

Ionfælder og kvanteoptik

Bachelorprojekt

Jacob Debel & Oluf Tang Engelund
Vejleder: Anders S. Sørensen

3. september 2007

Undertegnede erklærer hermed, at vi på lige fod har bidraget til denne opgave og at vi alle er ansvarlige for opgavens fulde indhold.

Oluf Tang Engelund

Jacob Debel

The project concerns methods to create interactions to be used in an ion trap quantum computer. A quantum computer could be very useful. However it takes operations with small errors. Our report deals with ways to reduce errors in a two qubit gate.

The project is based on an article by Anders S. Sørensen and Klaus Mølmer in Physical Review A [16], which describes a method to create a time evolution operator to be used in a quantum computer. The scheme is based on the ion trap quantum computer proposed by Cirac and Zoller. The idea is to illuminate the ions by two lasers with opposite detuning and use coupling to center-of-mass mode of the vibration of the ions to make a transition in the internal states which is independent of vibration state. The resulting time evolution operator can be used to create a maximally entangled state and to generate a Control-NOT-gate

The purpose of the project is to improve the proposed scheme by finding methods to suppress the errors inherited from the original article.

In the article the Rabi frequency of the ions is constant. First we try to improve the original method by imposing certain conditions on the scheme with constant Rabi frequency under which different errors described in the original article are reduced.

Afterwards we propose different time dependent Rabi frequencies which will suppress the largest error in the original scheme that arises from a perturbation term in the Hamiltonian.

It is shown that by choosing a suitable symmetric time dependent function the ideal time evolution operator remains intact.

The report suggests three different functions which under certain approximations suppresses the error. The first two are piecewise functions of Gaussians and hyperbolic cosecants and the third is a trigonometric function.

Under the condition that the time dependence of certain operators can be neglected the functions is shown to suppress the error of the perturbation term.

The calculations is repeated considering the timedependent operators where we get analytical solutions for the trigonometric function.

The calculation without the condition of time independence gives a result which is close to the calculation with the condition.

Both are shown to give a population of the maximally entangled state which varies very little for times close to the time of the gate and is close to one for a larger timespan than at a constant Rabi frequency.

Indhold

1	Formål	1
2	Kvantecomputere	1
2.0.1	Kompleksitetsreducering af bestemte beregningsopgaver	1
2.0.2	Simulering af andre kvantesystemer	2
2.0.3	Kvanteparallellisering	2
2.1	Implementering af en kvantecomputer	3
2.1.1	Konstruktion af en ionfælde [10]	4
2.1.2	Cirac & Zoller	5
3	Sørensen og Mølmer's artikel	6
3.1	Svagfeltskobling	8
3.2	Tidsudviklingsoperatoren	8
4	Optimering af Sørensen og Mølmer's forslag	9
4.1	Optimering af den flade puls	9
4.1.1	J_x -leddet	10
4.1.2	Lamb-Dickegrænsen	11
4.1.3	Andre vibrationsmodes	11
4.2	Et første kig på ikke-flade pulser	13
4.2.1	Optimering af den trigonometriske puls	16
4.2.2	$A(t)$ med den trigonometriske puls	17
4.3	Den trigonometriske puls med operatorernes tidsafhængighed	17
4.3.1	Approximationer og deres gyldighed	20
4.3.2	Sammenligning imellem flad og trigonometrisk puls . .	24
5	Konklusion	25
A	Bestemmelse af J_x, J_y og forskellige kommutatorer deraf	27
B	Bestemmelse af $U_0^\dagger(t)J_xU_0(t)$	28
C	Bestemmelse af $\cos(A)\cos(B)$ og $\sin(A)\sin(B)$ for A og B værende operatorer	30
D	Bestemmelse af $\langle n' \sin(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) n \rangle$	30
E	Fidelityen for $n = 1 - 5$	33
F	Population af $\Psi_{max}\rangle$	34

1 Formål

Projektet tager udgangspunkt i Sørensen og Mølmers artikel [16], hvor der foreslås en metode til at lave en Control-NOT-gate i en kvantecomputer. Dette gøres for en konstant Rabifrekvens. Altså for konstant laserintensitet (en flad puls). Formålet med projektet er at forbedre denne metode. Først ved at opstille betingelser under hvilke gaten med den flade puls bliver bedre. Derefter foreslås tidsafhængige Rabifrekvenser, som formindsker den fejl, der foresages af et perturbationsled i Hamiltonen, og samtidig bibeholder den ideelle tidsudviklingsoperator.

2 Kvantecomputere

I nutidens computere er alt opbygget af bits. Bits er fysiske objekter, som enten kan være i tilstanden 0 eller 1. Rent fysisk kan disse tilstande f.eks. repræsenteres af henholdsvis 0V og 5V spænding hen over en kapacitor. Ved at sætte N bits sammen, kan der dannes et binært tal x mellem 0 og $2^N - 1$

$$x = \sum_i^N b_i 2^{i-1} \quad ,$$

hvor b_i er værdien af den i 'te bit talt fra højre. Et eksempel på et binært tal kan være 10011, som i vores normale titalssystem svarer til 19. Bittenes funktion er at lagre information. Hvis der modtages 2 bits information betyder det, at man kan have fået et af de fire tal 0, 1, 2 eller 3 i titalssystem. Disse fire tal er i det binære system henholdsvis 00, 01, 10, 11 [1].

I den klassiske computer vil alle bits altid være i enten 0 eller 1 igennem udførelsen af et givent program. I en kvantecomputer kan dette også være tilfældet, men yderligere er der også den mulighed, at bittene kan være i en superposition af 0 og 1. Disse bits, som nu kaldes qubits, kan altså være i en tilstand af både 0 og 1. Med denne ekstra egenskab er kvantecomputere regnemæssigt mindst ligeså gode som klassiske computere. Ethvert problem, som kan løses på en klassisk computer, kan således løses ligeså godt på en kvantecomputer. Nu skulle man tro, at det modsatte ikke var tilfældet, men det er det. En klassisk computer kan godt regne det samme som en kvantecomputer. Dette skyldes, at kvantesystemers dynamik er beskrevet ved lineære differentiaalligninger. Sådanne ligninger kan løses på en klassisk computer, og hvis der ikke findes en eksakt løsning, kan det regnes numerisk. Der er derimod andre grunde til, at det er relevant at forsøge at bygge en kvantecomputer. Eksemplerne stammer fra [2]:

2.0.1 Komplexitetsreducering af bestemte beregningsopgaver

En kvantecomputer vil kunne løse bestemte typer af problemer konceptuelt hurtigere end en klassisk computer.

Der er forskel på, hvornår et problem betragtes som *let* eller *svært* at løse for henholdsvis den klassiske computer og kvantecomputeren.

Med *let* menes, at tiden for at løse problemet vokser polynomielt med længden af inputdata, mens *svær* betyder at tiden vokser eksponentielt.

Et eksempel på et svært problem på en klassisk computer, er at primtalsfaktorisere et tal. I 1994 viste Peter Shor imidlertid at dette problem kunne løses effektivt ved hjælp af en kvantecomputer indenfor polynomiell tid [3]. Dette kan have store konsekvenser for vores internetsikkerhed. Dette skyldes, at nutidens krypteringsværktøjer bygger på at primtalsfaktorisering er et svært problem. Krypteringen vil da *let* kunne brydes af en kvantecomputer. Man skal dog ikke fortvivle. Der findes også måder at kryptere information på på en kvantecomputer [4].

2.0.2 Simulering af andre kvantesystemer

Der findes mange fænomener inden for kvantemekanikken, som er interessante at undersøge og simulere på en computer. Dette kan være sig superledning, magnetisme og Bose-Einstein kondensation. Det kan dog være svært at simulere kvantemekaniske fænomener.

En af grundene til dette er, at antallet af parametre, som er nødvendige for at beskrive et mangepartikel kvantesystem, vokser eksponentielt med antallet af partikler. Dette betyder, at det ikke er muligt at simulere en teoretisk model med mange partikler på en klassisk computer uden at approksimere voldsomt.

I de tidlige 1980'ere kom Richard Feynman frem til den konklusion, at en klassisk simulation typisk lider under en eksponentiel nedsættelse af løsningsstempoet, mens en kvantecomputer i princippet kunne udføre simuleringen effektivt med en tilforladelig nedsættelse [5]. På denne måde vil kvantecomputeren kunne bruges til at fremme forståelsen mellem teoretiske modeller og eksperimentelle observationer.

2.0.3 Kvanteparallellisering

Qubits kan, som nævnt være i alle tænkelige superpositioner af vektorerne $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Vektoren $|\Psi\rangle$, der beskriver tilstanden af qubit'en, kan da være hvilken som helst lineær kombination

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

af $|0\rangle$ og $|1\rangle$ med komplekse koefficienter α og β . På samme måde kan et system af mange qubits være i en superposition af *alle* klassisk mulige tilstande

$$|00\dots 0\rangle + |10\dots 0\rangle + \dots + |11\dots 1\rangle .$$

Ved at bruge en sådan superposition som input i en algoritme er det muligt at regne på alle klassisk mulige tilstande på en og samme tid. Denne mulighed kaldes kvanteparallellisering. Det er et af kvantecomputerens store fortrin.

2.1 Implementering af en kvantecomputer

En kvantecomputer har mange fordele. Der er dog visse problemer med at lave en i praksis. Et af de største problemer er, at qubitterne skal være isolerede. Ellers ville de alt for hurtigt begynde at vekselvirke med omgivelserne og skabe dekohærens, som er ødelæggende for kvantecomputerens funktionsdygtighed.

En måde at opnå høj grad af isolation på er at vælge et system med svage vekselvirkninger som f.eks. fotoner. Der opstår dog et problem, for hvis der kun vekselvirkes svagt, er det svært at implementere kvantegates, som virker på mere end en qubit. For at få et universelt sæt af kvantegates er man nødt til at have mindst en flerqubitgate. Altså er det en balancegang mellem at opnå lav vekselvirkning med omgivelserne og høj vekselvirkning qubitterne imellem.

Kravene til en given implementering af en fysisk kvantecomputer er nok bedst beskrevet ved DiVincenzos fem kriterier [7]. Disse siger:

En kvantecomputer skal have følgende egenskaber:

- (i) Skal være et skalerbart fysisk system med veldefinerede qubits.
- (ii) Skal have evnen til at initialisere qubittilstandene til simple referencetilstande.
- (iii) Skal have lange dekohærenstider, meget længere end tiden for at udføre en gate.
- (iv) Skal have et universelt sæt af gates.
- (v) Skal have evnen til at udføre målinger på specifikke qubits.

Der er fremsat mange forskellige forslag til systemer, som måske kan få til at opfylde DiVincenzos kriterier, og dermed kan blive til en kvantecomputer. En kort oversigt over de vigtigste forslag er følgende [8]:

- Ionfælder: Qubitterne består af energiniveau'er i ioner indfanget i en elektromagnetisk fælde. Ind- og udlæsning af data foregår igennem lasere. Kobling mellem qubits skabes gennem eksitation af kollektive vibrationer af ionerne i fælden.
- Quantum dots: Enkelte elektroner holdes fast i små halvlederkredsløb. Ligesom partikler i en brønd har elektronerne diskrete energispektre. Disse kan benyttes til at implementere qubits. Elektronernes spin kan også udnyttes. Spin-spin kobling kan bruges til at danne gates.
- Atomer: Eksempelvis kan hyperfinstruktureniveauerne i atomer bruges til at implementere qubits. Enkeltatomer kan fanges i optiske

gitre, eller man kan benytte atomare ensembler, såsom gas. Atomerne kan manipuleres ved hjælp af laserlys.

- Nuclear Magnetic Resonance: Her benyttes spintilstande af atomer bundet i molekyler. Enkeltqubitgates implementeres via radiobølgepulser og toqubitgates implementeres gennem spin-spin vekselvirkning. NMR-kvantecomputere var de første til at køre en kvantealgoritme, og det er også dem som er nået længst beregningsmæssigt. Det er lykkedes for dem, ved hjælp af Shors algoritme at primtalsfaktorisere tallet $15 = 3 \cdot 5$ [9]. Der er dog et væsentligt problem. NMR-teknologien er ikke i stand til at initialisere tilstandene inden beregning, som ellers er et af DiVincenzo's kriterier.

Den implementeringsmetode som vi vil beskæftige os med er ionfælden. Dette forslag blev første gang fremført af Cirac og Zoller, og sidenhen har mange forskere taget udgangspunkt i deres idéer. Den artikel vi har arbejdet ud fra tager på samme måde også udgangspunkt i Cirac og Zollers oprindelige arbejde. Inden vi dog går i gang med at forklare om Cirac og Zollers arbejde, vil vi først beskrive, hvordan det er muligt at bygge en ionfælde.

2.1.1 Konstruktion af en ionfælde [10]

Ioner har en elektrisk ladning. Ved hjælp af denne ladning er det muligt at fange og holde ioner fast i et elektrisk felt. De indre tilstande i ionerne er samtidig næsten fuldstændige isolerede fra det eksterne elektriske felt. Dette bevirker, at man kan holde ionerne fast i rummet, mens deres indre tilstande kan bruges til at opbevare information.

For at holde ionerne fast må vi have et potentiale med et lokalt minimum. I et lokalt minimum gælder $\vec{\nabla}U = 0$ og $\vec{\nabla}^2U > 0$.

Dette kan man desværre ikke opfylde med et elektrostatisk potentiale, da den potentielle energi afhænger af det elektrostatiske potentiale med $U = q\Phi$.

