensoren.

For at illustrere betydningen af $\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}$-leddet i Boltzmann-ligningen i et simpelt tilfælde, vil vi betragte elektronernes bidrag til dielektricitetstensoren under følgende betingelser: 1) frekvensen ω skal være omtrent lig med elektronernes cyklotronfrekvens ω_c og 2) $\mathbf{q}$ skal være så lille, at $|q_z| < v >\ll |\omega_c|$ og $|q_x| < v >\ll |\omega_c|$. Vi kan da se bort fra b og får ligningen

$$(-i\omega + iq_z v_z - \omega_c \frac{\partial}{\partial\phi})\delta f = \frac{-ev_r f^0 E}{kT}\cos\phi, \tag{7.107}$$

idet vi har lagt det elektriske felt i x-aksens retning. Vi kan nu benytte løsningen (7.55) ovenfor, idet A under de angivne betingelser ($\omega \simeq \omega_c$) bliver givet ved

$$A = \frac{-i\omega + iq_z v_z}{(\omega - q_z v_z)^2 - \omega_c^2}\frac{ev_r f^0 E}{kT} \simeq \frac{i}{2(\omega_c - \omega + q_z v_z)}\frac{ev_r f^0 E}{kT}. \tag{7.108}$$

Heraf finder man, at dielektricitetstensorens xx-komponent bliver

$$\epsilon_{xx} \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega - \omega_c)}K(x), \tag{7.109}$$

hvor

$$x = \frac{(\omega - \omega_c)}{q_z}\sqrt{\frac{m}{2kT}}, \tag{7.110}$$

mens $K(x)$ er givet ved (7.80).

I de to grænser fås derfor

$$\epsilon_{xx} \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega - \omega_c)}(1 + \frac{q_z^2 kT}{m(\omega - \omega_c)^2}) \tag{7.111}$$

for $x^2 \gg 1$ og

$$\epsilon_{xx} \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega}\frac{m(\omega - \omega_c)}{q_z^2 kT} \tag{7.112}$$

for $x^2 \ll 1$. Vi kan nu sammenligne med elektronbidraget til ϵ_{xx} givet ved (7.60),

$$\epsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}. \tag{7.113}$$

Bemærk, at resultatet (7.112) viser, at singulariteten i (7.113) forsvinder, når man som her tager hensyn til, at $1/|q_z|$ tæt ved resonansen er meget mindre end $< v > /|\omega - \omega_c|$, der går mod uendelig, når ω nærmer sig ω_c. Desuden får ϵ_{xx} en imaginærdel, der kan findes på sædvanlig måde ved brug af (7.84).

7.4 Magnetohydrodynamik

Som andre fysiske systemer kan et plasma beskrives på forskellige niveauer. I dette afsnit skal vi diskutere de magnetohydrodynamiske grundligninger for et plasma. Vi kombinerer således hydrodynamikken for viskøse væsker med elektrodynamikken for kvasistationære strømme. Som følge heraf indføres der nye dimensionsløse størrelser som f. eks. et magnetisk Reynolds tal svarende til det almindelige Reynolds tal, hvori den kinematiske viskositet η/ρ erstattes med $1/\mu_0\sigma$. Flydende metaller, fusionsplasmaer eller kosmiske plasmaer er eksempler på systemer, der under passende betingelser kan beskrives ved magnetohydrodynamiske ligninger.

Som de første af magnetohydrodynamikkens grundligninger har vi de to Maxwell-ligninger

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \tag{7.114}$$

og

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{7.115}$$

Vi ser bort fra forskydningsstrømmen, og rotationen af den magnetiske feltstyrke $\mathbf{H}$ bliver derfor alene bestemt af den elektriske strømtæthed $\mathbf{j}$. I en ledende væske med hastighedsfelt $\mathbf{u}$ vil den elektriske strømtæthed $\mathbf{j}$ være givet ved

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \tag{7.116}$$

Dette kan indses ved lokalt at transformere fra et koordinatsystem S', hvori væsken er i hvile, til systemet S, hvori væsken bevæger sig med hastighed $\mathbf{u}$. I hvilesystemet gælder $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}'$, hvor $\mathbf{E}'$ er den elektriske feltstyrke i S'. Forbindelsen mellem $\mathbf{E}'$ og felterne $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ i S er da $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$, idet u antages at være meget mindre end lyshastigheden. Den sidste Maxwell-ligning er således

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \tag{7.117}$$

da vi som nævnt ser bort fra forskydningsstrømmen. Ved elimination af $\mathbf{E}$ i disse ligninger fås

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma\mu_0}\nabla^2\mathbf{B}, \tag{7.118}$$

idet permeabilteten antages at være $\mu = \mu_0$.

Væskens bevægelse skal tilfredsstille kontinuitetsligningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{7.119}$$

der udtrykker massens bevarelse, idet ρ er massetætheden. Den generaliserede kontinuitetsligning for impulsen er

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}(\zeta + \frac{\eta}{3})\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f}. \tag{7.120}$$

Her er $\mathbf{f}$ kraften per masseenhed givet ved

$$\rho\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}. \tag{7.121}$$

Endelig er varmeligningen

$$\rho T(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} s) = \sigma'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial T}{\partial x_i}) + \frac{1}{\sigma}(\nabla \times \mathbf{H})^2, \tag{7.122}$$

hvor tensoren σ'_{ij} har den sædvanlige betydning. Det sidste led på højre side repræsenterer Joule-varmen j^2/σ.