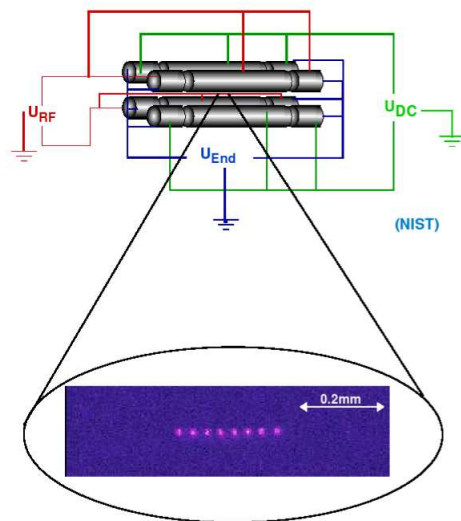
Da der for det elektrostatiske potentiale gælder, at $\vec{\nabla}^2\Phi = 0$, kan man ikke have et lokalt minimum med et elektrostatisk potentiale. Der er altså brug for potentiale, som varierer i tiden.

Figur [1] viser en skematisk tegning af en mulig måde at bygge en ionfælde, hvor U_{RF} er et oscillerende potentiale, som holder ionerne fast i retningerne transverse i forhold til stængerne, imens U_{end} er et statisk potentiale, der holder ionerne fast i den longitudinale retning.

Ved hjælp af laserkøling kan man få ionerne ned på så lave temperaturer, at ionerne fryser fast i en krystalstruktur, hvor Coulombfrastødningen modsvares af potentialet.

Ved at gøre det transverse potentiale meget stærkere end det longitudinale dannes der et en-dimensionelt krystal, og man kan negligere den transverse bevægelse.

Vibrationerne af ionerne omkring deres ligevægtspunkt er stærkt koblet på



Figur 1: Skematisk tegning over opbygningen af en ionfælde. Figuren er fra [10]

grund af Coulombvekselvirkningen imellem dem. Hvis én ion først begynder at oscillere, skubber den til sin nabo, som også begynder at oscillere. Hvis amplituden af ionernes oscillationer er meget mindre end afstanden imellem dem, kan vibrationerne approksimeres som harmoniske oscillatorer.

2.1.2 Cirac & Zoller

Den førnævnte implementering af kvantecomputere gennem ionfælder blev første gang foreslået af Cirac og Zoller [12]. Hver qubit er repræsenteret af indre tilstande i ionen. Det gør at qubitterne bliver meget velisolerede fra omgivelserne. Til at implementere gates mellem de forskellige qubits foreslog Cirac og Zoller at bestråle ionerne i ionfælden med laserlys. Laserlys kan bruges til at koble ionernes ydre bevægelsestilstande med dets indre tilstande, da absorption af en foton giver ionen rekyl. Da ionernes bevægelser er stærk koblete på grund af Coulombvekselvirkningen, er det muligt at skabe gates med flere ioner.

Inden Cirac og Zoller fremlagde deres arbejde, havde Sleator og Weinfurter vist, at alle operationer kunne koges ned til Control-NOT-gates mellem to qubits og rotationer af enkelte qubits [13]. Cirac og Zollers forslag til at opnå dette var at fokusere en laser på hver ion i fælden og udnytte de kollektive vibrationer til vekselvirkningen mellem ionerne. I deres oprindelige forslag var systemet begrænset til kun at bruge grundtilstanden for den samlede bevægelse (center-of-mass-mode). Ved at fokusere en laser på en bestemt ion og indstille frekvensen til et sidebånd vil en eksitation af en vibration ske,

hvis den udvalgte ion er i den indre tilstand $|e\rangle_j$. En efterfølgende bestråling af en anden ion vil ændre dennes indre tilstand, hvis og kun hvis vibrationsbevægelsen i forvejen er eksiteret. Ved gatens afslutning vil den vibrationelle eksitation blive fjernet, og det er muligt at implementere en ny gate. Denne procedure er implementeringen af en Control-NOT gate. Enkeltqubitrotationerne kan implementeres ved at bestråle en enkelt ion med en laser, hvis frekvens er lig frekvensen mellem ionens grundtilstand og dens eksiterede tilstand.

Udlæsningen af den endelige tilstand kan implementeres ved at lade en kraftig laser koble en af de indre tilstande, lad det være $|g\rangle$, til en tredje tilstand $|a\rangle$. Hvis en passende overgang bruges, vil den eksiterede tilstand $|a\rangle$ falde tilbage til grundtilstanden $|g\rangle$, hvorefter den igen vil blive eksiteret af den kraftige laser. På den måde vil flere fotoner blive spredt fra ionen, hvis den er i tilstanden $|g\rangle$, mens der ingen fotoner vil spredes, hvis den er i tilstanden $|e\rangle$. På den måde kan man kende forskel på $|g\rangle$ og $|e\rangle$, og det er muligt at aflæse det endelige resultat af beregningerne.

Selvom Cirac og Zöllers oprindelige arbejde, var det første realistiske forslag til en implementering af en kvantecomputer, så havde det også visse eksperimentelle udfordringer.

Deres forslag kræver, at vibrationerne er i grundtilstanden. Opvarmning fra omgivelserne gør det svært at blive i grundtilstanden. Det er dog lykkedes for få ioner. Hvis potentialet U_{RF} oscillerer med en høj frekvens bliver det lettere at holde ionernes vibration i grundtilstanden, da der her er stor afstand i energien imellem de forskellige modes. Derved bliver den fysiske afstand imellem ionerne dog lille, da de stærke indfangende kræfter presser ionerne tæt sammen. Dette skaber problemer for fokuseringen af lasere på de individuelle ioner. Der har været udført et forsøg, hvor afstanden mellem ionerne var $2\text{ }\mu\text{m}$, mens laserstrålens talje derimod var $20\text{ }\mu\text{m}$. Dette gjorde det umuligt at fokusere på en bestemt ion [14]. Endvidere antog Cirac og Zoller at alle ioner befandt sig i den samme fælde. I praksis skaber dette problemer, fordi for mange ioner i den samme fælde vil medføre, at ionerne ikke længere distribueres på en ret linie, men vil arrangere sig i et zigzagmønster [15]. Dette gør det svært at bruge forslaget til at bygge en kvantecomputer med mange qubits.

3 Sørensen og Mølmer's artikel

Sørensen og Mølmer's artikel [16] tager sit udgangspunkt i Cirac og Zöllers forslag til en ionfælde. De foreslår at benytte to lasere med modsat detuning. Ved at vælge passende parametre kan de vise, at dynamikken for de indre tilstande kan blive ideel, også selvom de vibrationelle frihedsgrader, som bruges til at koble ionerne, ikke er i deres grundtilstand. Sørensen og Mølmer ref-

ererer til en artikel af Milburn [17]. I denne vises det, hvordan man ved at tilpasse faserne af laserfelterne til sidebåndsovergange, kan koble operatorer for indre tilstande til kvadratiske komponenter, såsom positions- og impulsoperatorerne X og P for den simple harmoniske oscillator. Milburn foreslår at bruge de to hamiltonoperatorer $H_1 = \lambda_1 J_z P$ og $H_2 = \lambda_2 J_z X$, hvor J_z er udtrykt ved de kollektive spinoperatorer $J_\xi = \sum_k j_{\xi k}$ ($\xi = x, y, z$), hvor summen er over de ioner, som er betrålet af laserne, og $j_{\xi k}$ er udtrykt ved Paulis spinmatricer således, at $j_{\xi k} = \frac{\sigma_{\xi k}}{2}$ ($\hbar = 1$). Ved skiftevis af benytte de to hamiltonoperatorer H_1 og H_2 er det muligt at komme frem til følgende eksakte tidsudviklingsoperator:

$$e^{iH_2\tau} e^{iH_1\tau} e^{-iH_2\tau} e^{-iH_1\tau} = e^{-\lambda_1 \lambda_2 J_z^2 \tau^2}$$

Denne tidsudviklingsoperator kan bruges til at skabe en Control-NOT-gate. Den vekselvirkning mellem ionerne, indeholdt i J_z^2 , bliver dannet via vibrationsfrihedsgraderne, men efter gatens afslutning vil denne bevægelse være ført tilbage til initialtilstanden, og den vil på ingen måde være entangled med dynamikken for ionernes indre tilstande.

Sørensen og Mølmeres forslag skaber en tidsudviklingsoperator som er tilsvarende Milburns blot med J_y i stedet for J_x . Sørensen og Mølmer har følgende hamiltonoperator gældende for ioner i en lineær fælde, som bestråles med et laserfelt med frekvensen ω :

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{int} , \\ H_0 &= \nu \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \omega_{eg} \sum_i \frac{\sigma_{zi}}{2} , \\ H_{int} &= \sum_i \frac{\Omega_i}{2} \left(\sigma_{+i} e^{i(\eta_i(a+a^\dagger)-\omega t)} + e^{-i(\eta_i(a^\dagger+a)-\omega t)} \sigma_{-i} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

H_{int} er den semiklassiske hamilton, der beskriver vekselvirkning imellem lys og atomer med roterende-bølgeapproximationen [19].

Her er ν frekvensen for ionernes vibration, $a^\dagger$ og a er hæve- og sænkeoperatorerne for den kvantiserede simple harmoniske oscillator, som er en god approksimation for ionernes vibrationelle bevægelse. ω_{eg} er energiforskellen mellem de interne tilstande e og g , og Ω_i er Rabifrekvensen for den i 'te ion i laserfeltet. Positionen af ionerne x_i er erstattet af trappeoperatorerne $kx_i = \eta_i (a + a^\dagger)$, hvor Lamb-Dickeparameteren η_i repræsenterer forholdet mellem ionernes spring indenfor den vibrationelle grundtilstandsbølgefunktion og bølgelængden af den eksisterende stråling. I ligning (1) er det ydermere antaget laserens er tæt på et sidebånd $\omega \approx \omega_{eg} \pm \nu$ for en enkelt vibrationsmode, og at bidrag fra alle andre vibrationsmodes kan negligeres. Sørensen og Mølmer tuner laserens tæt på center-of-mass vibrationsmoden, hvori alle ioner deltager ligeligt i vibrationen. Dette bevirker at koblingen til vibrationen er identisk for alle ioner så $\eta_i = \eta$ for alle i . For simpeltheds skyld

antages den samme Rabifrekvens for alle ioner $\Omega_i = \Omega$.

Til at starte med undersøger Sørensen og Mølmer en ionfælde i Lamb-Dickegrænsen. Det vil sige, at ionerne er nedkølet til et regime med vibrationstal n således at $(n+1)\eta^2 \ll 1$ opfyldes. I det tilfælde kan ekspansionen $e^{i\eta(a+a^\dagger)} \approx 1 + i\eta(a+a^\dagger)$ udføres.

3.1 Svagfeltskobling

Ved at bestråle to ioner i en fælde med lasere med modsat detuning $\omega - \omega_{eg} = \pm\delta$ er de eneste energibevarende overgange dem fra $|ggn\rangle$ til $|een\rangle$ og $|gen\rangle$ til $|egn\rangle$, hvor n er den relevante vibrationsmode for fælden. I svagfeltsgrænsen $\eta\Omega \ll \nu - \delta$, hvor kun en negligerlig population er overført til de mellemliggende niveauer med vibrationskvantetal $n \pm 1$, kan den effektive Rabifrekvens $\tilde{\Omega}$ for overgangen mellem $|ggn\rangle$ og $|een\rangle$ beskrives ved andernordens perturbationsteori,

$$\tilde{\Omega} = 2 \sum_m \frac{\langle een|H_{int}|m\rangle \langle m|H_{int}|ggn\rangle}{E_m - (E_{ggn} + \omega_m)} = -\frac{(\Omega\eta)^2}{\nu - \delta}. \quad (2)$$

Her er $|m\rangle = |egn \pm 1\rangle$ de mellemliggende tilstande, og ω_m laserfrekvensen for at eksitere $|m\rangle$. Den samme effektive Rabifrekvens fås for overgangen mellem $|gen\rangle$ og $|egn\rangle$.

Det specielle ved ligning (2) er, at den ikke afhænger af kvantetallet n . Grunden til dette ligger i destruktiv interferens mellem de forskellige veje, hvorpå man kan komme fra $|ggn\rangle$ til $|een\rangle$ eller fra $|gen\rangle$ til $|egn\rangle$. Den kohærente tidsudvikling af de indre tilstande er da upåvirkede af vibrationskvantetallet.

3.2 Tidsudviklingsoperatoren

Ved at skrive Hamiltonen fra formel (1) i vekselvirkningsbilledet kommer Sørensen og Mølmer frem til denne Hamilton:

$$\begin{aligned} H_{int} = & 2\Omega J_x \cos(\delta t) - \sqrt{2}\eta\Omega J_y [\hat{x}(\cos((\nu - \delta)t) + \cos((\nu + \delta)t)) \\ & + \hat{p}(\sin((\nu - \delta)t) + \sin((\nu + \delta)t))] \end{aligned} \quad (3)$$

Ved at benytte at $\Omega \ll \nu$ og $\nu - \delta \ll \delta$ smider de J_x -leddet og de led, som svinger med $\nu + \delta$, væk. Det giver dem en Hamilton på formen:

$$H_{int} = f(t)J_y\hat{x} + g(t)J_y\hat{p} \quad (4)$$

Det giver følgende tidsudviklingsoperator:

$$U(t) = e^{-iA(t)J_y^2} e^{-iF(t)J_y\hat{x}} e^{-iG(t)J_y\hat{p}} \quad (5)$$

hvor

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_0^t f(t') dt' \\
G(t) &= \int_0^t g(t') dt' \\
A(t) &= - \int_0^t F(t') g(t') dt'
\end{aligned} \tag{6}$$

Det fører til ligningerne (9) i Sørensen og Mølmer's artikel. Disse ligninger reducerer til $F(\tau) = G(\tau) = 0$ og $A(\tau) = \Omega\tau$ under betingelse af at $(\nu - \delta)\tau = 2\pi K$, hvor K er et vilkårligt heltal. Ved at kræve at $A(\tau) = -\frac{\pi}{2}$ giver:

$$U(t) |gg\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |gg\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |ee\rangle \tag{7}$$

Dette kan sammen med nogle enkeltionoperationer bruges til at lave en Control-NOT-gate.

4 Optimering af Sørensen og Mølmer's forslag

Sørensen og Mølmer lader ionernes Rabifrekvens, Ω , være uafhængig af tiden. Ved at lade intensiteten af laserne være tidsafhængig kan man få Rabifrekvensen til også at være det. En tidsafhængig Rabifrekvens kan muligvis undertrykke de fejlkilder Sørensen og Mølmer beskriver i deres artikel. Vi vil forsøge at finde en passende $\Omega(t)$.

Men først vil vi finde betingelser, som kan optimere gaten med den konstante intensitet, den flade puls.

4.1 Optimering af den flade puls

Hvis man i modsætning til i Sørensen og Mølmer's artikel medtager de funktioner, som svinger med $\nu + \delta$, får man i stedet for formlerne (6):

$$\begin{aligned}
F(t) &= -\sqrt{2}\eta\Omega \left(\frac{1}{\nu - \delta} \sin((\nu - \delta)t) + \frac{1}{\nu + \delta} \sin((\nu + \delta)t) \right) \\
G(t) &= -\sqrt{2}\eta\Omega \left(\frac{1}{\nu - \delta} - \frac{1}{\nu - \delta} \cos((\nu - \delta)t) + \frac{1}{\nu + \delta} - \frac{1}{\nu + \delta} \cos((\nu + \delta)t) \right) \\
A(t) &= - \left[\eta^2 \Omega^2 \frac{2\nu}{\nu^2 - \delta^2} t - \frac{\eta^2 \Omega^2}{2(\nu - \delta)^2} \sin(2(\nu - \delta)t) - \frac{\eta^2 \Omega^2}{2(\nu + \delta)^2} \sin(2(\nu + \delta)t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{2\nu}{\nu^2 - \delta^2} \left(\frac{1}{2\delta} \sin(2\delta t) - \frac{1}{2\nu} \sin(2\nu t) \right) \right]
\end{aligned} \tag{8}$$

De ekstra led går dog ud, hvis man samtidig med Sørensen og Mølmer's krav om at $(\nu - \delta)\tau = 2\pi K$ kræver at $(\nu + \delta)\tau = 2\pi K'$. Ud fra disse samt kravet

om at $A(\tau) = -\frac{\pi}{2}$ kan man se, at når man vælger hvilke K og K' , man vil have, har man dermed fastlagt de parametre, man umiddelbart kan ændre på, idet ν og η fastlægges af fældens konstruktion og hvilken type ioner, man har:

$$\nu\tau = \pi(K + K') \quad (9)$$

$$(\eta\kappa)^2 = \frac{KK'}{(K + K')^3} \quad (10)$$

$$1 - \lambda^2 = \frac{(K + K')^2}{4KK'} \quad (11)$$

hvor

$$\lambda \equiv \frac{\delta}{\nu}$$

$$\kappa \equiv \frac{\Omega}{\nu}$$

4.1.1 J_x -leddet

J_x -leddet i formel (3) giver anledning til en fald i fidelity. Fidelityen beskriver i hvor høj grad man får den ønskede tilstand og er givet ved:

$$F = \langle \Psi_{max} | \rho_{int}(\tau) | \Psi_{max} \rangle \quad (12)$$

Den tilstand, vi ønsker, er $|\Psi_{max}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|gg\rangle - i|ee\rangle)$. $\rho_{int}(\tau)$ er tæthedsmatricen givet ved:

$$\rho_{a_1 \dots a_N, b_1 \dots b_N}(t) = \sum_n P_n \langle n | \langle gg | U^\dagger(t) | b_1 \dots b_N \rangle \times \langle a_1 \dots a_N | U(t) | gg \rangle | n \rangle \quad (13)$$

Ved at behandle (5) som U_0 og J_x -leddet som H_{int} i vekselvirkningsbilledet bliver $|\Psi_{max}\rangle = |gg\rangle$. Det giver en fidelity for 2 ioner på:

$$F = \sum_n P_n \langle n | \left| \langle gg | U_0^\dagger(\tau) U_{int}(\tau) U_0(\tau) | gg \rangle \right|^2 | n \rangle \quad (14)$$

$U_0^\dagger U_{int} U_0$ kan skrives som en Dysonserie:

$$U_0^\dagger U_{int} U_0 = 1 - i \int_0^\tau dt' 2\Omega \cos(\delta t') U_0^\dagger(t') J_x U_0(t') \quad (15)$$

$$- \int_0^\tau \int_0^{t'} dt' dt'' 4\Omega^2 \cos(\delta t') \cos(\delta t'') U_0^\dagger(t') J_x U_0(t') U_0^\dagger(t'') J_x U_0(t'')$$

I Sørensen og Mølmer's artikel bruges, at $\cos(\delta t)$ varierer meget hurtigere end $U_0^\dagger(t) J_x U_0(t)$ til at approksimere udtrykket. Det giver samlet set følgende fidelity (for 2 ioner):

$$F \approx 1 - \frac{\Omega^2}{\delta^2} (1 - \cos(2\delta\tau)) \quad (16)$$

Det betyder at fidelityen bliver 1, når $2\delta\tau$ er lig med et heltal gange 2π . Det er dog allerede opfyldt, idet vores tidligere betingelser medfører at $2\delta\tau = 2\pi(K' - K)$.

4.1.2 Lamb-Dickegrænsen

Det foregående er udregnet i Lamb-Dickegrænsen. Sørensen og Mølmer udregner korrektionen til dette i afsnit 3.B. Korrektionen sker ved at:

$$\tilde{\Omega}\tau = \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

bliver erstattet med:

$$\tilde{\Omega}\tau_{opt} = \frac{\pi}{2}(1 + \eta^2(2\bar{n} + 1)) \quad (18)$$

Sørensen og Mølmer løser dette ved blot at lade gaten være lidt længere tid. Vi har dog med ligning (9) fastlagt tiden. Det ekstra led kommer blot til at optræde i formel (10). Så i modsætning til Sørensen og Mølmer bliver vi nødt til at lade Ω blive større.

4.1.3 Andre vibrationsmodes

Vi har i det foregående antaget at laseren kun kobler til center-of-mass mode. Det er ikke rigtigt. For N ioner er der $3N$ vibrationsmodes, som den kan koble til. Hvis vi antager, at potentialet i de transverse retninger er tilstrækkeligt stejlt kan vi se bort fra disse modes. Ved at regne med 2 ioner fås altså en ekstra vibration, som laseren kan koble til. Den ekstra vibration har frekvensen $\nu_2 = \sqrt{3}\nu$. Den giver anledning til en U_2 som ser sådan ud:

$$U_2(t) = e^{-iA_2(t)\Theta_2^2} e^{-iF_2(t)\Theta_2\hat{x}_2} e^{-iG_2(t)\Theta_2\hat{p}_2} \quad (19)$$

, hvor $U_{tot} = U_1U_2$. $F_2(t)$, $G_2(t)$ og $A_2(t)$ er givet som i formel (6) blot med:

$$\begin{aligned} f_2(t) &= -\sqrt{2}\eta\Omega\sqrt{\frac{\nu}{\nu_2}}(\cos((\nu_2 - \delta)t) + \cos((\nu_2 + \delta)t)) \\ g_2(t) &= -\sqrt{2}\eta\Omega\sqrt{\frac{\nu}{\nu_2}}(\sin((\nu_2 - \delta)t) + \sin((\nu_2 + \delta)t)) \end{aligned}$$

Fidelityen bliver:

$$\begin{aligned} F &= \sum_n P_n \langle n | \langle gg | U_2^\dagger(t) U_1^\dagger(t) (|gg\rangle - i|ee\rangle) (\langle ee| i + \langle gg|) U_1(t) U_2(t) |gg\rangle |n\rangle \\ &\quad \sum_n P_n \langle n | \langle gg | U_2^\dagger(t) |gg\rangle \langle gg | U_2(t) |gg\rangle |n\rangle \end{aligned} \quad (20)$$

$U_2(t)$ ekspanderes til anden orden i η :

$$\begin{aligned} U_2(t) = & 1 - iG_2(t)\Theta_2 p_2 - \frac{1}{2}G_2(t)^2\Theta_2^2 p_2^2 - iF_2(t)\Theta_2 x_2 \\ & - F_2(t)G_2(t)\Theta_2^2 x_2 p_2 - \frac{1}{2}F_2(t)^2\Theta_2^2 p_2^2 - iA_2(t)\Theta_2^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Man sætter dette ind i formel (20) og sørger for at smide leddene af 3. orden eller højere i η væk samt bruger, at:

$$\langle gg | \Theta_2^2 | gg \rangle = \frac{1}{2}$$

Derved fås:

$$F = \sum_n P_n \langle n | \left(1 - \frac{1}{2}G_2^2(t)\hat{p}_2^2 - \frac{1}{2}F_2^2(t)\hat{x}_2^2 \right) | n \rangle$$

Ved at bruge at $\nu \approx \delta$ og midle over tiden fås:

$$\begin{aligned} F &= 1 - \eta^2 \frac{\Omega^2}{\nu^2} \frac{\nu}{\nu_2} (2\bar{n}_2 + 1) \frac{3\nu_2^2/\nu^2 + 1}{(\nu_2^2/\nu^2 - 1)^2} \\ &= 1 - \frac{5}{2}\eta^2 \frac{\Omega^2}{\nu^2} \frac{1}{\sqrt{3}} (2\bar{n}_2 + 1) \end{aligned}$$

Bemærk at denne ligning ikke er helt tilsvarende formel (34) i Sørensen og Mølmers artikel. Dette skyldes en regnefejl i artiklen.

Hvis vi, i stedet for at midle, skriver $F_2^2(t) + G_2^2(t)$ ud, og bruger de betingelser, vi tidligere har opstillet fås:

$$\begin{aligned} F &= 1 - 4\eta^2 \frac{\Omega^2}{\nu^2} \frac{\nu}{\nu_2} (2\bar{n}_2 + 1) \frac{\nu_2^2/\nu^2}{(\nu_2^2/\nu^2 - 1)^2} [1 - \cos(\nu_2\tau) \cos(\delta\tau)] \\ &= 1 - 3\eta^2 \frac{\Omega^2}{\nu^2} \frac{1}{\sqrt{3}} (2\bar{n}_2 + 1) [1 - \cos(\nu_2\tau) \cos(\delta\tau)] \\ &= 1 - 3\eta^2 \frac{\Omega^2}{\nu^2} \frac{1}{\sqrt{3}} (2\bar{n}_2 + 1) [1 - \cos(\sqrt{3}\pi(K + K')) \cos(\pi(K' - K))] \end{aligned}$$

I skemaet er medtaget værdier K' , der giver en høj fidelity under antagelse af at $K = 1$ (der er kun medtaget værdier af K' for hvilke fidelityen er større end for den foregående værdi):

K'	$1 - \cos(\sqrt{3}\pi(K + K')) \cos(\pi(K' - K))$
2	$2 \cdot 10^{-1}$
7	$1 \cdot 10^{-1}$
10	$1 \cdot 10^{-2}$
29	$7 \cdot 10^{-3}$
40	$1 \cdot 10^{-3}$
111	$5 \cdot 10^{-4}$
152	$7 \cdot 10^{-5}$
417	$4 \cdot 10^{-5}$

Det er ikke alle værdier i tabellen, som er brugbare. Hvis $K' = 2$ er $\frac{\eta\Omega}{\nu}$ ifølge formel (10) lig $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \frac{1}{4}$ og det vil gøre det meget svært at forblive i Lamb-Dicke-grænsen og samtidig fastholde J_x -leddet som et perturbationsled. Samtidig skal man ikke vælge for stor en værdi, for $\nu\tau$ er proportional med K' ifølge formel (9). $K' = 40$ virker som en passende værdi og vil blive brugt i resten af rapporten.

4.2 Et første kig på ikke-flade pulser

Vi undersøger nu om en anden pulsform vil minimere fidelitytabet for J_x -leddet i omegnen af $t = \tau$. For simpeltheds skyld smider vi $\nu + \delta$ -leddene i vores Hamilton væk på samme måde som i Sørensen og Mølmer's artikel. Til at starte med antager vi desuden, at vi stadigvæk kan flytte $U_0^\dagger(t)J_xU_0$ uden for integraltegnet i udregning af fidelityen se formel (14) og (15), men beholde $\Omega(t)$ under integraltegnet.