Det gælder altid, at

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{7.123}$$

mens det for en inkompressibel væske gælder

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{7.124}$$

For en inkompressibel væske har vi ifølge ovenstående, at

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} + \frac{1}{\sigma\mu_0}\nabla^2\mathbf{B}, \tag{7.125}$$

mens Navier-Stokes ligningen antager formen

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla(p + \frac{1}{2\mu_0}B^2) + \frac{1}{\rho\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\mathbf{u}. \tag{7.126}$$

7.5 Opgaver

Opgave 7.1

En ledende, inkompressibel væske med massetæthed ρ, ledningsevne σ, viskositet η, varmeledningsevne k og permeabilitet μ_0 strømmer mellem to parallelle plader, hvis plan er vinkelret på z-aksen. Strømningen foregår i et ydre magnetfelt $\mathbf{B}_0$ i z-aksens retning. Pladernes indbyrdes afstand er d. Den ene plade ligger stille, mens den anden bevæger sig i x-aksens retning med hastighed u_0. Væsken strømmer i x-aksens retning under påvirkning af en trykgradient $-G$, hvor G er positiv.

a) Begrund ud fra (7.123), at $B_z = B_0$ overalt i væsken.

b) Bestem hastighedsprofilen $u_x(z)$ og magnetfeltets variation $B_x(z)$ ved hjælp af de sædvanlige grænsebetingelser på hastigheden og betingelsen $B_x = 0$ ved begge plader.

c) Diskuter specialtilfældene i) $u_0 = 0$ og ii) $G = 0$.

Opgave 7.2

I denne opgave betragtes det samme fysiske system som i opgave 7.1, men vi begrænser os til at se på tilfældet $u_0 = 0$. Det såkaldte Hartmann-tal Ha er defineret ved

$$Ha = B_0 d \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}. \tag{7.127}$$

a) Bestem middelhastigheden $< u >$. og undersøg grænserne $Ha \ll 1$ og $Ha \gg 1$ (tegn hastighedsprofilen!).

b) Bestem den elektriske feltstyrke $(0, E_y, 0)$ og den tilsvarende komponent j_y af strømtætheden. Find temperaturvariationen i væsken, idet temperaturen af de to plader er ens, lig med T_0.

Opgave 7.3

Vi skal nu undersøge den situation, hvor væsken fra opgave 7.1 udfylder halvrummet $z > 0$, mens der i planen $z = 0$ er anbragt en plade, der oscillerer i sit eget plan i x-aksens retning, således at væskehastigheden ved overfladen er givet ved $u_x = u_0 \exp(-i\omega t)$. Der er pålagt et ydre magnetfelt af størrelsen B_0 i z-aksens retning.

a) Opstil en differentialligning for magnetfeltets komponent $B_x(z)$ og angiv formen af den generelle løsning samt de tilhørende karakteristiske længder.

b) Undersøg situationen, hvor magnetfeltet er lille, ved at iterere de koblede differentialligninger for u_x og B_x i B_0 og find på denne måde $B_x(z)$ til laveste orden i B_0 ud fra den til $B_0 = 0$ hørende løsning $u_x(z)$.

Opgave 7.4

Benyt de magnetohydrodynamiske ligninger til at bestemme hastighed og dæmpning af Alfvén-bølger i en inkompressibel ledende væske med massetæthed ρ, viskositet η og ledningsevne σ. Det ydre magnetfelt betegnes ved $\mathbf{B}_0$.

8 Appendix A

Cylinderkoordinater

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = (\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{r} + (\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r})\hat{\phi} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi})\hat{z}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_r - \frac{1}{r^2}A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{r} + (\nabla^2 A_\phi - \frac{1}{r^2}A_\phi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \phi})\hat{\phi} + \nabla^2 A_z \hat{z}$$

Sfæriske koordinater

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi})\hat{r} + \frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r})\hat{\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\hat{\phi}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} = {} & (\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}A_r - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{r} \\ & +(\nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{\theta} \\ & +(\nabla^2 A_\phi - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\phi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \phi})\hat{\phi}\end{aligned}$$

Vektorrelationer ($\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er vektorer, mens ϕ er en skalar)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\phi \mathbf{u}) = \phi \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\phi$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\phi \mathbf{u}) = \phi \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla}\phi \times \mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v})$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\phi = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) - \nabla^{\mathbf{2}}\mathbf{u}$$

Deformationstensor i cartesiske, cylindriske og sfæriske koordinater
Cartesiske koordinater

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

Cylinderkoordinater

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\epsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$2\epsilon_{r\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}$$

$$2\epsilon_{\phi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z}$$

$$2\epsilon_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}$$

Sfæriske koordinater

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\epsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot\theta}{r}$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

$$2\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}$$

$$2\epsilon_{\theta\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{u_\phi \cot\theta}{r}$$

$$2\epsilon_{\phi r} = \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r}$$

Ovenstående udtryk kan også anvendes for spændingstensoren σ_{ik} i en væske. Trykbidraget $-p\delta_{ik}$ indgår da som et additivt led $-p$ i de diagonale elementer σ_{rr}, $\sigma_{\phi\phi}$ etc.