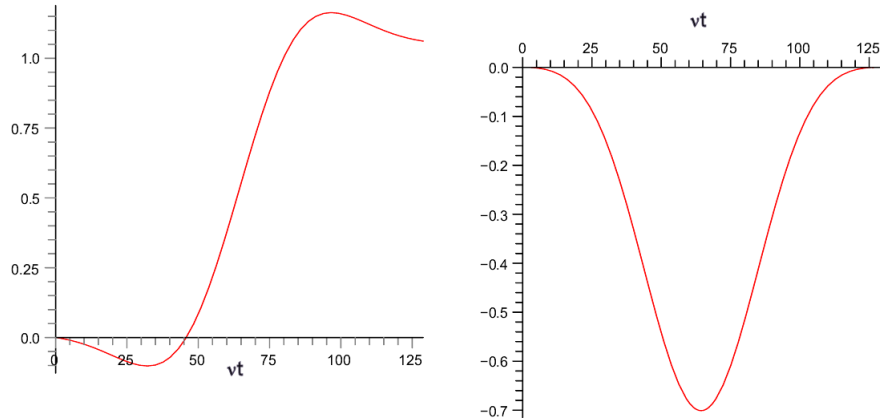
Som et første forsøg prøver vi en Gaussfunktion. Integralet kan for en Gaussfunktion, som aftager tilstrækkeligt hurtigt (altså en lille værdi af σ), approksimeres med en Fouriertransformation, og en Fouriertransformation af en Gaussfunktion er en Gaussfunktion. For en tilstrækkelig stor værdi af σ går det også godt for hvis $\frac{\tau}{2\sigma} \ll \delta\sigma$ er fidelityen blot:

$$F = 1 - e^{-\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}} \frac{\Omega^2}{\delta^2} (1 - \cos(2\delta t)) \quad (22)$$

Derfor virker en Gaussfunktion umiddelbart som en udemærket ide.

Den har dog visse problemer. Hvis vi nu tegner graferne for $F(t)$ og $G(t)$, ses det, at $G(t)$ stadigvæk bliver 0 for $t = \tau$, men $F(t)$ bliver slet ikke 0.

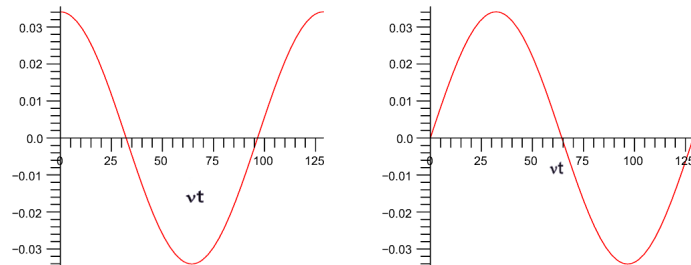
Hvorfor kan ses ved at betragte $f(t)$ og $g(t)$ som i figur [3]. $g(t)$ er asym-



Figur 2: $F(t)$ og $G(t)$ med en enkelt Gaussfunktion som puls.

metrisk omkring $\frac{\tau}{2}$ og integralet over funktionen bliver derfor 0. Det ændres

ikke ved at gange med Gaussfunktionen, da denne er symmetrisk omkring $\frac{\tau}{2}$.
 $f(t)$ er derimod symmetrisk omkring $\frac{\tau}{2}$. Til gengæld er den asymmetrisk



Figur 3: $f(t)$ og $g(t)$.

omkring punkterne $\frac{\tau}{4}$ og $\frac{3\tau}{4}$. Derfor bliver integralet over $f(t)$ alligevel lig 0. Gaussfunktionen er dog på ingen måde symmetrisk omkring $\frac{\tau}{4}$ og $\frac{3\tau}{4}$. Det er derfor Gaussfunktionen gør, at $F(\tau)$ ikke bliver 0.

Hvis vi vil være sikre på, at $F(\tau)$ og $G(\tau)$ bliver 0, skal vi blot vælge en funktion som både er symmetrisk omkring $\frac{\tau}{2}$ og omkring $\frac{\tau}{4}$ og $\frac{3\tau}{4}$ (alternativt kan man vælge en funktion, som er asymmetrisk om alle disse punkter). Funktionen kunne f.eks. se sådan ud:

$$\Omega(t) = \begin{cases} \Omega_0 e^{-\frac{(t-\tau/4)^2}{2\sigma^2}} & t < \frac{\tau}{2} \\ \Omega_0 e^{-\frac{(t-3\tau/4)^2}{2\sigma^2}} & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

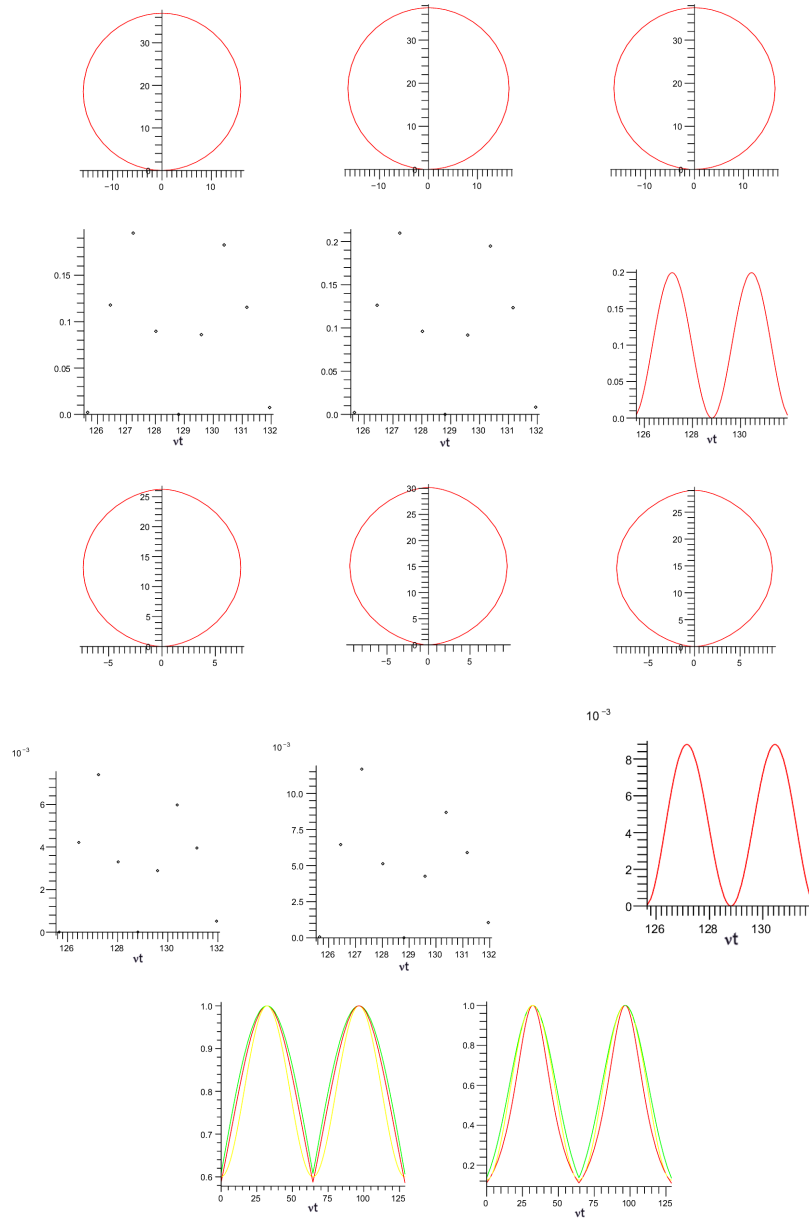
$$\Omega(t) = \begin{cases} \frac{\Omega_0}{\cosh(\zeta(t-\tau/4))} & t < \frac{\tau}{2} \\ \frac{\Omega_0}{\cosh(\zeta(t-3\tau/4))} & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

Disse funktioner kan i høj grad efterlignes af:

$$\Omega(t) = \Omega_0(q - (1 - q) \cos(2(\nu - \delta)t))$$

I figur[4] er plottet $x = F(t)$, $y = G(t)$ og integralet fra formel (23) omkring $t = \tau$ for de 3 forskellige pulsformer med to forskellige værdier af parametrene ζ , σ og q . Desuden er de tre pulser plottet i et samlet plot. For $q < \frac{1}{2}$ kan den trigonometriske funktion dog ikke længere efterligne de to andre funktioner, men spørgsmålet er om funktionerne i det hele taget er brugbare i det område.

Den trigonometriske funktion med $q = \frac{1}{2}$ har brug for en maksimal Rabifrekvens, der er omkring 2,2 gange så stor som Rabifrekvensen for den flade puls, hvis gaten skal vare samme tid. Hvis de to andre funktioner gøres endnu smallere vil det kræve en endnu større maksimal Rabifrekvens. Da den



Figur 4: Hyperbolsk cosekant i venstre kolonne, Gaussfunktionen i midterste kolonne og den trigonometriske funktion i højre kolonne. Række 1-2: $(F(t), G(t))$ og integralet fra formel (23) for værdierne: $\frac{\zeta}{\nu} = 0.035$, $\frac{\sigma}{\tau} = \frac{1}{4}$ og $q = \frac{4}{5}$. Række 3-4: $(F(t), G(t))$ og integralet fra formel (23) for værdierne: $\frac{\zeta}{\nu} = 0.09$, $\frac{\sigma}{\tau} = \frac{1}{8}$ og $q = \frac{9}{16}$. Nederst $\Omega(t)$: til venstre for det første sæt værdier, til højre for det andet sæt.

trigonometriske funktion desuden har en analytisk løsning til nedenstående dobbeltintegral, vil vi blot bruge denne:

$$\int_0^t \int_0^{t'} \cos(\delta t') \cos(\delta t'') \Omega(t') \Omega(t'') dt' dt'' \quad (23)$$

4.2.1 Optimering af den trigonometriske puls

Ved at bruge den trigonometriske puls fås en løsning, som har 8 forskellige led: et konstantled og 7 cosinusled. Cosinusleddene har følgende frekvenser:

<i>frekvens</i>	<i>frekvens/ν</i>
$4\nu - 2\delta$	$\frac{85}{41}$
2δ	$\frac{78}{41}$
$6\delta - 4\nu$	$\frac{70}{41}$
$4\delta - 2\nu$	$\frac{74}{41}$
2ν	$\frac{82}{41}$
$2\nu - 2\delta$	$\frac{4}{41}$
$4\nu - 4\delta$	$\frac{8}{41}$

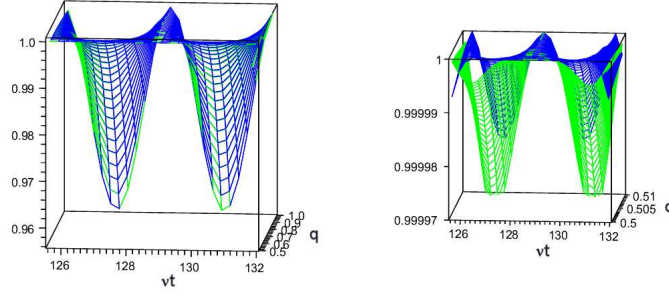
De første fem frekvenser er nogenlunde ens. Hvis vi derfor sørger for at de faktorer, der står foran de cosinusser til sammen giver 0, vil de derfor omtrent udslukke hinanden i området omkring $t = \tau$. De to sidste frekvenser er små, at de ikke betyder så meget i omegnen af $t = \tau$. For at få summen af faktorerne foran cosinusserne med de 5 største frekvenser til blive 0, må der gælde:

$$q = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta^2 - 2(\nu - \delta)^2}$$

Da $\delta \gg \nu - \delta$ er dette tæt på $\frac{1}{2}$. At fidelityen bliver flad omkring $t = \tau$ for værdier af q tæt på $\frac{1}{2}$ er ikke overraskende. Dette kunne blot skyldes at Rabifrekvensen går mod 0, når t går mod τ . Derfor er det relevant at sammenligne dobbeltintegralet i formel (23) med:

$$(q - (1 - q) \cos(2(\nu - \delta)t))^2 \int_0^t \int_0^{t'} \cos(\delta t') \cos(\delta t'') dt' dt'' \quad (24)$$

Graferne viser fidelityen udregnet på baggrund af formel (23) og (24). De to grafer følger hinanden det meste af vejen med fidelity fra formel (23) liggende en lille smule højere end den fra formel (24). Den flader desuden lidt mere ud omkring $q = \frac{1}{2}$. Dette kunne skyldes effekten beskrevet ovenfor, men det kan også, at den lille forskel bare virker mere tydelig når funktionerne er små.



Figur 5: Fidelityen udregnet ved at bruge formel (23) (blå) og ved at bruge formel (24) (grøn)

4.2.2 $A(t)$ med den trigonometriske puls

Den nye pulsform har også indflydelse på $A(t)$ I stedet for:

$$A(t) = -\frac{\eta^2 \Omega^2}{\nu - \delta} \left[t - \frac{1}{\nu - \delta} \sin(2(\nu - \delta)t) \right] \quad (25)$$

bliver den nu:

$$A(t) = -\frac{\eta^2 \Omega^2}{\nu - \delta} \left[\frac{5q^2 + 2q - 1}{6} t + \frac{q^2 - 18q + 5}{24(\nu - \delta)} \sin(2(\nu - \delta)t) - \frac{5q^2 - 6q + 1}{24(\nu - \delta)} \sin(4(\nu - \delta)t) - \frac{q^2 - 2q + 1}{72(\nu - \delta)} \sin(6(\nu - \delta)t) \right] \quad (26)$$

Det betyder at den effektive Rabifrekvens $\tilde{\Omega}$ bliver mindre. Dette kan opvejes ved enten at lade gaten være længere tid eller ved en større maksimal Rabifrekvens end for den flade puls.

4.3 Den trigonometriske puls med operatorernes tidsafhængighed

I afsnit 4.2 antog vi, at man kunne flytte $U_0^\dagger(t) J_x U_0(t)$ uden for integralet, men beholde $\Omega(t)$ under det i formel (15). Det er slet ikke sikkert, at man kan det. Derfor bliver vi nødt til at omskrive $U_0^\dagger(t) J_x U_0(t)$. Til det formål skrives operatorer på matrixform med $|ee\rangle, |eg\rangle \dots$ som basis:

$$J_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

For nemheds skyld defineres følgende operator:

$$\hat{\eta} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der bruges desuden følgende kommutatorer:

$$\begin{aligned} [J_y^2, J_x] &= \hat{\eta} \\ [J_y^2, \hat{\eta}] &= J_x \\ [J_y, J_x] &= -iJ_z \\ [J_y, [J_y, J_x]] &= J_x \\ [J_y, \hat{\eta}] &= i(\sigma_{-1}\sigma_{-2} - \sigma_{+1}\sigma_{+2}) \\ [J_y, [J_y, \hat{\eta}]] &= \hat{\eta} \end{aligned}$$

Nogle af disse er udregnet i bilag A.

Dette giver samlet set:

$$\begin{aligned} U_0^\dagger(t) J_x U_0(t) &= \\ (J_x \cos(A(t) + \frac{F(t)G(t)}{2}) + i\hat{\eta} \sin(A(t) + \frac{F(t)G(t)}{2})) \cos(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) + \\ (J_z \cos(A(t) + \frac{F(t)G(t)}{2}) + i(\sigma_{+1}\sigma_{+2} - \sigma_{-1}\sigma_{-2}) \sin(A(t) + \frac{F(t)G(t)}{2})) \sin(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) \end{aligned}$$

Da $\hat{\eta}^2 = -J_x^2$ bliver dette udtryk i anden lig J_x^2 for $t = \tau$ som forventet.

Udregningen kan ses mere detaljeret i bilag B.

Dette kan man ikke umiddelbart integrere over, da det indeholder en trigonometrisk funktion af to operatorer ganget med tidsafhængige funktioner. Dette kan dog løses ved at sætte udtrykket ind i formel (15) og indføre en ekstra sum $\sum_{n'} |n'\rangle \langle n'|$. For nemheds skyld indføres forkortelserne β'/β'' og α'/α'' , hvor $\beta' = F(t')\hat{x} + G(t')\hat{p}$ og $\alpha' = A(t') + \frac{F(t')G(t')}{2}$. Desuden defineres $(\sigma_{+1}\sigma_{+2} - \sigma_{-1}\sigma_{-2}) \equiv \hat{\zeta}$. Derved fås:

$$\begin{aligned} \rho_{aa,aa} &= \sum_n P_n \sum_{n'} \left| \langle aa | \langle n' | U_0^\dagger U_{int} U_0 | n \rangle | gg \rangle \right|^2 \\ &= \sum_n P_n \sum_{n'} \left| \langle aa | \left(\delta_{n,n'} - 2i \int_0^t dt' \Omega(t') \cos(t') (J_x \cos(\alpha') \langle n' | \cos(\beta') | n \rangle \right. \right. \\ &\quad + i\hat{\eta} \sin(\alpha') \langle n' | \cos(\beta') | n \rangle + J_z \cos(\alpha') \langle n' | \sin(\beta') | n \rangle \\ &\quad + i\hat{\zeta} \sin(\alpha') \langle n' | \sin(\beta') | n \rangle) \\ &\quad - 4 \int_0^t \int_0^{t'} dt' dt'' \Omega(t') \Omega(t'') \cos(\delta t') \cos(\delta t'') \times \\ &\quad ((J_x \cos(\alpha') + i\hat{\eta} \sin(\alpha'))(J_x \cos(\alpha'') + i\hat{\eta} \sin(\alpha'')) \langle n' | \cos(\beta') \cos(\beta'') | n \rangle \\ &\quad + (J_z \cos(\alpha') + i\hat{\zeta} \sin(\alpha'))(J_z \cos(\alpha'') + i\hat{\zeta} \sin(\alpha'')) \langle n' | \sin(\beta') \sin(\beta'') | n \rangle \\ &\quad + (J_z \cos(\alpha') + i\hat{\zeta} \sin(\alpha'))(J_x \cos(\alpha'') + i\hat{\eta} \sin(\alpha'')) \langle n' | \sin(\beta') \cos(\beta'') | n \rangle \\ &\quad \left. \left. + (J_x \cos(\alpha') + i\hat{\eta} \sin(\alpha'))(J_z \cos(\alpha'') + i\hat{\zeta} \sin(\alpha'')) \langle n' | \cos(\beta') \sin(\beta'') | n \rangle \right) + \dots \right| | gg \rangle \right|^2 \end{aligned} \tag{27}$$

Sædvanligvis gælder der at:

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$$

Denne regel kan dog ikke bruges direkte da vores A og B er operatorer i stedet for tal. Derimod kan man udlede et tilsvarende resultat ved hjælp af Baker-Hausdorffs formel:

$$\cos(\beta') \cos(\beta'') = \frac{1}{2} e^{-i \frac{(F(t')G(t'') - G(t')F(t''))}{2}} \cos(\beta' + \beta'') + \frac{1}{2} e^{i \frac{(F(t')G(t'') - G(t')F(t''))}{2}} \cos(\beta' - \beta'')$$

$$\sin(\beta') \sin(\beta'') = -\frac{1}{2} e^{-i \frac{(F(t')G(t'') - G(t')F(t''))}{2}} \cos(\beta' + \beta'') + \frac{1}{2} e^{i \frac{(F(t')G(t'') - G(t')F(t''))}{2}} \cos(\beta' - \beta'')$$

Udregningen kan ses mere detaljeret i bilag C. Vi har brug for at bestemme:

$$\langle n' | \sin(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) | n \rangle \quad (28)$$

$$\langle n' | \cos(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) | n \rangle \quad (29)$$

Det gøres ved at skrive de trigonometriske funktioner som eksponentialfunktioner og skrive $\hat{x}$ og $\hat{p}$ ved hjælp af hæve- og sænkeoperatorer:

$$\begin{aligned} & \langle n' | \sin(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) | n \rangle \\ &= \frac{1}{2i} \left(\langle n' | e^{\left(\frac{-G(t)}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right)a^\dagger - \left(\frac{-G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right)a} | n \rangle - \langle n' | e^{\left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right)a^\dagger - \left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right)a} | n \rangle \right) \end{aligned} \quad (30)$$

Eksponentialfunktionerne genkendes som Glaubers forskydningsoperatorer, hvis matrixelementer $\langle n' | D(\alpha) | n \rangle$ kan slås op i [18]. For $n < n'$ giver det:

$$\begin{aligned} & \langle n' | \sin(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) | n \rangle \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{n!}{n'!} \right)^{1/2} e^{-\frac{(G(t)^2 + F(t)^2)}{4}} L_{n'}^{(n'-n)} \left(\frac{G(t)^2 + F(t)^2}{2} \right) \left[\left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n'-n} - \left(-\frac{G(t)}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n'-n} \right] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{for } n' - n \text{ lige} \\ -i \left(\frac{n!}{n'!} \right)^{1/2} e^{-\frac{(G(t)^2 + F(t)^2)}{4}} L_{n'}^{(n'-n)} \left(\frac{G(t)^2 + F(t)^2}{2} \right) \left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n'-n} & \text{for } n' - n \text{ ulige} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle n' | \cos(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) | n \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n!}{n'!} \right)^{1/2} e^{-\frac{(G(t)^2 + F(t)^2)}{4}} L_{n'}^{(n'-n)} \left(\frac{G(t)^2 + F(t)^2}{2} \right) \left[\left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n'-n} + \left(-\frac{G(t)}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n'-n} \right] \\ &= \begin{cases} \left(\frac{n!}{n'!} \right)^{1/2} e^{-\frac{(G(t)^2 + F(t)^2)}{4}} L_{n'}^{(n'-n)} \left(\frac{G(t)^2 + F(t)^2}{2} \right) \left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n'-n} & \text{for } n' - n \text{ lige} \\ 0 & \text{for } n' - n \text{ ulige} \end{cases} \end{aligned}$$

For $n > n'$ fås det samme blot med n og n' byttet om. Udregningen kan ses i detaljer i bilag D.

Operatorerne J_z og $\hat{\zeta}$ består begge af operatorer som hæver g/sænker e et lige antal gange. Operatorerne J_x og $\hat{\eta}$ derimod består af operatorer som hæver g/sænker e et

ulige antal gange. Når man bruger en af den første slags og den anden slags på $|gg\rangle$ vil man derfor få en superposition af $|eg\rangle$ og $|ge\rangle$. Altså kan man konkludere:

$$\begin{aligned} \langle gg|J_x J_z|gg\rangle &= \langle gg|J_x \hat{\zeta}|gg\rangle = \langle gg|\hat{\eta} J_z|gg\rangle \\ &= \langle gg|J_z J_x|gg\rangle = \langle gg|\hat{\zeta} J_x|gg\rangle = \langle gg|J_z \hat{\eta}|gg\rangle \\ &= \langle gg|\hat{\eta} \hat{\zeta}|gg\rangle = \langle gg|\hat{\zeta} \hat{\eta}|gg\rangle = 0 \end{aligned}$$

Dermed er der kun 2 led tilbage foruden dem, der består af en operator i anden. Det er leddet bestående af J_z og $\hat{\zeta}$ og leddet bestående af J_x og $\hat{\eta}$. For begge led gælder:

$$\{J_x, \hat{\eta}\} = \{J_z, \hat{\zeta}\} = 0$$

De vil derfor udvælge den antisymmetriske del af de trigonometriske funktioner de er ganget sammen med.

For $\rho_{gg,gg}$ ses det at enkeltintegralet i formel (27) kun indeholder $\langle n'|\sin|n\rangle$, imens kun indeholder $\langle n'|\cos|n\rangle$. Det giver samlet set:

$$\begin{aligned} \rho_{gg,gg} = \sum_n P_n & \left(\left| 1 - 4 \int_0^t \int_0^{t'} dt' dt'' \Omega(t') \Omega(t'') \cos(\delta t') \cos(\delta t'') \left[\cos(\alpha'' - \alpha') \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left(-\frac{1}{4} e^{\frac{-i(F(t')G(t'') - F(t'')G(t'))}{2}} \langle n|\cos(\beta' + \beta'')|n\rangle + \frac{3}{4} e^{\frac{i(F(t')G(t'') - F(t'')G(t'))}{2}} \langle n|\cos(\beta' - \beta'')|n\rangle \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{i}{2} \sin(\alpha'' - \alpha') \langle n|\cos(\beta') \cos(\beta'')|n\rangle \right] \right|^2 + \left| 2i \int_0^t dt' \Omega(t') \cos(\delta t') \cos(\alpha') \langle n-1|\sin(\beta')|n\rangle \right|^2 \\ & \left. + \left| 2i \int_0^t dt' \Omega(t') \cos(\delta t') \cos(\alpha') \langle n+1|\sin(\beta')|n\rangle \right|^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (31)$$

(For $n = 0$ er der naturligvis ikke noget $n - 1$ -led i det ovenstående)

4.3.1 Approksimationer og deres gyldighed

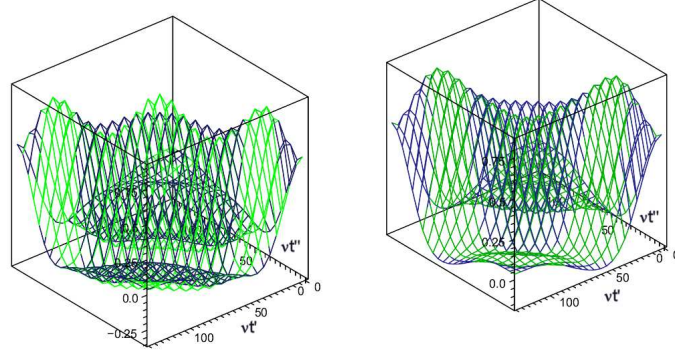
Udtrykkene for $\langle n'|\sin|n\rangle$ og $\langle n'|\cos|n\rangle$ indeholder eksponentielle funktioner af trigonometriske funktioner og trigonometriske funktioner af trigonometriske funktioner.

Da en trigonometrisk funktion aldrig bliver større end 1, må det være rimeligt, at approksimere funktioner, der har trigonometriske funktioner som argument, med en forholdsvis simpel Taylorekspansion. Derved kan integralerne løses analytisk.

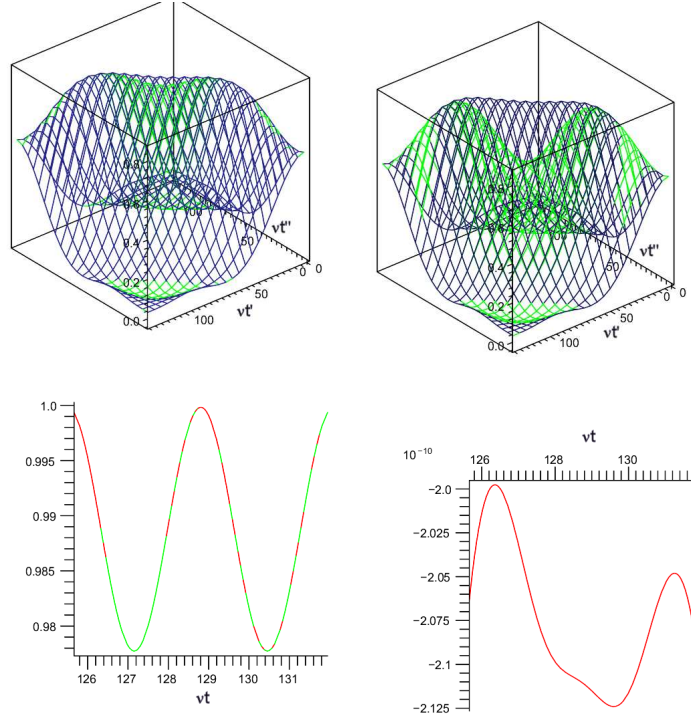
Graferne i figur [6] viser approksimationer sammen med den rigtige funktion. Problemet ligger altid inde på midten af grafen og kan afhjælpes ved at ekspandere eksponentialfunktionen til højere orden. Derfor er der forskelle på hvilken orden eksponentialfunktionen er ekspanderet til for forskellige n , hvorimod de trigonometriske funktioner konsekvent er ekspanderet til 3. orden.

For at vurdere gyldigheden af vores approksimationer sammenligner vi en approksimation med en, der virker markant dårligere. Derefter udregnes fidelityen for de to approksimationer og sammenlignes. Graferne for de 2 approksimationer og deres fidelity samt differensen imellem de 2 fidelityer er vist i figur [7]. Det ses, at forskellen på de to fidelityer er meget lille omkring $t = \tau$.

Vi approksimerer desuden formel (31) ved kun at bruge realdelen af det første led



Figur 6: Approksimationer (grønne) sammenlignet med den korrekte funktion (blå) for $n = 5$ og $n = 3$.

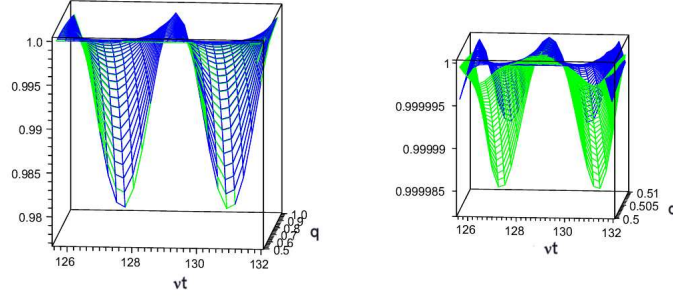


Figur 7: Øverst: to forskellige approksimationer til den samme funktion. Nederst: de to fideliteter og forskellen imellem dem.

og smide alle de andre led væk:

$$\begin{aligned}
 F \approx & \sum_n P_n \left(1 - \text{Re} \left[4 \int_0^t \int_0^{t'} dt' dt'' \Omega(t') \Omega(t'') \cos(\delta t') \cos(\delta t'') \left(\cos(\alpha'' - \alpha') \times \right. \right. \right. \\
 & \left(-\frac{1}{4} e^{\frac{-i(F(t')G(t'') - F(t'')G(t'))}{2}} \langle n | \cos(\beta' + \beta'') | n \rangle + \frac{3}{4} e^{\frac{i(F(t')G(t'') - F(t'')G(t'))}{2}} \langle n | \cos(\beta' - \beta'') | n \rangle \right) \\
 & \left. \left. + \frac{i}{2} \sin(\alpha'' - \alpha') \langle n | \cos(\beta') \cos(\beta'') | 21 \rangle \right) \right] \right)^2
 \end{aligned} \tag{32}$$

Graferne i figur [8] viser fidelityen for $n = 5$ for den trigonometriske puls sammen-

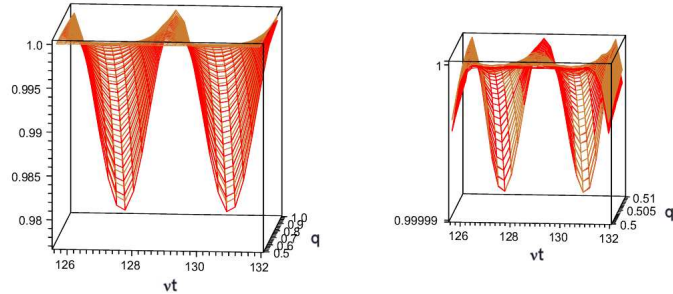


Figur 8: Fidelity for $n = 5$. Fidelityen for $n = 1 - 4$ opfører sig magen til og kan ses i bilag E. Fidelityen er udregnet med $\frac{\Omega_0}{\nu} = 0, 1$

lignet med den flade puls ganget med den trigonometriske funktion på samme måde som i afsnit 4.2.1, hvor formel (23) blev sammenlignet med formel (24). Graferne for andre værdier af n kan findes i bilag E. Billedet ligner det samme som før. Det fulde integral ligger lidt højere end det, hvor man har trukket $\Omega(t)$ uden for integraltegnet, og flader lidt mere ud omkring $q = \frac{1}{2}$. I det hele taget ligner graferne i figur [8] ret meget graferne i figur [5] fra afsnit 4.2.1.

I figur [9] er graferne for fidelityen fra afsnit 4.2.1 og fidelityen fra formel (32). De to grafer er ret ens, også når man forstørrelser området imellem $q = \frac{1}{2}$ og $q = \frac{51}{100}$. Det er interessant, at antagelsen, om at vi kan se bort fra operatorernes tidsafhængighed men beholde $\Omega(t)$ under integraltegnet, faktisk er en ret god approksimation i forhold til at se bort fra både operatorernes og Rabifrekvensens tidsafhængighed.

Ved at tegne alle de led, vi har smidt væk kan vi vurdere, hvor stor en fejl vi



Figur 9: Fidelityen fra sidste afsnit (guld) sammenlignet med fidelityen fra formel (32) (rød). Der er brugt $\frac{\Omega_0}{\nu} = 0, 1$

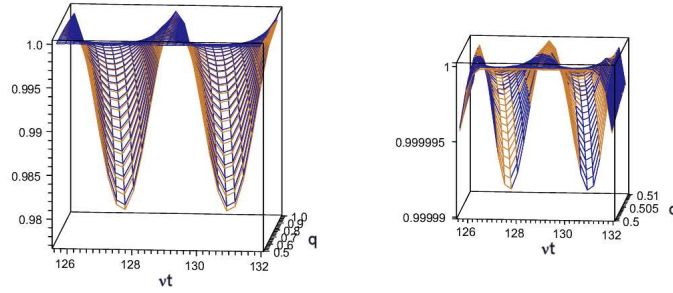
har lavet ved kun at betragte realdelen af det første led som i formel (32). Dette gøres kun for $n = 5$ i omegnen af $t = \tau$ og kun til og med $|n - n'| = 2$. Det gøres

for flade puls, da vi må forvente, at det giver øvre grænse for leddenes bidrag. Til sammenligning har fidelityen for $n = 5$ udsving i en størrelsesorden fra $10^{-6} \left(\frac{\Omega_0}{\nu}\right)^2$ (for $q = \frac{1}{2}$) til $10^{-1} \left(\frac{\Omega_0}{\nu}\right)^2$ (for $q = 1$). Det største bidrag kommer fra den imaginære del af:

$$1 - 4 \int_0^t \int_0^{t'} dt' dt'' \Omega(t') \Omega(t'') \cos(\delta t') \cos(\delta t'') \left[\cos(\alpha'' - \alpha') \times \left(-\frac{1}{4} e^{\frac{-i(F(t')G(t'') - F(t'')G(t'))}{2}} \langle n | \cos(\beta' + \beta'') | n \rangle + \frac{3}{4} e^{\frac{i(F(t')G(t'') - F(t'')G(t'))}{2}} \langle n | \cos(\beta' - \beta'') | n \rangle \right) + \frac{i}{2} \sin(\alpha'' - \alpha') \langle n | \cos(\beta') \cos(\beta'') | n \rangle \right]$$

Dette led giver en ændring i fidelityen på en størrelsesorden på højst $\left(\frac{\Omega_0}{\nu}\right)^4$. Funktionen er dog meget flad i omegnen af $t = \tau$, hvor udsvingningene har en størrelsesorden på højst $10^{-8} \left(\frac{\Omega_0}{\nu}\right)^4$. Ledet bevarer sin flade form for værdier af q forskellig fra 1. Det betyder, at vores fidelity kommer tættere på 1, men dens form ændres ikke.

Det næststørste led, som skal tages i betragtning kommer fra imaginærdelen af



Figur 10: Fidelity med (blå) og uden (guld) rettelse for $n = 5$. Der er brugt $\frac{\Omega_0}{\nu} = 0,1$

$$2i \int_0^t dt' \Omega(t') \cos(\delta t') \cos(\alpha') \langle n-1 | \sin(\beta') | n \rangle$$

og

$$2i \int_0^t dt' \Omega(t') \cos(\delta t') \cos(\alpha') \langle n+1 | \sin(\beta') | n \rangle$$

Disse led giver en ændring i fidelity, der har en størrelsesorden på højst $10^{-2} \left(\frac{\Omega_0}{\nu}\right)^2$ omkring $t = \tau$. Udsvingene er af en størrelsesorden på højst $10^{-4} \left(\frac{\Omega_0}{\nu}\right)^2$. Dermed bliver disse led de største, som kan have en indflydelse på formen af kurven for fidelityen. Det kan derfor være relevant at tegne en graf over fidelityen fra formel (32) alene samt en graf, hvor man har lagt disse led til. Da de to led er nogenlunde ens adderes blot det ene ganget med 2. Det giver følgende grafer i figur [10]. Af graferne ses det, at leddene ikke har nogen markant indflydelse på fidelityen.

Den reelle del af $|n - n'| = 1$ -leddene giver en ændring af fidelity med en størrelsesorden på højst $10^{-7} \left(\frac{\Omega_0}{\nu}\right)^2$.

Den reelle del af $|n - n'| = 2$ -leddene giver en ændring i fidelity af en størrelsesorden på højst $10^{-4} \left(\frac{\Omega_0}{\nu}\right)^4$. Det kunne have indflydelse på fidelityen omkring $q = \frac{1}{2}$, men allerede omkring $q = \frac{3}{5}$, hvor fidelityen fra formel (32) stadig har en størrelsesorden på $10^{-2} \left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^2$, er leddet faldet til en størrelsesorden på $10^{-6} \left(\frac{\Omega_0}{\nu}\right)^4$. Det er derfor i orden at se bort fra dette led.

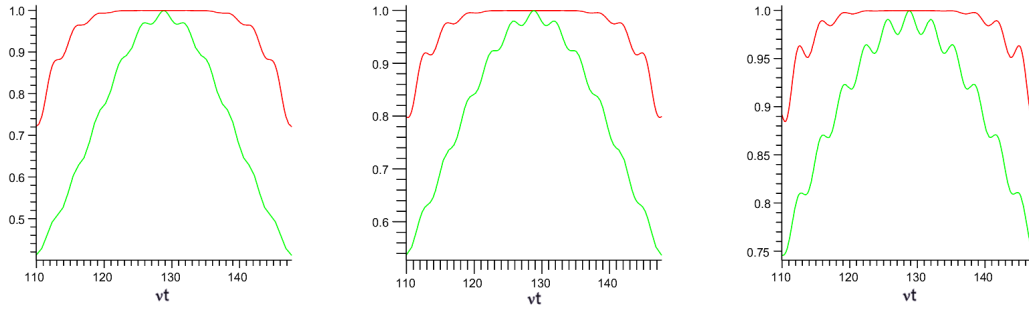
Den imaginære del af $|n - n'| = 2$ -leddene giver en ændring i fidelity af en størrelsesorden på højst $10^{-6} \left(\frac{\Omega_0}{\nu}\right)^4$.

Vi kan altså konkludere, at de approksimationer, vi har lavet for at udregne fidelityen, er rimelige.

4.3.2 Sammenligning imellem flad og trigonometrisk puls

Vi kan nu lave en graf over populationen af den ønskede tilstand $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|gg\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|ee\rangle\right)$ på samme måde som den stiplede linie i figur [4] i Sørensen og Mølmer's artikel. Til dette bruges formlerne (10) hos Sørensen og Mølmer. Resultatet ses i figur [11].

Bemærk at grundet tidligere valg har vi andre værdier for vores parametre. Derfor



Figur 11: Den trigonometriske puls (med $q = \frac{1}{2}$) sammen med den flade puls. Den flade puls har $\Omega_0 = 0.1\nu$, imens den trigonometriske har $\Omega_0 = 0.1\sqrt{\frac{6}{5q^2+2q-1}}\nu \approx 0.22\nu$. For $n = 5$, $n = 3$ og $n = 1$. Resten kan ses i bilag F

er grafen for den flade puls ikke helt sammenlignelig med figur [4] i Sørensen og Mølmer's artikel. Bemærk desuden at vi ikke har argumenteret for, at vores approksimationer er korrekte, i hele området, der ses på graferne. Vi har taget et større område med for ellers ville den ene af graferne blot ligne en ret linie.

Der er i graferne taget højde for, at den maksimale Rabifrekvens skal være større for den trigonometriske funktion end for den flade puls som vist i afsnit 4.2.2.

5 Konklusion

For at bygge en kvantecomputer har man brug at lave gates med små fejl. Med udgangspunkt i en artikel af Sørensen og Mølmer forsøgte vi komme med forslag, der kunne optimere deres metode. Først ved at betragte den originale metode med konstant Rabifrekvens. Derefter med en tidsafhængig Rabifrekvens.

For den konstante Rabifrekvens medtog vi de hurtigt svingende led i Hamiltonen, som Sørensen og Mølmer havde set bort fra. Vi fandt en betingelse under hvilken, de ekstra led blev 0. Derefter viste vi, at denne betingelse ikke blot tog højde for de hurtigt svingende led, men også sørgede for, at fidelitytabet, der skyldtes et perturbationsled, J_x -leddet, i Hamiltonen, blev 0.

Dernæst viste vi, hvordan man med endnu en betingelse kunne mindske fidelitytabet fra kobling til andre modes end center-of-mass-mode.

Herefter gik vi videre med at betragte tidsafhængige Rabifrekvens. Vi viste, at ved at vælge funktioner, som opfyldte bestemte symmetrier, kunne tidsudviklingsoperatoren bibeholde den ideelle opførsel som hos Sørensen og Mølmer.

Vi foreslog tre forskellige funktioner, som opfyldte disse symmetrier og viste, at de under antagelse af, at vi kunne se bort fra visse operators tidsafhængighed, mindskede fidelitytabet fra J_x -leddet.

Vi viste desuden, at for den ene af de tre funktioner var opførslen den samme, når man tog højde for operatorernes tidsafhængighed.

Litteratur

- [1] Anders S. Sørensen, Computer Science for dummies
- [2] J. Eisert og M.M. Wolf , arXiv:quant-ph/0401019 v3 17 Mar 2006
- [3] Shor PW (1994) Proc 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Press; Shor PW (1997) SIAM J Comp 26:1484
- [4] <http://www.secoqc.net/>
- [5] Feynman RP (1996) Feynman lectures on computation. Addison-Wesley, Reading; Feynman RP (1996) Int J Theor Phys 21:367
- [6] Moore GE (1965) Electronics 38:8
- [7] DiVincenzo D (2000) Fort Phys 48:771
- [8] J. B. Brask, Om kvantecomputeren, Gamma nr. 141 s. 13
- [9] L.M.K. Vandersypen et al.: ” Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance”, Nature vol. 414, 2001
- [10] Anders S. Sørensen, Introduction to ion traps
- [11] M. Drewsen, C. Brodersen, L. Hornekær, J.S. Hangst, og J.P. Schiffer, Phys. Rev. Lett. 81, 2878 (1998)
- [12] J. I. Cirac og P. Zoller, Phys. Rev. Lett. 74, 4091 (1995)
- [13] T. Sleator og H. Weinfurter, Phys. Rev. Lett. 74, 4087 (1995)
- [14] B. E. King, C. S. Wood, C. J. Myatt, Q. A. Turchette, D. Leibfried, W. M. Itano, C. Monroe og D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. 81, 1525 (1998)
- [15] D. G. Enzer et al., Phys. Rev. Lett 85, 246 (2000)
- [16] Anders S. Sørensen og Klaus Mølmer, Phys. Rev. Lett. 62, 022311
- [17] G. Milburn, e-print quant-ph/9908037
- [18] S. M. Barnett og P. M. Radmore: Methods in Theoretical Quantum Optics ISBN: 0-19-856361-2 s. 57 og s. 114
- [19] Jan W. Thomsen: Lecture Note 4 kan findes på <http://isis.ku.dk/kurser/index.aspx?kursusid=25477-&xslt=simple6¶m1=145992¶m8=false>

A Bestemmelse af J_x , J_y og forskellige kommutatorer deraf

For to ioner i fælden gælder det at,

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2}(\sigma_{+1} + \sigma_{-1} + \sigma_{+2} + \sigma_{-2}) \\ J_y &= \frac{1}{2i}(\sigma_{+1} - \sigma_{-1} + \sigma_{+2} - \sigma_{-2}) , \end{aligned}$$

Hvor σ_{+1} , σ_{-1} , σ_{+2} , σ_{-2} er henholdsvis hæve- og sænkeoperatorer for ion 1 og 2. J_x og J_y skrives som matricer ved at bruge $|ee\rangle$, $|eg\rangle$, $|ge\rangle$ og $|gg\rangle$ som basis. Det giver:

$$J_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

J_y^2 bliver da:

$$J_y^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kommutatoren $[J_y^2, J_x]$ giver:

$$\begin{aligned} [J_y^2, J_x] &= J_y^2 \cdot J_x - J_x \cdot J_y^2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \hat{\eta} \end{aligned}$$

Kommutatoren mellem J_y^2 og $\hat{\eta}$ er:

$$\begin{aligned}
[J_y^2, \hat{\eta}] &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= J_x
\end{aligned}$$

B Bestemmelse af $U_0^\dagger(t) J_x U_0(t)$

$$U_0(t)^\dagger J_x U_0(t) = e^{iG(t)J_y\hat{p}} e^{iF(t)J_y\hat{x}} e^{iA(t)J_y^2} J_x e^{-iA(t)J_y^2} e^{-iF(t)J_y\hat{x}} e^{-iG(t)J_y\hat{p}}$$

Vi forsimpler udtrykket ved hjælp af Baker-Haudorffs formel, som siger:

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}} e^{[\hat{A}, \hat{B}]}$$

Vi ser i første omgang på $e^{-iF(t)J_y\hat{x}} e^{-iG(t)J_y\hat{p}}$:

$$e^{-iF(t)J_y\hat{x}} e^{-iG(t)J_y\hat{p}} = e^{-i(F(t)\hat{x}+G(t)\hat{p})J_y} e^{\frac{1}{2}[-iF(t)J_y\hat{x}, -iG(t)J_y\hat{p}]}$$

Kommutatoren i den sidste eksponentialfunktion er følgende:

$$\begin{aligned}
[-iF(t)J_y\hat{x}, -iG(t)J_y\hat{p}] &= -F(t)G(t)J_y^2\hat{x}\hat{p} + F(t)G(t)J_y^2\hat{p}\hat{x} \\
&= F(t)G(t)J_y^2[\hat{p}, \hat{x}] \\
&= -iF(t)G(t)J_y^2,
\end{aligned}$$

da $[\hat{p}, \hat{x}] = -i$ da vi har sat $\hbar = 1$.

Vi får da nu:

$$e^{-iF(t)J_y\hat{x}} e^{-iG(t)J_y\hat{p}} = e^{-i(F(t)\hat{x}+G(t)\hat{p})J_y} e^{-i\frac{F(t)G(t)}{2}J_y^2}$$

Samme procedure gælder for $e^{iG(t)J_y\hat{p}} e^{iF(t)J_y\hat{x}}$, som giver:

$$e^{iG(t)J_y\hat{p}} e^{iF(t)J_y\hat{x}} = e^{i(G(t)\hat{p}+F(t)\hat{x})J_y} e^{i\frac{G(t)F(t)}{2}J_y^2}$$

Det giver da følgende fulde udtryk for $U_7(t)^\dagger J_x U_7(t)$:

$$U_0(t)^\dagger J_x U_0(t) = e^{i(G(t)\hat{p}+F(t)\hat{x})J_y} e^{i\left(A(t)+\frac{G(t)F(t)}{2}\right)J_y^2} J_x e^{-i\left(A(t)+\frac{F(t)G(t)}{2}\right)J_y^2} e^{-i(F(t)\hat{x}+G(t)\hat{p})J_y}$$

Nu ser vi på $e^{i(A(t) + \frac{G(t)F(t)}{2})J_y^2} J_x e^{-i(A(t) + \frac{F(t)G(t)}{2})J_y^2}$. Det første vi gør, er at rækkeudvikle eksponentialfunktionerne, samtidig med at vi bruger $J_y^2 = J_y^4 = \dots$, $[J_y^2, J_x] = \hat{\eta}$, $\{J_x, J_y^2\} = J_x$, $J_y^2 J_x J_y^2 = \hat{0}$, samt at vi midlertidig sætter $A(t) + \frac{F(t)G(t)}{2} \equiv \alpha$.

$$\begin{aligned} e^{i\alpha J_y^2} J_x e^{-i\alpha J_y^2} &= \left(1 + i\alpha J_y^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 J_y^2 - \frac{1}{6}i\alpha^3 J_y^2 + \dots\right) J_x \left(1 - i\alpha J_y^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 J_y^2 + \frac{1}{6}i\alpha^3 J_y^2 + \dots\right) \\ &= J_x + i\alpha [J_y^2, J_x] - \frac{1}{2}\alpha^2 \{J_y^2, J_x\} - \frac{i}{6}\alpha^3 [J_y^2, J_x] + \dots \\ &= J_x + i\alpha \hat{\eta} - \frac{1}{2}\alpha^2 J_x - \frac{i}{6}\alpha^3 \hat{\eta} + \dots \\ &= \cos(\alpha) J_x + i \sin(\alpha) \hat{\eta} \end{aligned}$$

Alt dette giver nu:

$$U_0(t)^\dagger J_x U_0(t) = e^{i(G(t)\hat{p} + F(t)\hat{x})J_y} [\cos(\alpha) J_x + i \sin(\alpha) \hat{\eta}] e^{-i(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p})J_y}$$

Nu undersøger vi $e^{i(G(t)\hat{p} + F(t)\hat{x})J_y} J_x e^{-i(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p})J_y}$ samt $e^{i(G(t)\hat{p} + F(t)\hat{x})J_y} \hat{\eta} e^{-i(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p})J_y}$. Vi rækkeudvikler eksponentialfunktionerne som sædvanligt, benytter at $J_y^3 = \dots$, $[J_y, J_x] = -iJ_z$ og $J_y J_x J_y = \hat{0}$, og indfører $G(t)\hat{p} + F(t)\hat{x} = F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p} = \beta$.

$$\begin{aligned} e^{i\beta J_y} J_x e^{-i\beta J_y} &= \left(1 + i\beta J_y - \frac{1}{2}\beta^2 J_y^2 - \frac{1}{6}i\beta^3 J_y + \dots\right) J_x \left(1 - i\beta J_y - \frac{1}{2}\beta^2 J_y^2 + \frac{1}{6}i\beta^3 J_y + \dots\right) \\ &= J_x + i\beta [J_y, J_x] - \frac{1}{2}\beta^2 \{J_y^2, J_x\} - \frac{i}{6}\beta^3 [J_y, J_x] + \dots \\ &= J_x + \beta J_z - \frac{1}{2}\beta^2 J_x - \frac{i}{6}\beta^3 J_z + \dots \\ &= \cos(\beta) J_x + \sin(\beta) J_z \end{aligned}$$

For $\hat{\eta}$ bliver det følgende, når vi husker at $[J_y, \hat{\eta}] = i(\sigma_{-1}\sigma_{-2} - \sigma_{+1}\sigma_{+2})$

$$\begin{aligned} e^{i\beta J_y} \hat{\eta} e^{-i\beta J_y} &= \left(1 + i\beta J_y - \frac{1}{2}\beta^2 J_y^2 - \frac{1}{6}i\beta^3 J_y + \dots\right) \hat{\eta} \left(1 - i\beta J_y - \frac{1}{2}\beta^2 J_y^2 + \frac{1}{6}i\beta^3 J_y + \dots\right) \\ &= \hat{\eta} + i\beta [J_y, \hat{\eta}] - \frac{1}{2}\beta^2 \{J_y, \hat{\eta}\} - \frac{i}{6}\beta^3 [J_y, \hat{\eta}] + \dots \\ &= \hat{\eta} - \beta(\sigma_{-1}\sigma_{-2} - \sigma_{+1}\sigma_{+2}) - \frac{1}{2}\beta^2 \hat{\eta} + \frac{1}{6}\beta^3(\sigma_{-1}\sigma_{-2} - \sigma_{+1}\sigma_{+2}) + \dots \\ &= \cos(\beta) \hat{\eta} - \sin(\beta) (\sigma_{-1}\sigma_{-2} - \sigma_{+1}\sigma_{+2}) \end{aligned}$$

Alt dette kan kombineres til følgende:

$$\begin{aligned} U_0(t)^\dagger J_x U_0(t) &= \cos(\alpha) [\cos(\beta) J_x + \sin(\beta) J_z] \\ &\quad + i \sin(\alpha) [\cos(\beta) \hat{\eta} - \sin(\beta) (\sigma_{-1}\sigma_{-2} - \sigma_{+1}\sigma_{+2})] \\ &= (\cos(\alpha) J_x + i\hat{\eta} \sin(\alpha)) \cos(\beta) \\ &\quad + (\cos(\alpha) J_z - i \sin(\alpha) (\sigma_{-1}\sigma_{-2} - \sigma_{+1}\sigma_{+2}) \hat{\eta}) \sin(\beta) \end{aligned}$$

Det fulde udtryk bliver da:

$$\begin{aligned} U_0(t)^\dagger J_x U_0(t) &= \left(J_x \cos\left(A(t) + \frac{F(t)G(t)}{2}\right) + i\hat{\eta} \sin\left(A(t) + \frac{F(t)G(t)}{2}\right)\right) \cos(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) \\ &\quad + \left(J_z \cos\left(A(t) + \frac{F(t)G(t)}{2}\right) - i(\sigma_{-1}\sigma_{-2} - \sigma_{+1}\sigma_{+2}) \sin\left(A(t) + \frac{F(t)G(t)}{2}\right)\right) \sin(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) \end{aligned}$$

C Bestemmelse af $\cos(A)\cos(B)$ og $\sin(A)\sin(B)$ for A og B værende operatorer

For skalarer gælder det sædvanligvis, at:

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$$

Denne regel kan dog ikke bruges direkte da vores A og B er operatorer i stedet for tal. Derimod kan man udlede et tilsvarende resultat ved hjælp af Baker-Hausdorffs formel. I det følgende bruges forkortelsen β'/β'' , hvor $\beta' = F(t')\hat{x} + G(t')\hat{p}$.

$$\begin{aligned} \cos(\beta')\cos(\beta'') &= \frac{1}{4} \left(e^{i(F(t')\hat{x}+G(t')\hat{p})} + e^{-i(F(t')\hat{x}+G(t')\hat{p})} \right) \left(e^{i(F(t'')\hat{x}+G(t'')\hat{p})} + e^{-i(F(t'')\hat{x}+G(t'')\hat{p})} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(e^{i((F(t')+F(t''))\hat{x}+(G(t')+G(t''))\hat{p})} e^{-i\frac{(F(t')G(t'')-G(t')F(t''))}{2}} + \right. \\ &\quad e^{-i((F(t')+F(t''))\hat{x}+(G(t')+G(t''))\hat{p})} e^{-i\frac{(F(t')G(t'')-G(t')F(t''))}{2}} + \\ &\quad e^{i((F(t')-F(t''))\hat{x}+(G(t')-G(t''))\hat{p})} e^{i\frac{(F(t')G(t'')-G(t')F(t''))}{2}} + \\ &\quad \left. e^{-i((F(t')-F(t''))\hat{x}+(G(t')-G(t''))\hat{p})} e^{i\frac{(F(t')G(t'')-G(t')F(t''))}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-i\frac{(F(t')G(t'')-G(t')F(t''))}{2}} \cos(\beta' + \beta'') + e^{i\frac{(F(t')G(t'')-G(t')F(t''))}{2}} \cos(\beta' - \beta'') \right) \end{aligned}$$

Tilsvarende kan man udregne:

$$\sin(\beta')\sin(\beta'') = -\frac{1}{2}e^{-i\frac{(F(t')G(t'')-G(t')F(t''))}{2}} \cos(\beta' + \beta'') + \frac{1}{2}e^{i\frac{(F(t')G(t'')-G(t')F(t''))}{2}} \cos(\beta' - \beta'')$$

D Bestemmelse af $\langle n' | \sin(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) | n \rangle$

Til bestemmelse af $U^\dagger J_x U$ skal bruges:

$$\langle n' | \sin(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) | n \rangle \quad (33)$$

$$\langle n' | \cos(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) | n \rangle \quad (34)$$

Til at starte med omskrives $i(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p})$ ved hjælp af $\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$ og $\hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a)$:

$$\begin{aligned} i(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) &= \frac{iF(t)a}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)a^\dagger}{\sqrt{2}} - \frac{G(t)a^\dagger}{\sqrt{2}} + \frac{G(t)a}{\sqrt{2}} \\ &= \left(-\frac{G(t)}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right) a^\dagger - \left(-\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right) a \quad (35) \end{aligned}$$

Der er en speciel grund til, at vi skriver det op på den måde. Det vil vi komme tilbage til.

Sinus- og cosinus-funktionerne omskrives ved hjælp af Eulers identiteter til følgende:

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (36)$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (37)$$

Vi ser nu i første omgang på ligning (33). I denne indsætter vi (35) og (36), hvorfra vi får:

$$\begin{aligned} & \langle n' | \sin(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) | n \rangle \\ &= \frac{1}{2i} \left(\langle n' | e^{\left(\frac{-G(t)}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right)a^\dagger - \left(\frac{-G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right)a} | n \rangle - \langle n' | e^{\left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right)a^\dagger - \left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right)a} | n \rangle \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Her kommer det os til gode, at vi skrev (35), som vi gjorde. Det skyldes, at Glaubers forskydningsoperator er

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a},$$

hvor α er et komplekst tal. Udfra dette bliver (38) til følgende:

$$\begin{aligned} & \langle n' | \sin(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) | n \rangle \\ &= \frac{1}{2i} \left(\langle n' | D\left(\frac{-G(t)}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right) | n \rangle - \langle n' | D\left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right) | n \rangle \right) \end{aligned} \quad (39)$$

Disse matricelementer er velkendte, da følgende sammenhæng gælder for Glaubers forskydningsoperator:

For $n < n'$:

$$\langle n' | D(\alpha) | n \rangle = \left(\frac{n!}{n'}\right)^{1/2} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (-\alpha)^{n'-n} L_{n'}^{(n'-n)}(|\alpha|^2) \quad (40)$$

For $n > n'$:

$$\langle n' | D(\alpha) | n \rangle = \left(\frac{n!}{n'}\right)^{1/2} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (\alpha^*)^{n-n'} L_n^{(n-n')}(|\alpha|^2) \quad (41)$$

Af dette kan vi se:

For $n < n'$:

$$\begin{aligned} & \langle n' | D\left(\frac{-G(t)}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right) | n \rangle = \\ & \left(\frac{n!}{n'}\right)^{1/2} e^{-\frac{(G(t)^2 + F(t)^2)}{4}} \left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right)^{n'-n} L_{n'}^{(n'-n)}\left(\frac{G(t)^2 + F(t)^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle n' | D\left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right) | n \rangle = \\ & \left(\frac{n!}{n'}\right)^{1/2} e^{-\frac{(G(t)^2 + F(t)^2)}{4}} \left(-\frac{G(t)}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right)^{n'-n} L_{n'}^{(n'-n)}\left(\frac{G(t)^2 + F(t)^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Udfra hvilket vi får:

$$\begin{aligned} & \langle n' | \sin(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) | n \rangle \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{n!}{n'}\right)^{1/2} e^{-\frac{(G(t)^2 + F(t)^2)}{4}} L_{n'}^{(n'-n)}\left(\frac{G(t)^2 + F(t)^2}{2}\right) \left[\left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right)^{n'-n} - \left(-\frac{G(t)}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right)^{n'-n} \right] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{for } n' - n \text{ lige} \\ -i \left(\frac{n!}{n'}\right)^{1/2} e^{-\frac{(G(t)^2 + F(t)^2)}{4}} L_{n'}^{(n'-n)}\left(\frac{G(t)^2 + F(t)^2}{2}\right) \left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}}\right)^{n'-n} & \text{for } n' - n \text{ ulige} \end{cases} \end{aligned}$$

For $n > n'$ gør vi på samme, blot hvor vi benytter (41). Vi får da følgende:

$$\begin{aligned}
& \langle n' | \sin(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) | n \rangle \\
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{n'!}{n!} \right)^{1/2} e^{-\frac{(G(t)^2 + F(t)^2)}{4}} L_n^{(n-n')} \left(\frac{G(t)^2 + F(t)^2}{2} \right) \left[\left(-\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n-n'} - \left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n-n'} \right] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{for } n - n' \text{ lige} \\ -i \left(\frac{n'!}{n!} \right)^{1/2} e^{-\frac{(G(t)^2 + F(t)^2)}{4}} L_n^{(n-n')} \left(\frac{G(t)^2 + F(t)^2}{2} \right) \left(-\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n-n'} & \text{for } n - n' \text{ ulige} \end{cases}
\end{aligned}$$

Den samme procedure gør sig gældende for cosinusdelen (ligning (34)). Vi benytter ligningerne (35), (37), (40) og (41). Vi kommer da frem til følgende:

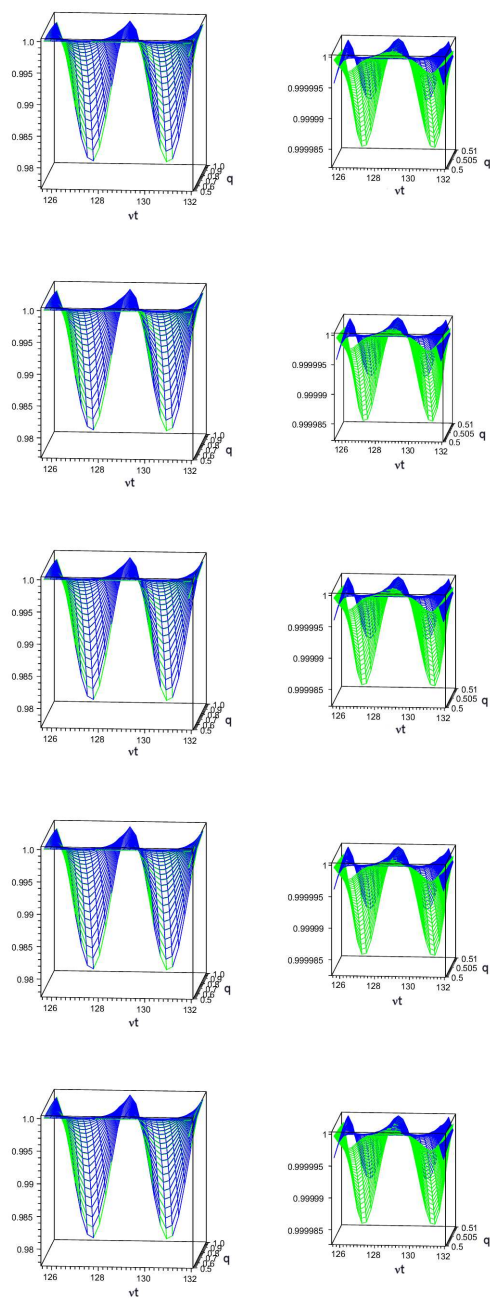
For $n < n'$:

$$\begin{aligned}
& \langle n' | \cos(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) | n \rangle \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n'!}{n!} \right)^{1/2} e^{-\frac{(G(t)^2 + F(t)^2)}{4}} L_{n'}^{(n'-n)} \left(\frac{G(t)^2 + F(t)^2}{2} \right) \left[\left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n'-n} + \left(-\frac{G(t)}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n'-n} \right] \\
&= \begin{cases} \left(\frac{n'!}{n!} \right)^{1/2} e^{-\frac{(G(t)^2 + F(t)^2)}{4}} L_{n'}^{(n'-n)} \left(\frac{G(t)^2 + F(t)^2}{2} \right) \left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n'-n} & \text{for } n' - n \text{ lige} \\ 0 & \text{for } n' - n \text{ ulige} \end{cases}
\end{aligned}$$

For $n > n'$:

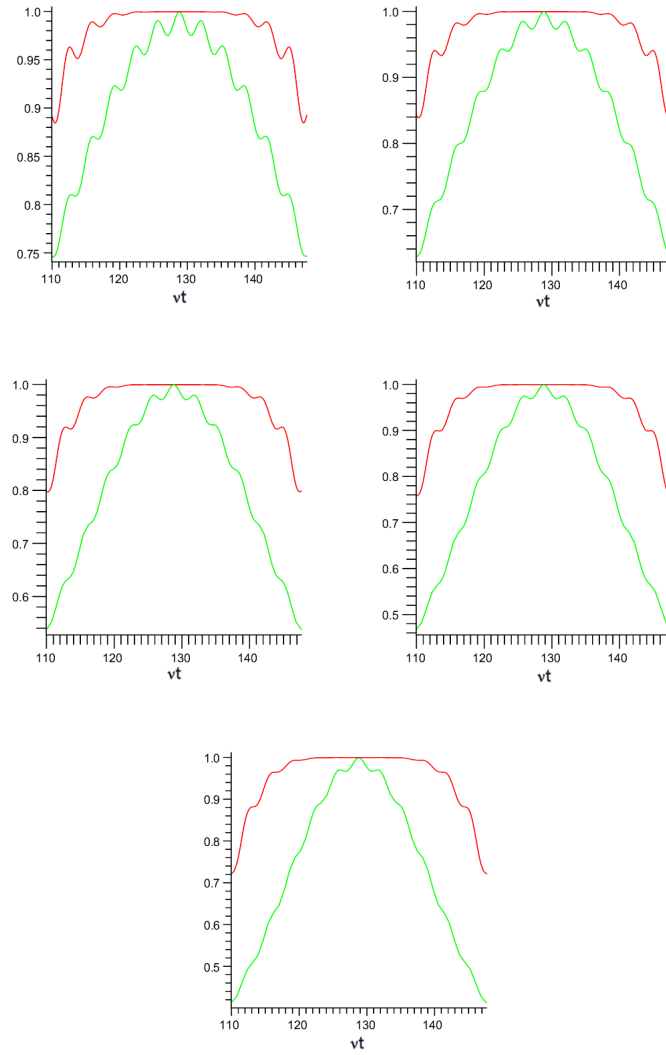
$$\begin{aligned}
& \langle n' | \cos(F(t)\hat{x} + G(t)\hat{p}) | n \rangle \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n'!}{n!} \right)^{1/2} e^{-\frac{(G(t)^2 + F(t)^2)}{4}} L_n^{(n-n')} \left(\frac{G(t)^2 + F(t)^2}{2} \right) \left[\left(-\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n-n'} + \left(\frac{G(t)}{\sqrt{2}} + \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n-n'} \right] \\
&= \begin{cases} \left(\frac{n'!}{n!} \right)^{1/2} e^{-\frac{(G(t)^2 + F(t)^2)}{4}} L_n^{(n-n')} \left(\frac{G(t)^2 + F(t)^2}{2} \right) \left(-\frac{G(t)}{\sqrt{2}} - \frac{iF(t)}{\sqrt{2}} \right)^{n-n'} & \text{for } n - n' \text{ lige} \\ 0 & \text{for } n - n' \text{ ulige} \end{cases}
\end{aligned}$$

E Fidelityen for $n = 1 - 5$



Figur 12: $n = 5$ øverst. $n = 1$ nederst.

F Population af $|\Psi_{max}\rangle$



Figur 13: $n = 1$ øverst til venstre. $n = 5$ nederst.